

1. Montrez le plus simplement possible que $\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $M_{2,2}(\mathbb{R})$.

L'espace vect. des matrices 2×2 est de dimension 4. " $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ". Il y a 4 vecteurs donnés donc le compte est bon. Reste à voir si ceux-ci engendrent $M_{2,2}$, autrement dit il faut montrer qu'ils forment une famille indépendante. c'est à dire que :

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ implique } \alpha, \beta, \gamma, \delta = 0$$

On peut former le système suivant

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

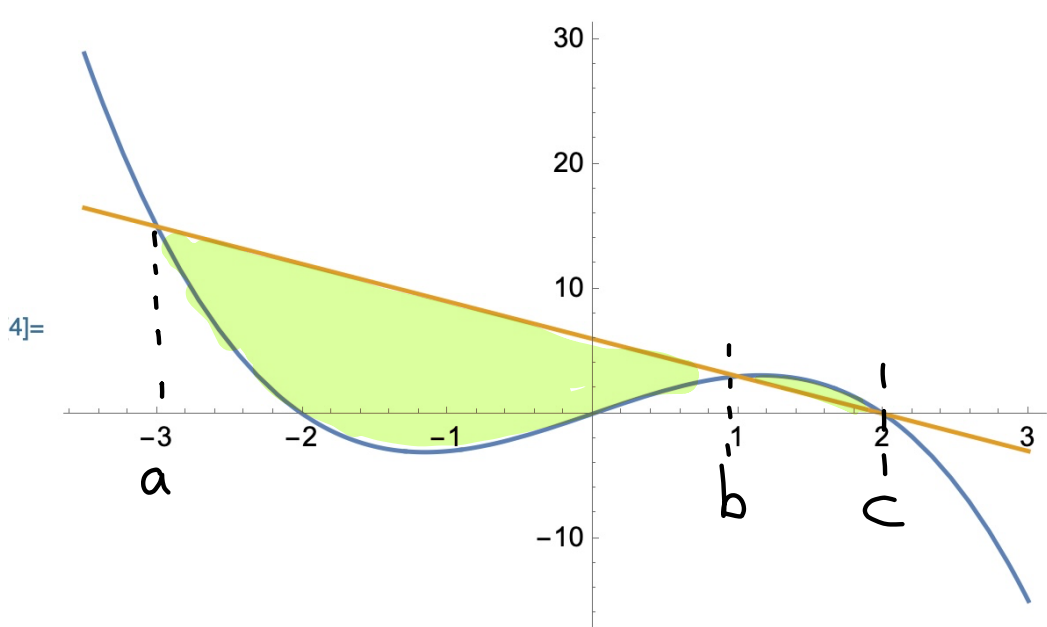
et le résoudre par réduction de la matrice augmentée à la forme échelonnée.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{array} \right)$$

il y a 4 pivot ce qui signifie que l'unique solution est la solution nulle. La famille donnée comporte 4 vecteurs, elle est indépendante, c'est donc une base

2. Calculez l'aire du domaine borné limité par la cubique $y = 4x - x^3$ et la droite $y = 6 - 3x$.



$$\begin{aligned} a &= -3 \\ b &= 1 \\ c &= 2 \end{aligned}$$

Il faut commencer par trouver les points a, b et c.

$$4x - x^3 - 6 + 3x = 0$$

$$-x^3 + 7x - 6 = 0 \quad x=1 \text{ est une solution donc}$$

$$\begin{array}{r} -x^3 + 0x^2 + 7x - 6 : x-1 \\ \underline{-x^3 + x^2} \\ -x^2 + 7x \\ \underline{-x^2 + x} \\ 6x - 6 \\ \underline{6x - 6} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} x-1 \\ -x^2 - x + 6 \\ \underline{-(x+3)(x-2)} \\ \text{s'annule en } -3 \text{ et } 2 \end{array}$$

$$\text{L'aire est } \left| \int_{-3}^1 (-x^3 + 7x - 6) dx \right| + \left| \int_1^2 (-x^3 + 7x - 6) dx \right|$$

$$= \left| \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{7x^2}{2} - 6x \right]_{-3}^1 \right| + \left| \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{7x^2}{2} - 6x \right]_{1}^2 \right|$$

$$= |-32| + \left| \frac{3}{4} \right| = +32 + \frac{3}{4} = 32,75$$

3. Luca s'amuse à viser une quille avec une boule. L'expérience montre qu'il renverse la quille 1 fois sur 10 en moyenne. Combien de fois Luca doit-il lancer la boule s'il veut avoir plus de 99% de chance de renverser au moins une fois la quille ?

C'est un manche ce Luca !!! $\frac{1}{10}$!!!

On passe par l'événement complémentaire : Luca rate toujours la quille.

