Théorie et exercices IV

Analyse combinatoire et probabilités

Michel Semon

02/02/2023

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

Table des matières

I Révision maturité **4**

1 Analyse combinatoire et probabilités **5**
1.1 Avertissement . . . 5
1.2 Introduction . . . 5
1.2.1 Axiomes de la théorie des probabilités . . . 5
1.2.1.1 Expérience aléatoire . . . 5
1.2.1.2 Événement aléatoire . . . 5
1.2.1.3 Probabilité . . . 5
1.2.2 Calcul combinatoire . . . 6
1.2.2.1 Modèle probabiliste . . . 6
1.2.2.2 Propriétés des probabilités . . . 6
1.2.2.3 Probabilité uniforme . . . 6
1.3 Formules d'analyse combinatoire . . . 7
1.3.1 Principe fondamental de dénombrement, règle de multiplication . . . 7
1.3.2 Permutations . . . 7
1.3.3 Arrangements . . . 7
1.3.4 Permutations d'objets partiellement indiscernables . . . 8
1.3.5 Combinaisons . . . 8
1.3.6 Combinaisons avec répétitions** . . . 9
1.4 Formules concernant les probabilités . . . 9
1.4.1 Probabilités conditionnelles . . . 9
1.4.1.1 Indépendance de deux événements . . . 9
1.4.2 Règle de multiplication . . . 10
1.4.3 Probabilités totales . . . 11
1.4.4 Formule de Bayes . . . 12
1.4.5 Formule d'inclusion-exclusion . . . 13
1.4.6 Loi binomiale . . . 13
1.4.6.1 Epreuve de Bernouilli . . . 13
1.4.7 Loi hypergéométrique . . . 14
1.5 Exercices . . . 14
1.5.1 EXERCICES d'analyse combinatoire . . . 14
1.5.2 EXERCICES de probabilités . . . 15
1.6 Solutions des exercices . . . 18
1.6.1 SOLUTIONS des exercices d'analyse combinatoire . . . 18
1.6.2 SOLUTIONS des exercices de probabilités . . . 23

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

Index

analyse combinatoire, 6
Arrangements, 7

Combinaisons, 8
Combinaisons avec répétitions, 9

dénombrements, 6

Epreuve de Bernouilli, 13
espace d'état, 5
expérience aléatoire, 5

Formule d'inclusion-exclusion, 13
Formule de Bayes, 12

Loi binomiale, 13
loi de Bernouilli, 6
Loi hypergéométrique, 14

modèle probabiliste, 6

objets partiellement indiscernables, 8

Pari de Pascal, 5
Permutations, 7
Principe fondamental de dénombrement, 7
Probabilité uniforme, 6
Probabilités conditionnelles, 9
Probabilités totales, 11
Propriétés des probabilités, 6

Règle de multiplication, 10
règle de multiplication, 7

événement aléatoire, 5

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

Première partie

Révision maturité

Chapitre 1

Analyse combinatoire et probabilités

1.1 Avertissement

Le domaine de l'analyse combinatoire et des probabilités est un cas à part dans l'étude des mathématiques de base. Après le premier contact, je dois avouer que la sensation de bizzare domine, on ne sait pas quelle formule utiliser ! Afin de ne pas empirer les choses, j'ai décidé de traiter les problèmes qui suivent en utilisant les fondements de la théorie des probabilités dont je vais commencer par donner les axiomes et les principaux théorèmes. Cette approche est beaucoup plus difficile, mais aussi beaucoup plus structurée et satisfaisante, car elle montre que malgré les apparences, l'analyse combinatoire et les probabilités est un domaine qui a une structure bien définie. On rappellera que c'est Kolmogorov, qui dans les années 1930 fût le premier à donner aux probabilités leur lettre de noblesse en en faisant une théorie à part entière des mathématiques. Avant lui les probabilités étaient étudiées surtout pour les paris et les jeux, mais également dans les procès pour déterminer la culpabilité des accusés. Il ne faut pas oublier Pascal et son Pari , comme quoi croire en Dieu est statistiquement plus intéressant en admettant que les chances de son existence ou que sa non-existence sont identiques.

1.2 Introduction

Cette partie peut sembler assez abstraite en fait ... elle l'est. Je vous conseille de la lire rapidement et d'y revenir après avoir fait les exercices, les explications paraîtront plus simples.

1.2.1 Axiomes de la théorie des probabilités

1.2.1.1 Expérience aléatoire

Une **expérience aléatoire** ϵ est une expérience qui lorsqu'elle est reproduite dans des conditions identiques peut donner des résultats différents. L'espace de tous les résultats possibles est appelé l'**espace d'état** et est noté en général Ω. Un résultat possible de l'expérience est noté ω.

$$\omega \in \Omega$$

1.2.1.2 Événement aléatoire

Un **événement aléatoire** est un sous-espace de Ω qui peut être réalisé ou non lors de l'expérience ϵ. Les événements aléatoires sont des ensembles et sont traités avec le formalisme de la théorie des ensembles.

1.2.1.3 Probabilité

On appelle **probabilité** de l'événement A lié à une expérience ϵ la grandeur $P(A)$ qui désigne la fréquence de sa réalisation lorsque l'expérience est renouvelée une infinité de fois.

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

1.2.2 Calcul combinatoire

Dans cette brochure on ne considère que des ensembles Ω fini.

1.2.2.1 Modèle probabiliste

On appelle **modèle probabiliste** un triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ où Ω est l'espace des états, $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble fini des événements et P l'ensemble des $P(A)$ pour $A \in \mathcal{P}(\Omega)$. P est une application de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans l'intervalle $[0;1]$, qui vérifie les propriétés 1.2.2.2.

$$P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0;1]$$

Remarque 1. *$\mathcal{P}(\Omega)$ modélise l'information que l'on peut obtenir à partir des résultats de l'expérience.*

1.2.2.2 Propriétés des probabilités

Une probabilité vérifie :

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(\Omega) = 1$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B), \quad$ si $A \cap B = \emptyset$

d'où l'on déduit

- $P(\emptyset) = 0$
- $P(A) + P(A^c) = 1$
- $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$
- $P(A) < P(B) \Rightarrow A \subset B$

Proposition 1.2.1. Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$

a) Une probabilité P sur Ω est entièrement caractérisée par ses valeurs sur les singletons, c'est-à-dire par la famille $\{p_{\omega_i} = P(\{\omega_i\}), \omega_i \in \Omega\}$

1. Étant donné une famille de réels $(p_i)_{1 \leq i \leq n}$, il lui correspond une probabilité unique telle que $p_i = P(\{\omega_i\})$, pour tout $\omega_i \in \Omega$ ssi

$$0 \leq p_i \leq 1, \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

On a alors

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \quad P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in A} p_\omega. \tag{1.1}$$

Exemple 1. La loi de Bernouilli de paramètre $p \in [0;1]$. L'espace Ω a deux éléments :

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\} \quad \text{et} \quad p_{\omega_1} = p \; p_{\omega_2} = 1 - p$$

1.2.2.3 Probabilité uniforme

On dit que la probabilité P sur l'espace fini Ω est uniforme si $p_\omega = P(\{\omega\})$ ne dépend pas de ω. Pour tout ω on a

$$p_\omega = \frac{1}{\text{card}(\Omega)}$$

où $\text{card}(\Omega)$ désigne le cardinal de Ω c'est-à-dire son nombre d'éléments.
Si P est une probabilité uniforme, on déduit de 1.1 que

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$$

de sorte que le calcul des probabilités se ramène, dans ce cas, à des dénombrements : on est dans le cadre de l'**analyse combinatoire**.

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

Remarque 2. ***Remarque importante***
*Ce qui précède traduit le fait que dans tous les problèmes qui suivent les événements sont équiprobables, un dé a autant de chance de tomber sur un que sur n'importe quelles autres des cinq valeurs. Chaque carte d'un jeu de trente-six ou cinquante-deux cartes à la même chance d'apparaître. Sans cette équiprobabilité ou encore probabilité uniforme aucun des calculs des problèmes de dénombrements qui suivent ne serait sensés. Tous les dés, les jeux de cartes et autres boules de couleur sont "**honnêtes**". Ceci est fondamental, mais n'est pas forcément le cas dans la réalité.*

1.3 Formules d'analyse combinatoire

Dans ce qui suit on va voir les principaux types de dénombrements. Les formules sont présentées à travers des exemples, ça me semble la meilleure manière de faire.

1.3.1 Principe fondamental de dénombrement, règle de multiplication

Exemple 2. Sur une valise il y a un cadenas à numéro de 3 chiffres, de combien de manières différentes peut-on l'initialiser ? Nous avons "trois boîtes", dans chacune d'elle on peut placer un chiffre de 0 à 9. On peut répéter les apparitions, un chiffre déjà utilisé peut être réutilisé. La réponse est $10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3$.

Exemple 3. Un restaurant propose trois entrées, deux plats principaux et sept desserts. Combien de menus différents peut-on composer ? La réponse est $3 \cdot 2 \cdot 7 = 35$ menus possibles.

Définition 1.3.1. ***Règle de multiplication***

Si n expériences doivent être réalisées telles que la première puisse donner p_1 résultats différents, la deuxième p_2 résultats différents et ainsi de suite jusqu'à p_n. Il y aura $p_1 \cdot p_2 \cdot .... \cdot p_n$ résultats possibles au total.

1.3.2 Permutations

Exemple 4. Combien d'anagrammes peut-on former avec le mot "crayon" ?

Le mot est un ensemble de six lettres. On imagine six boîtes alignées (alignées = "que l'on peut distinguer"). Dans chacune d'elles, on va placer une des six lettres. Dans la première boîte on en met une des six, dans la deuxième une des cinq restantes et ainsi de suite. La solution est $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$. Il y a sept-cents-vingt manières de permuter six éléments.

Définition 1.3.2. ***Permutations***

$$P_n = n(n-1)(n-2)(n-3)....(2)(1) = n! \tag{1.2}$$

1.3.3 Arrangements

Exemple 5. On reprend le mot crayon, mais cette fois-ci on décide de n'aligner que quatre des six lettres que contient le mot. Le raisonnement est le même, mais on s'arrête à quatre lettres. Le résultat est $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$. On note ce calcul par

$$A_4^6 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot (2 \cdot 1)}{(2 \cdot 1)} = \frac{6!}{(6-4)!} = 360$$

Définition 1.3.3. ***Arrangement***

$$A_p^n = \frac{n!}{(n-p)!} \tag{1.3}$$

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

1.3.4 Permutations d'objets partiellement indiscernables

Exemple 6. Trouver le nombre d'anagrammes que l'on peut former avec le mot "jazz" ? Il y a deux lettres indiscernables, les "z". Commençons par les rendre discernables en les indiçant : jaz_1z_2. On a à présent un mot de cinq lettres distinctes que l'on traite comme une permutation normale. Les résultats possibles sont :

$$\begin{pmatrix}
j & a & \text{z1} & \text{z2} \\
j & a & \text{z2} & \text{z1} \\
j & \text{z1} & a & \text{z2} \\
j & \text{z1} & \text{z2} & a \\
j & \text{z2} & a & \text{z1} \\
j & \text{z2} & \text{z1} & a \\
a & j & \text{z1} & \text{z2} \\
a & j & \text{z2} & \text{z1} \\
a & \text{z1} & j & \text{z2} \\
a & \text{z1} & \text{z2} & j \\
a & \text{z2} & j & \text{z1} \\
a & \text{z2} & \text{z1} & j \\
\text{z1} & j & a & \text{z2} \\
\text{z1} & j & \text{z2} & a \\
\text{z1} & a & j & \text{z2} \\
\text{z1} & a & \text{z2} & j \\
\text{z1} & \text{z2} & j & a \\
\text{z1} & \text{z2} & a & j \\
\text{z2} & j & a & \text{z1} \\
\text{z2} & j & \text{z1} & a \\
\text{z2} & a & j & \text{z1} \\
\text{z2} & a & \text{z1} & j \\
\text{z2} & \text{z1} & j & a \\
\text{z2} & \text{z1} & a & j
\end{pmatrix}$$

On remarque que par exemple les mots "j a z1 z2" et "j a z2 z1" sont identiques si l'on enlève les indices. Ceci est valable pour toutes les paires de mots où les lettres "z1" et "z2" se trouvent relativement au même endroit. Il s'agit de diviser le nombre total de mots par le nombre de permutations possibles des lettres identiques. Ce qui donne $\frac{4!}{2!} = 12$ mots distincts.

Définition 1.3.4. ***Permutations d'objets partiellement indiscernables***

Il y a

$$\frac{n!}{p_1! \cdot p_2! \cdot p_3!} \tag{1.4}$$

permutations différentes de n objets parmi lesquels p_i $(i=1..3)$ sont indiscernables.

1.3.5 Combinaisons

Exemple 7. De combien de manières peut-on choisir six numéros parmi les numéros de un à quarante-cinq ? On en choisit un parmi quarante-cinq, puis un parmi quarante-quatre, puis un parmi quarante-trois et ainsi de suite. Cela fait $\frac{45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40}{6!} = 8'145'060$. Pourquoi divisé par six factorielle ? En choisissant les nombres les uns après les autres on a introduit un ordre. Le premier numéro tiré aurait pu être tiré en dernier, le deuxième en troisième position, etc et le résultat serait rsteé le même. Il faut comprendre que dans le cas des combinaisons l'ordre des tirages n'importe pas, c'est comme si on prenait six numéros en une seule fois, qu'on les pose sur une table et qu'alors seulement on s'y intéresse. Dès que dans un problème apparaissent les mots "tirage simultané", il s'agit d'une combinaison.