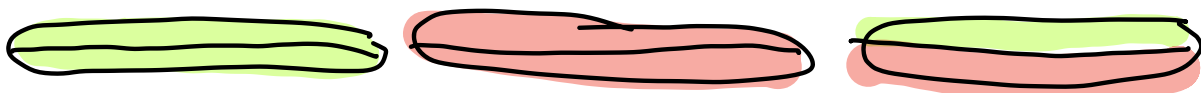
$$\left(1 - \frac{1}{10}\right)^n = 1 - 0,99$$

$$\left(\frac{9}{10}\right)^n = 0,01 \Rightarrow n = \frac{\ln(0,01)}{\ln 0,9} = 43,7$$

donc il faut qu'il tire 44 fois la boule.

4. You have a hat in which there are three pancakes : One is golden on both sides, one is brown on both sides, and one is golden on one side and brown on the other. You withdraw one pancake, look at one side, and see that it is brown. What is the probability that the other side is brown ?

(Ca vous rappelle pas le livre des Récidés où ils mettent des problèmes en anglais et en allemand pour faire intelligent.)



On sait que l'on a déjà un côté brun, donc il reste une chance sur deux pour que l'autre soit brun. ~~$P = \frac{1}{2}$~~ et bien NON!!! Il faut utiliser la formule de Bayes

$$P(B/B) = \frac{P(B \cap B)}{P(B)} = \frac{1/3}{3/6} = \frac{2}{3}$$

6)

5. On revient au dernier problème du TE 3.

a) Il ressemble beaucoup à un exercice fait au cours. Lequel ? ←

b) Résolvez le problème de deux façons différentes.

← p vous laissez répondre

8. Dans un immeuble à 6 étages (plus le rez-de-chaussée), un ascenseur part du rez avec 4 personnes. Quelle est la probabilité que ces personnes sortent de l'ascenseur à exactement 2 étages différents ?



Je vais admettre que chacune des personnes est distinguable. ← très important

Chaque peut choisir parmi 6 étages, donc le nombre de possibilités total est $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4$



On choisit 2 étages parmi 6 $C_2^6 = \frac{6!}{4!2!} = 15$

a) On choisit 1 personne parmi 4 qui descend au premier des deux étages les 3 autres descendent au deuxième étage choisit

$$C_1^4 = 4 \cdot C_3^3 = 1 \Rightarrow 4$$

b) on choisit 2x(2 personnes et 2 personnes)

$$C_2^4 = 6 : C_2^2 = 1 \Rightarrow 6$$

$$C_2^4 = 6 : C_2^2 = 1 \Rightarrow 6$$

c) on choisit 3 personnes puis 1

$$C_3^4 = 4 \cdot C_1^1 = 1 \Rightarrow 4$$

$$\frac{(4+6+4) \cdot 15}{6^4} = \frac{300}{6^4} = \underline{\underline{0.23}}$$

ici
il faut doubler
la mise $\Rightarrow$

J'ai de la peine à voir une deuxième méthode !!!

6)

6. En fait on peut donner raison à quelqu'un qui affirme l'existence d'un espace vectoriel ne contenant que deux vecteurs. Comment ? Si il nous paraît pour dire qu'il a raison 😊

(Supposons que le mec soit un mathématicien c'est qu'il adore les trucs irréels et bizarres.)

Un espace vectoriel est formé d'un groupe abélien muni d'un corps, celui des réels en général.

Prenons l'ensemble $\{\oplus, \ominus\}$ muni de la loi de composition interne suivante :

$$\text{loi de composition} \begin{cases} \oplus \cdot \oplus = \oplus \\ \oplus \cdot \ominus = \ominus \\ \ominus \cdot \oplus = \ominus \\ \ominus \cdot \ominus = \oplus \end{cases}$$

1) Le groupe est commutatif

2) " " associatif

3) " " a un élément neutre qui est $\oplus$

4) " " a un élément opposé qui est lui-même

On prend à présent non pas l'ensemble des réels mais l'ensemble des entiers $\mathbb{Z}$

On remarque que l'on peut former un espace vectoriel sur $\mathbb{Z}$

Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$.

$$5) \lambda(\oplus \cdot \oplus) = \lambda \oplus \cdot \lambda \oplus$$

$$\text{Ex: } 3(\oplus \cdot \oplus) = \ominus \equiv 3 \cdot \oplus \cdot 3 \cdot \oplus = \ominus$$

$$6) (\lambda + \mu) \cdot \oplus = \lambda \oplus + \mu \oplus$$

$$\text{Ex: } (3+5) \oplus = \oplus \equiv 3 \oplus + 5 \oplus = \oplus$$

$$7) (\lambda \mu) \cdot \oplus = \lambda(\mu \oplus)$$

évident!

$$8) 1_k \cdot \oplus = \oplus$$

$$1_h = 1 \in \mathbb{Z}$$

il faut bien sûr vérifier avec le "vecteur" $\ominus$ également.

Et voilà. j'ai formé l'espace vectoriel des signes $\oplus$ et $\ominus$ sur l'ensemble des nombres entiers: $\Downarrow$

Je sais pas du tout si c'est possible!!! Mais les mathématiciens étaient un peu fous.... pourquoi pas!!

Juste entre nous!!! Cet espace vectoriel à 2 éléments ne sert à rien du tout.