Définition 1.3.5. ***Combinaisons***

Il y a

$$\binom{n}{p} = C_p^n = \frac{n!}{(n-p)! \cdot p!} \tag{1.5}$$

façons différentes de choisir p objets parmi n.

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

Remarque 3. *Les notations $\binom{n}{p}$ et C_p^n sont synonymes et signifient les deux "choisir p éléments parmi n".*

1.3.6 Combinaisons avec répétitions**

1.4 Formules concernant les probabilités

1.4.1 Probabilités conditionnelles

Exemple 8. On lance deux dés dont l'un roule sous une armoire. Le dé qui est visible montre 3, qu'elle est la probabilité que la somme des deux dés donne 8 ?
L'espace d'état passe de 36 paires possibles à six, à savoir $\{(3;1),(3;2),(3;3),(3;4),(3;5),(3;6)\}$. La probabilité d'avoir une somme de huit est de $\frac{1}{6}$. Soit les événements X ="la somme est 8" et Y ="le dé visible donne 3". La probabilité calculée se note $P(X|Y)$ et se lit "probabilité que la somme soit 8 sachant que le dé visible vaut 3". C'est ce qu'on appelle une probabilité conditionnelle.

Exemple 9. Une pièce de monnaie "honnête" est lancée deux fois.

- Quelle est la probabilité que les deux pièces donnent "face" si on sait que l'une des deux est déjà "face".
- Quelle est la probabilité que les deux pièces donnent "face" si l'on sait que au moins une pièce est déjà sur "face" (on ne sait pas laquelle).

L'ensemble fondamental est $\{(P;P),(P;F),(F;P),(F;F)\}$. Soit les événements X ="les deux pièces montrent face", dont l'unique représentant est $\{(F;F)\}$ et l'événement Y ="la première pièce montre face" dont les représentants sont $\{(F;F),(F;P)\}$. La probabilité $P(X|Y)$="les deux pièces montrent face sachant que la première est sur face" se calcule de la manière suivante :

$$P(X|Y)=\frac{P(X\cap Y)}{P(Y)}=\frac{P(\{(F;F)\})}{P(\{(F;F),(F;P)\})}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$$

cela semble normal.
Pour répondre à la deuxième question, l'événement Z="au moins une pièce est face" est représenté par le sous-ensemble $\{(P;F),(F;P),(F;F)\}$. Le calcul de la probabilité donne :

$$P(X|Z)=\frac{P(X\cap Z)}{P(Z)}=\frac{P(\{(F;F)\})}{P(\{(P;F),(F;P),(F;F)\})}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{3}$$

ce qui peut paraître étrange, car intuitivement on s'attend à $\frac{1}{2}$! À méditer !

Définition 1.4.1. ***Probabilités conditionnelles***

Soit les événements X et Y, on appelle probabilité conditionnelle de X la valeur

$$P(X|Y)=\frac{P(X\cap Y)}{P(Y)}$$

qui est donnée par le quotient de la probabilité non conditionnelles $P(X\cap Y)$ (probabilité que les deux événements apparaissent) avec $P(Y)$ (probabilité que seul le deuxième apparaisse).
Intuitivement cela permet de "mesurer" la dépendance entre les deux événements.

Remarque 4. *Attention $P(X|Y)$ n'est pas forcément égal à $P(Y|X)$. Prenons pour contre-exemple le jet d'un dé qui tombe sur 2, la probabilité de "le nombre tiré est pair sachant que le 2 est apparu" est de 1 alors que "le 2 est apparu sachant que le nombre est pair" vaut $\frac{1}{3}$.*

1.4.1.1 Indépendance de deux événements

Exemple 10. Calculer la probabilité que le dé qui a glissé sous l'armoire montre un nombre pair sachant que le dé visible montre un nombre impair. On définit les événements X ="le premier dé montre pair" et Y ="le deuxième dé montre impair". On a l'espace d'état $\{(p;p),(p;i),(i;p),(i;i)\}$.

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

La probabilité que X et Y soient respectivement pair et impair est

$$P(X \cap Y) = \frac{P(\{(p;i)\})}{P(\{(p;p),(p;i),(i;p),(i;i)\})} = \frac{1}{4}$$

La probabilité que le dé caché montre pair est

$$P(X) = \frac{P(\{(p;i),(p;p)\})}{P(\{(p;p),(p;i),(i;p),(i;i)\})} = \frac{1}{2}$$

et la probabilité que le dé visible montre impair est

$$P(Y) = \frac{P(\{(i;i),(p;i)\})}{P(\{(p;p),(p;i),(i;p),(i;i))\}} = \frac{1}{2}$$

Donc dans ce cas

$$P(X|Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} = P(X) \text{ d'où on déduit que } P(X \cap Y) = P(X)P(Y) = \frac{1}{4}$$

Si on a l'égalité $P(X \cap Y) = P(X)P(Y)$ alors les événements X et Y sont dits indépendants.

Définition 1.4.2. ***Événements indépendants***

Si on a l'égalité $P(X \cap Y) = P(X)P(Y)$ alors les événements X et Y sont dits ***indépendants****.*

1.4.2 Règle de multiplication

Exemple 11. On a distribué 52 cartes à quatre joueurs. Quelle est la probabilité que chacun ait reçu un as ?

Commençons par définir les événements :

A_1={L'as de pique est chez un des joueurs.}

A_2={L'as de pique et l'as de coeur sont chez des joueurs différents.}

A_3={L'as de pique, l'as de coeur et l'as de trèfle sont chez des joueurs différents}.

A_4={L'as de pique, l'as de coeur, l'as de trèfle et l'as de carreau sont chez des joueurs différents}.

$P(A_1)$ vaut nécessairement un. Si l'as de pique est chez un des joueurs alors l'as de coeur est l'une des 39 cartes restantes sur 51. De même si l'as de pique et l'as de coeur sont chez les deux premiers joueurs, l'as de trèfle est forcément l'une des 26 cartes restantes sur 50. Le dernier as, l'as de carreau ne peut être lui que l'une des 13 cartes restantes sur 49. Le résultat est :

$$\frac{52}{52} \cdot \frac{39}{51} \cdot \frac{26}{50} \cdot \frac{13}{49} = \frac{2\,197}{20\,825} \approx 0.1055$$

Mathématiquement, cela se traduit par

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|(A_1 \cap A_2))P(A_4|)$$

Autre méthode de résolution : On enlève les quatre as du jeu et on imagine que les quarante-huit cartes restantes forment un mot avec quatre groupes de douze lettres identiques. Le nombre de manières distinctes de voir le mot dans son ensemble est

$$\binom{48}{12,12,12,12}$$

On peut permuter quatre as de 4 ! manières différentes, il y aura donc $4!\binom{48}{12,12,12,12}$ possibilités distinctes de quatre piles avec chacune un as. Il faut diviser par le nombre total des possibilités et le résultat est :

$$\frac{4!\binom{48}{12,12,12,12}}{\binom{52}{13,13,13,13}} \approx 0.1055.$$

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

Définition 1.4.3. ***Règle de multiplication***

L'égalité

$$\begin{aligned} P(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap ... \cap E_n) &= P(E_1)P(E_2|E_1)P(E_3|(E_1 \cap E_2))... \\ &... \quad P(E_n|(E_1 \cap E_2 \cap E_n \cap ... \cap E_{n-1})) \end{aligned}$$

est appelée ***règle de multiplication****.*

1.4.3 Probabilités totales

Exemple 12. Dans un groupe de personnes qui ne parlent qu'allemand (A), français (F) ou les deux, on a observé que

1. Une personne qui parle français (F), parle allemand (A) avec une probabilité de $\frac{1}{7}$.
2. La probabilité qu'une personne parle français est de $\frac{7}{12}$.

Quelle est la probabilité qu'une personne parle allemand ?
Solution :
Transformons la légende du dessin 1.1 en termes de probabilités, cela donne

$$P(A) = P(A \cap F) + P(A \cap \overline{F}) \quad \overset{\text{prob.cond.}}{\longrightarrow} \quad P(A) = P(A|F)P(F) + P(A|\overline{F})P(\overline{F})$$

On note ce qu'on sait :

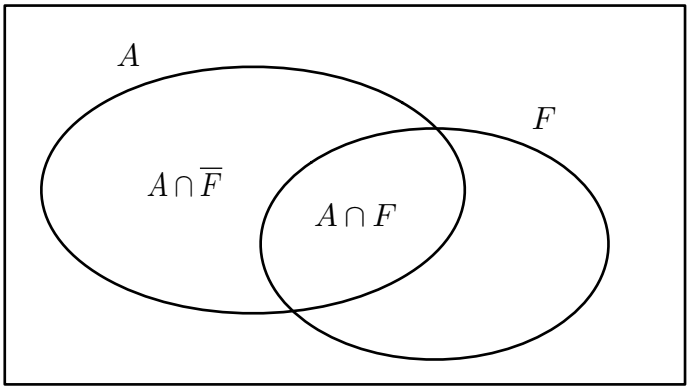

FIGURE 1.1 – $A = (A \cap F) \cup (A \cap \overline{F})$

1. $P(A|F) = \frac{1}{7}$,
2. $P(F) = \frac{7}{12}$.
3. $P(\overline{F}) = 1 - P(F) = \frac{5}{12}$

Reste à déterminer la probabilité de $P(A|\overline{F})$. Chacune des personnes du groupe parle au moins l'allemand ou le français, donc une personne qui ne parle pas français parle allemand avec une probabilité égale à un, donc $P(A|\overline{F}) = 1$. Le calcul de $P(A)$ donne

$$P(A) = P(A|F)P(F) + P(A|\overline{F})P(\overline{F}) = \frac{1}{7} \cdot \frac{7}{12} + 1 \cdot \frac{5}{12} = \frac{1}{2}$$

Remarque 5. *Il est indispensable que chacune des personnes du groupe parle au moins une des deux langues.*

Définition 1.4.4. ***Formule des probabilités totales***

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

En se basant sur le dessin 1.1, on appele la formule suivante

$$P(A) = P(A|F)P(F) + P(A|\overline{F})P(\overline{F})$$

la formule des ***probabilités totales****.*
Elle peut se décrire comme une moyenne des événements conditionnels $P(A|F)$ et $P(A|\overline{F})$ pondérée par la valeur de la probabilité des événements conditionnants F et $\overline{F}$.

1.4.4 Formule de Bayes

Exemple 13. Un filtre pour courriels non désirés (spam) est programmé comme suit :
Le message est parcouru et s' il contient le mot "gratuit" alors le message est mis de côté.
On sait que 80% des messages électroniques circulant sont des spams et que 10% de ceux-ci contiennent le mot "gratuit". Le mot "gratuit" apparaît dans 1% des messages qui ne sont pas des spams. Un message vient d'arriver. S' il contient le mot "gratuit", quelle est la probabilité que ce soit un spam.

Solution :
On note S={le courriel est un spam} et g={le courriel contient le mot gratuit}. Ce que l'on sait ou que l'on peut déduire est :

$P(S) = 0.8$ donc $P(\overline{S}) = 0.2$
$P(g|S) = 0.1$
$P(g|\overline{S}) = 0.01$

On désire connaître la probabilité conditionnelle $P(S|g)$, c'est-à-dire la probabilité qu'un courriel soit un spam s' il contient le mot "gratuit" . On applique la formule des probabilités conditionnelles deux fois, assortie de celle des probabilités totales. Bref, on se la pète !

On cherche $P(S|g)$. On applique la formule des probabilités conditionnelles,

$$P(S|g) = \frac{P(S \cap g)}{P(g)}$$

La valeur $P(S \cap g)$ peut être réécrite en utilisant les probabilités conditionnelles,

$$P(S \cap g) = P(g|S)P(S)$$

En substituant on obtient :

$$P(S|g) = \frac{P(S \cap g)}{P(g)} = \frac{P(g|S)P(S)}{P(g)}$$

On peut à présent conditionner l'événement g en utilisant S comme événement conditionnant.

$$P(g) = P(g|S)P(S) + P(g|\overline{S})P(\overline{S})$$

En mettant tout ensemble on obtient

$$P(S|g) = \frac{P(S \cap g)}{P(g)} = \frac{P(g|S) \cdot P(S)}{P(g|S) \cdot P(S) + P(g|\overline{S}) \cdot P(\overline{S})} = \frac{0.1 \cdot 0.8}{0.1 \cdot 0.8 + 0.01 \cdot 0.2} = 0.9756.$$

Définition 1.4.5. ***Formule de Bayes***

Soit deux événement X et Y. On appelle : ***Formule de Bayes*** *la relation*

$$P(X|Y) = \frac{P(Y|X)P(X)}{P(Y)}$$

on trouve aussi la forme suivante qui fait intervenir la formule des probabilités totales :

$$P(X|Y) = \frac{P(Y|X)P(X)}{P(Y)} = \frac{P(Y|X)P(X)}{P(Y|X)P(X) + P(Y|\overline{X})P(\overline{X})}$$

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

1.4.5 Formule d'inclusion-exclusion

Exemple 14. Dans une classe, $\frac{1}{2}$ élèves parlent allemand (A), $\frac{5}{9}$ parlent français (F), $\frac{11}{18}$ parlent italien (I), $\frac{3}{18}$ parlent allemand et français, $\frac{2}{9}$ parlent allemand et italien, $\frac{7}{18}$ parlent français et italien et finalement $\frac{1}{9}$ parlent les 3 langues. Montrer que $P(A \cup F \cup I)$ vaut un.
Le petit dessin 1.2 va faciliter la compréhension de la formule d'inclusion-exclusion appliquée à cette exemple.

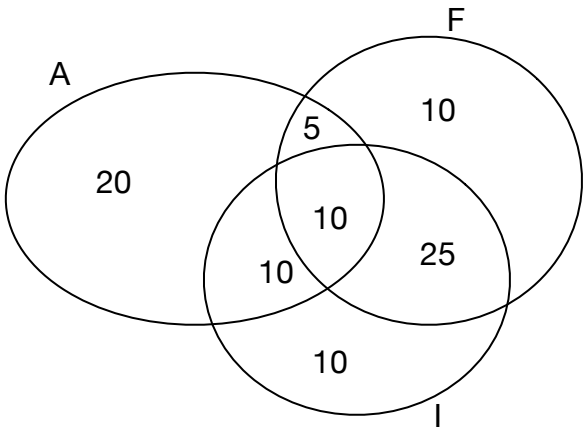

FIGURE 1.2 – Diagramme de Venn de la répartiton des élèves et des langues

On veut montrer que $P(A \cup F \cup I) = 1$. Etudions la formule suivante et appliquons la :

$$\begin{aligned} P(A \cup F \cup I) &= P(A) + P(F) + P(I) - P(A \cap F) - P(A \cap I) - P(F \cap I) + P(A \cap F \cap I) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{5}{9} + \frac{11}{18} - \frac{3}{18} - \frac{2}{9} - \frac{7}{18} + \frac{1}{9} \\ &= 1 \end{aligned}$$

La formule d'inclusion-exclusion est facile à comprendre mais peut être difficile à appliquer.

Définition 1.4.6. ***Formule d'inclusion-exclusion***

*Soit les événements C_1 à C_n, la formule d'**inclusion-exclusion** les reliant est*

$$P(\bigcup_{i}^{n} C_i) = \sum_{i}^{n} P(C_i) - \sum_{i<j}^{n} P(C_i \cap C_j) + \sum_{i<j<k}^{n} P(C_i \cap C_j \cap C_k) - \ldots$$

1.4.6 Loi binomiale

1.4.6.1 Epreuve de Bernouilli

Définition 1.4.7.

*Une **épreuve de Bernouilli** est une expérience qui a deux issues possibles avec les probabilités p et $q = (1 - p)$.*

Définition 1.4.8. ***Loi binomiale***

*La **loi binomiale** donne la probabilité d'obtenir k succès lors de n épreuves de Bernouilli :*

$$B(n, k, p) = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k} = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

1.4.7 Loi hypergéométrique

Exemple 15. Dans une forêt, il y a vingt cerfs. On en capture cinq et on les marque. Après quelque temps, on recapture quatre d'entre-eux. Quelle est la probabilité que deux d'entre les quatre soient marqués. (Aucun des cerfs ne s'est échappé de la forêt ni n'est mort entre le marquage et la capture).

On doit choisir deux cerfs marqués parmi cinq et deux cerfs non marqués parmi quinze, ce qui donne une probabilité de

$$\frac{\binom{5}{2}\binom{15}{2}}{\binom{20}{4}} = \frac{10 \cdot 105}{4845} = 0.2167$$

Définition 1.4.9. ***Loi hypergéométrique***

Soit une population de N individus. m parmi les N individus se distinguent par un caractère particulier commun. La loi donnant la probabilité d'obtenir i individus ayant ce caractère dans un échantillon de n est

$$P(X = i) = \frac{\binom{m}{i}\binom{N-m}{n-i}}{\binom{N}{n}}$$

est appellée ***loi hypergéométrique****.*

1.5 Exercices

1.5.1 EXERCICES d'analyse combinatoire

Ex 1.1. De combien de manières peut-on arranger 3 personnes

a) sur une ligne ?

b) Autour d'une table ronde ?

(seulement la position relative des uns vis-à-vis des autres importe).

Solution

Ex 1.2. La façade d'une maison compte 8 fenêtres, ces fenêtres peuvent être soit ouvertes soit fermées.

a) De combien de manières différentes peut se présenter cette façade ?

b) Même question si on considère que chaque fenêtre a deux battants ?

Solution

Ex 1.3. Le nombre de nucléons dans l'univers visible est estimé à 10^{80}. Combien de cartes différentes devraient contenir un jeu pour que le nombre des permutations possibles dépasse cette valeur ?

Solution

Ex 1.4. On considère un groupe de 20 personnes. Si chaque personne serre la main de toutes les autres, combien y a-t-il de poignées de main ?

Solution

Ex 1.5. Soit le mot "MISSISSIPPI" combien de mots différents obtient-on en permutant les lettres ?

Solution

Ex 1.6. À partir d'un groupe de 8 femmes et de 6 hommes, combien de comités différents composés de 3 femmes et de 3 hommes peut-on former ? Qu'en est-il si 2 des hommes s'entendent mal et refusent de siéger simultanément au comité ?

Solution

Ex 1.7. De combien de manières peut-on asseoir sur une ligne 4 garçons et 3 filles ? Qu'en est-il

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

a) si les garçons doivent rester ensemble et les filles aussi ?

b) Si seuls les garçons doivent rester ensemble ?

c) Si deux personnes du même sexe ne doivent jamais voisiner ?

Solution

Ex 1.8. Pour une partie de bridge, chacun des 4 joueurs reçoit 13 cartes. Le jeu en compte 52. Combien y a-t-il de donnes possibles ?

Solution

Ex 1.9. ** Si 8 tableaux noirs doivent être affectés à 4 écoles, de combien de manières peut-on les répartir ? Qu'en est-il si chaque école doit recevoir au moins un tableau ? Attention ! Les tableaux noirs sont indiscernables.

Solution

Ex 1.10. ** Un ascenseur quitte le rez-de-chaussée avec huit personnes (liftier non compris). Lorsqu'il repart du sixième étage, il est vide.

a) De combien de manières le liftier a-t-il pu percevoir le départ des huit personnes si pour lui elles se ressemblent toutes ?

b) Qu'en est-il s'il peut faire la différence entre un homme et une femme, l'ascenseur contenant cinq hommes et trois femmes au départ ?

c) Que se passe-t-il si pour lui, chaque personne est discernable ?

Solution

Ex 1.11. -

a) De combien de manières peut-on partager 12 personnes en trois groupes, un groupe de 2 et deux groupes de 5 ?

b) Idem que a), mais avec trois groupes de 4 personnes ?

Solution

Ex 1.12. -

1. Combien de nombres **impairs** de six chiffres peut-on former si les répétitions de chiffres sont interdites ?
2. Combien de nombres **pairs** de six chiffres peut-on former si les répétitions de chiffres sont interdites ?

Solution

1.5.2 EXERCICES de probabilités

Ex 1.13. D'un jeu de 52 cartes, on tire simultanément 5 cartes. Quelle est la probabilité de tirer

1. 5 coeurs ?
2. 2 piques et 3 coeurs ?
3. 5 trèfles ou 5 coeurs ?
4. 5 cartes de la même couleur (coeur, pique, carreau ou trèfle) ?
5. 3 cartes d'une couleur et 2 d'une autre ?
6. les 4 as et une autre carte ?
7. 3 as et 2 rois ?
8. aucun as ?
9. au moins un as ?

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

10. au plus un as ?

Solution

Ex 1.14. On tire 10 fois de suite à pile ou face avec une pièce de monnaie équilibrée. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 4 fois faces et 6 piles ?

Solution

Ex 1.15. Dans une assemblée de 400 personnes, 300 comprennent le français, 200 l'allemand, 90 l'anglais. 160 comprennent le français et l'allemand, 60 le français et l'anglais, 20 l'allemand mais ni l'anglais ni le français et 20 comprennent les trois langues. On choisit une personne au hasard, quelle est la probabilité que cette personne comprenne

a) exactement deux des trois langues ;

b) au moins une des trois langues.

Solution

Ex 1.16. Dans une classe, la probabilité qu'un élève choisi au hasard ait une note insuffisante en mathématiques vaut $\frac{1}{5}$. Si on choisit un élève avec une note insuffisante en mathématiques et qu'on choisit un deuxième élève au hasard, alors la probabilité que ce deuxième élève ait une note insuffisante en mathématiques vaut $\frac{1}{6}$.

1. Combien d'élèves sont dans cette classe ?
2. On choisit maintenant un élève au hasard, on note si l'élève a une note suffisante (S) ou insuffisante en physique (I), on répète ceci encore deux fois (3 fois en tout, un élève peut être choisi plusieurs fois). La probabilité d'avoir noté au moins une fois I vaut 0.784. Combien d'élèves ont une note insuffisante en physique ?

Solution

Ex 1.17. Dans une ville, 40% de la population a les cheveux bruns (CB), 25% les yeux marrons (YM) et 15% ces deux caractéristiques simultanément. On y choisit une personne au hasard.

1. Quelle est la probabilité que cette personne n'ait ni les cheveux bruns ni les yeux marrons ?
2. Quelle est la probabilité qu'une personne avec des yeux marrons ait les cheveux bruns ?

Solution

Ex 1.18. On fait expérimentalement les constatations suivantes : - s'il fait beau un jour (B), la probabilité qu'il fasse beau le lendemain est de 0.8. - s'il fait mauvais un jour (M), la probabilité qu'il fasse mauvais le lendemain est de 0.6. Aujourd'hui, il fait beau.

1. Calculer la probabilité qu'il fasse beau pendant encore 3 jours.
2. Calculer la probabilité qu'il fasse beau dans 3 jours.

Solution

Ex 1.19. Un programme pour arrêter de fumer permet effectivement d'arrêter de fumer à 48% des femmes et 37% des hommes. Les personnes suivant ce programme avec succès sont à 60% des femmes.

1. Quelle est la proportion d'hommes parmi les personnes qui débutent le programme.
2. On choisit une personne ayant suivi ce programme au hasard, quelle est la probabilité qu'elle ait arrêter de fumer.

Solution

Ex 1.20. Dans un gymnase, 4% des garçons et 1% des filles mesurent 1.80 m ou plus. 60% des élèves sont des filles.

a) On choisit un élève au hasard. Quelle est la probabilité qu'il mesure 1.80 m ou plus ?

b) On choisit au hasard un élève qui mesure 1.80 m ou plus. Quelle est la probabilité que ce soit une fille ?

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

c) On choisit au hasard 10 garçons. Quelle est la probabilité
   i) qi'ils mesurent tous 1.80 m ou plus ?
   ii) qu'au moins un mesure 1.80 m ou plus ?
   iii) qu'exactement deux mesurent 1.80 m ou plus ?

Solution

Ex 1.21. ** Un sac contient une boule verte ou bleue avec la même probabilité. On rajoute une boule verte dans le sac, on mélange puis on tire une seule boule. Quelle est la probabilité que la boule originale soit verte si la boule tirée est verte également.

Solution

Ex 1.22. **
Dans une ville formée de six quartiers, six vols ont lieu le même jour. Quelle est la probabilité qu'un district ait subi plus d'un vol en considérant que,

a) les six quartiers sont discernables et les 6 voleurs aussi,

b) les quartiers sont discernables, mais pas les voleurs,

c) ni les quartiers ni les voleurs ne sont discernables.

Solution

Ex 1.23. ** Quelle est la probabilité que les anniversaires de sept personnes se répartissent sur chacune des quatre saisons, c'est-à-dire qu'à chaque saison il y ait au moins un anniversaire.

Solution

Ex 1.24. Une petite université a un seul professeur qui donne trente cours par semaine. Tous les cours sont différents et sont donnés du lundi au vendredi à raison de six cours par jour. Juliette, qui prépare son programme pour la nouvelle année scolaire, doit choisir au hasard sept cours parmi les trente. Quelle est la probabilité qu'elle doive se rendre à l'école chaque jour ?

Solution

Ex 1.25. Dans un jeu télévisé, un candidat est devant trois portes fermées. Derrière une des portes, il y a une superbe voiture et derrière les deux autres portes il y a Blanquette et Noirette qui sont deux chèvres. Le candidat doit choisir une porte. Lorsque c'est fait, le présentateur ouvre une des portes non choisies derrière laquelle se trouve une chèvre (le présentateur voit derrière les portes, il ouvre donc à coup sûr, la ou une des deux portes derrière laquelle se trouve une chèvre). Connaissant maintenant une des portes à ne pas ouvrir, le candidat doit-il changer son choix initial ou le maintenir ?

Solution

Ex 1.26. On sort d'un jeu de cartes les quatre as et les quatre rois. On tire deux cartes parmi ces huit cartes. Quelle probabilité a-t-on de tirer,

1. deux as si l'on sait qu'une des deux cartes au moins est un as ?
2. deux as si l'on sait qu'une des deux cartes au moins est un as rouge ?
3. deux as si l'on sait qu'une des deux cartes est l'as de coeur ?

Solution

Ex 1.27. Un professeur de mathématiquess donne à sa classe dix problèmes en expliquant que l'examen final consistera à résoudre cinq de ces dix problèmes choisis au hasard. Si un élève sait résoudre sept des dix problèmes qu'elle est la probabilité qu'il réponde correctement

1. aux cinq problèmes
2. a au moins trois problèmes parmi les cinq.

Solution

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

Ex 1.28. Une classe est composée de 9 filles et 6 garçons. 4 filles et autant de garçons portent une montre. La moitié des garçons mais seulement une fille portent à la fois une montre et des baskets. Un garçon et 3 filles portent ni montre ni baskets.

1. Faire un diagramme de Venn de la situation afin de montrer que la probabilité de choisir au hasard parmi les élèves de cette classe une fille portant des baskets mais pas de montre vaut $\frac{2}{15}$.
2. Si on choisit au hasard une fille de cette classe, quelle est la probabilité qu'elle porte des baskets mais pas de montre ?
3. Dans 10 cours consécutifs de cette classe, on choisit au hasard un élève. Quelle est la probabilité qu'on ait choisi exactement 2 filles portant des baskets mais pas de montre ?
4. Dans combien de cours consécutifs doit on choisir un élève de la classe au hasard pour que la probabilité qu'on ait choisit au moins 1 fille portant des baskets mais pas de montre soit supérieur à 60

Solution

1.6 Solutions des exercices

1.6.1 SOLUTIONS des exercices d'analyse combinatoire

Solution Ex 1.1. →1.1.

a) Les 3 personnes sont discernables et les 3 places aussi. La première personne peut s'asseoir à l'une des 3 places libres, la deuxième à l'une des deux places libres restantes, la troisième n'a pas le choix et doit s'asseoir à la seule place restante, le résultat est

$$3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6.$$

b) On fait exactement le même raisonnement, mais comme ce n'est que la position relative qui importe, on doit diviser par 3. En effet, chacune des 3 personnes peut se déplacer, disons vers la gauche, 3 fois avant d'arriver à la place qu'elle occupait sans pour autant changer de voisins, le résultat est

$$\frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{3} = 2.$$

Solution Ex 1.2. →1.2.

a) Chaque fenêtre peut être dans deux états différents, ouverte ou fermée. Comme il y a 8 fenêtres on aura $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^8 = 256$ façons différentes de voir la facade.

b) Chaque fenêtre peut être dans 4 états différents. Comme il y a toujours 8 fenêtres, la paroi peut se présenter sous $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot = 4^8 = 65536$ manières différentes. On peut aussi voir cette situation comme étant 16 fenêtres, chacune dans 2 états différents donc $2^{16} = 65536$ ($4^8 = 2^{2^8}$).

Solution Ex 1.3. →1.3.
Il suffit de 59 cartes.

$$\begin{aligned} 59! = 59 \cdot 58 \cdot 57 \cdot ..... \cdot 2 \cdot 1 &= 1386831185456898357379390197203894063459028767726874325408212949401600000000000000 \\ &= 1.138 \cdot 10^{80}. \end{aligned}$$

C'est difficile à croire, mais le nombre de permutations de 59 cartes différentes est plus élevé que le nombre de nucléons (protons, neutrons) contenu dans l'univers visible.
La même question pour le nombre de molécules dans une môle de gaz (nombre D'Avogadro) donne 24 cartes.

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

Solution Ex 1.4. →1.4.
Prenons une personne au hasard. Elle peut choisir parmi 19 personnes pour donner la première poignée de main, la première personne à qui elle a donné la main peut à son tour choisir parmi 18 (elle ne va pas redonner la main à la personne l'a déjà salué) et ainsi de suite. Le résultat est

$$19 + 18 + 17 + 16 + ... + 2 + 1 = \frac{19(19-1)}{2} = 190$$

poignées de main.
Il est beaucoup plus facile de raisonner en terme de combinaisons et de calculer le nombre de paires de personnes que l'on peut former dans un groupe de 20.

$$\binom{20}{2} = \frac{20!}{(20-2)! \cdot 2!} = 190$$

Solution Ex 1.5. →1.5.
Si on récrit le mot en "personnalisant" chaque lettre, par exemple en indiçant les lettres semblables

$$M_1\ I_1\ S_1\ S_2\ I_2\ S_3\ S_4\ I_3\ P_1\ P_2\ I_4$$

on obtient un mot de 11 lettres "différentes", avec lequel on peut former 11! mots différents. Par exemple les suites de lettres

$$M_1\ I_4\ S_2\ S_1\ I_2\ S_4\ S_3\ I_3\ P_2\ P_1\ I_1$$
$$M_1\ I_1\ S_1\ S_2\ I_2\ S_3\ S_4\ I_3\ P_1\ P_2\ I_4$$

sont deux mots distincts.
Mais s'il n'a a pas les indices, si on ne s'occupe que des lettres P par exemple, les occurrences

$$P_1\ P_2$$
et
$$P_2\ P_1$$

ne forment qu'un seul mot. En raisonnant de la même manière pour les lettres M,S et I, on voit qu'il faut diviser les 11! possibilités que donnent la permutation de 11 lettres par toutes les permutations "invisibles" des lettres qui se répètent. La solution est

$$\frac{11!}{4! \cdot 4! \cdot 2!} = 34650$$

Remarque 6. *J'aimerais profiter de cet exemple pour attirer votre attention sur le fait qu'un problème de dénombrement peut être résolu en utilisant des formules à priori très différentes qui finalement donnent le même résultat. Dans l'exemple que l'on vient de voir, on a utilisé la méthode des arrangements avec répétitions. Abordons le problème de la manière suivante :*
Soit le mot

$$M\ I\ S\ S\ I\ S\ S\ I\ P\ P\ I$$

De combien de manières puis-je en choisir d'abord quatre lettres, puis quatre encore, puis deux et finalement une. La réponse est

$$\binom{11}{4}\binom{7}{4}\binom{3}{2}\binom{1}{1} = 34650,$$

C'est-à-dire le même résultat ! Qu'est-ce qui me permet de choisir des groupes de lettres identiques ? En fait je ne le fais pas, mais il peut très bien se trouver qu'elles le soient. C'est un calcul de dénombrement, pas de probabilités. Voici la preuve :

$$\begin{aligned}\binom{11}{4}\binom{7}{4}\binom{3}{2}\binom{1}{1} &= \frac{11!}{7! \cdot 4!} \cdot \frac{7!}{3! \cdot 4!} \cdot \frac{3!}{1! \cdot 2!} \cdot \frac{1!}{0! \cdot 1!} \\ &= \frac{11!}{4! \cdot 4! \cdot 2!} \quad \textit{après simplification.}\end{aligned}$$

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

Solution Ex 1.6. →1.6.
Ici, il y a deux ensembles, les hommes et les femmes. On va choisir trois hommes parmi six et trois femmes parmi 8. Le résultat est le produit de deux expériences distinctes car le fait de "choisir un homme" n'influence pas sur le fait de "choisir une femme" (principe fondamental du dénombrement).

$$\underbrace{\frac{6\cdot 5\cdot 4 \text{ (tirage sans remise)}}{3! \text{ (on supprime l'ordre)}}}_{\text{1ère expérience}} \cdot \underbrace{\frac{8\cdot 7\cdot 6 \text{ (tirage sans remise)}}{3! \text{ (on supprime l'ordre)}}}_{\text{2e expérience}} \cdot = \binom{6}{3}\binom{8}{3} = 1120.$$

Si deux hommes ne veulent pas siéger ensemble on peut soit, n'en prendre qu'un des deux à chacun son tour dans le comité soit, aucun des deux. Tenant compte de ce nouveau fait, on a maintenant trois possibilités de choisir les hommes (les possibilités de choisir les femmes ne changent pas).

$$\underbrace{\left[\binom{2}{1}\binom{4}{2} + \binom{2}{0}\binom{4}{3}\right]}_{\text{16 groupes d'hommes possibles}} \cdot \binom{8}{3} = 896.$$

Remarque 7. *Il faut noter que le fait de "compliquer" la situation, c'est-à-dire de mettre plus de contraintes a pour effet de diminuer le nombre de possibilités. A méditer !*

Solution Ex 1.7. →1.7.
Dans un premier temps on oublie la différence fille-garçon pour ne voir que sept personnes discernables que l'on place à sept endroits discernables. Donc il y a $7! = 5040$ possibilités de placements.

a) On a deux groupes discernables (garçons et filles) formés de respectivement 4 et 3 individus discernables. Donc le nombre de manières est $2!\times 4!\times 3! = 288$. (Le 2! vient de la permutation des 2 groupes entre eux.)

b) On peut considérer 4 groupes, un formé des 4 garçons et 3 autres, chacun formé par une seule fille. Il y a 4! façons de permuter les garçons, 1! façon de permuter chaque fille dans son "groupe" et finalement 4! façons possibles de permuter les 4 groupes, donc en tout $4!\times 1!\times 1!\times 1!\times 4! = 4!\times 4! = 576$ manières possibles de les asseoir dans cette configuration.

c) Plaçons d'abord les 4 garçons, chacun séparé par un siège, il y a 4! manières de le faire. Ensuite il y a 3! manières possibles d'asseoir les filles dans les sièges intermédiaires, donc $4!\times 3! = 144$ manières différentes.

Solution Ex 1.8. →1.8.
On a un jeu de cinquante-deux cartes dans les mains et quatre joueurs autour d'une table. On peut éventuellement être tenté de dire que la réponse sera 4^{52} mais dans ce cas un seul joueur pourrait très bien se retrouver avec toutes les cartes. La manière la plus simple est de choisir treize cartes parmi cinquante-deux, puis treize parmi trente-neuf et ainsi de suite. Ce qui donne

$$\binom{52}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13}\binom{13}{13} = 53644737765488792839237440000 \approx 5.36\cdot 10^{28}.$$

Une autre manière deprocéder est d'étaler toutes les cartes et de s'imaginer qu'elles forment un mot de cinquante-deux lettres avec quatre séries de treize lettres identiques. Cela donne

$$\frac{52!}{13!13!13!13!} = 53644737765488792839237440000 \approx 5.36\cdot 10^{28}$$

également. (Voir explications détaillées à l'exercice 1.5).

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

Solution Ex 1.9. →1.9.
On a quatre écoles et huit tableaux noirs à placer, les tableaux noirs sont **indiscernables**, donc la solution ne sera pas 4^8. On peut résoudre ce problème comme suit :
On considère non pas les écoles mais les 3 séparations entre les écoles. Il s'agit alors de trouver le nombre de permutations possibles de la suite de symboles suivante où les "□" sont les tableaux et les "|" les 3 séparations entre les 4 écoles.

$$|||\square\square\square\square\square\square\square\square$$

Par exemple la suite "|□□□□□□|□□|" signifie : "0 tableau" dans la première école, "6 tableaux" dans la seconde école, "2" dans la troisième et aucun dans la dernière. Le calcul est le même que celui fait avec le mot "Mississippi".

$$\frac{11!}{3!8!} = 165$$

On peut également considérer le problème comme étant équivalent à celui de trouver toutes les solutions non-négatives d'une l'équation du type :

$$x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_r = n \quad \text{(par exemple : 0+6+2+0=8)}$$

Une telle équation à $\binom{n+r-1}{r-1}$ solutions. Dans notre cas, $r = 4$ et $n = 8$, donc il y a $\binom{8+4-1}{4-1} = 165$ possibilités.

Dans le cas où au moins un tableau doit être mis dans chacune des écoles on peut considérer l'idée suivante. Considérons la représentation

$$\square|\square|\square|\square|\square|\square|\square|\square$$

qui est le cas avec huit tableaux et huit écoles. Notre problème avec seulement quatre écoles peut être résolu en "choisissant" trois séparations à éliminer parmi sept, ainsi on aura forcément au moins un tableau par école, donc la réponse est

$$\binom{7}{3} = 35.$$

La formule correspondante est $\binom{n-1}{r-1}$ avec $n = 8$ tableaux et $r = 4$ écoles.

Solution Ex 1.10. →1.10.

a) Il s'agit de séparer de toutes les manières possibles huit personnes indiscernables en six groupes (les étages). Le problème est identique au précédent et il se ramène à rechercher toutes les solutions non négatives de l'équation,

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 8$$

dont la formule est $\binom{n+r-1}{r-1}$ avec $n = 8$ et $r = 6$. La réponse est

$$\binom{8+6-1}{6-1} = 1287$$

b) L'ascenseur contient toujours huit personnes, mais cette fois-ci le liftier peut distinguer entre les femmes et les hommes. Il y a cinq hommes et trois femmes. Le liftier peut voir descendre les cinq hommes de $\binom{5+6-1}{6-1} = 252$ manières différentes et les trois femmes de $\binom{3+6-1}{6-1} = 56$ manières possibles. En appliquant le principe fondamental de dénombrement on obtient $252 \times 56 = 14'112$.

c) Si le liftier peut distinguer chaque personne alors le nombre de cas possibles est de $6^8 = 1'679'616$, on retrouve la formule des permutations avec répétitions.

Solution Ex 1.11. →1.11.

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

Remarque 8. *Commençons par une petite parenthèse. Soit 4 personnes a, b, c, d. On aimerait les partager en un groupe de deux personnes et en deux groupes d'une seule personne (l'ordre des groupes n'intervient pas). Par énumération on obtient,*

$$\begin{pmatrix} ab & c & d \\ ac & b & d \\ ad & b & c \\ bc & a & d \\ bd & a & c \\ cd & a & b \end{pmatrix},$$

ce qui donne 6 solutions distinctes.
Partageons à présent ce groupe de quatre personnes en un groupe de trois et un groupe de une personne et raisonnons de la manière suivante. On choisit trois personnes parmi quatre, puis une personne parmi une, cela semble juste et c'est juste ! $\binom{4}{3} \cdot \binom{1}{1} = 4$*, on vérifie :*

$$\begin{pmatrix} abc & d \\ abd & c \\ acd & b \\ bcd & a. \end{pmatrix}$$

Si on reprend cette formule pour les cas d'un groupe de quatre personnes et de deux groupes de'une personne on a $\binom{4}{2} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{1}{1} = 12$*, donc un résultat différent ! Que c'est-il passé ? On a en fait introduit un ordre dans les deux groupes de une personne, ordre qu'il faudra éliminer en posant*

$$\frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{1}{1}}{1! \cdot 2!} = 6.$$

Ce n'est pas forcément intuitif !

a) En tenant compte de ce que l'on vient d'observer, la réponse est

$$\frac{\binom{12}{2}\binom{10}{5}\binom{5}{5}}{1! \cdot 2!} = 8'316$$

possibilités.

b) Cette fois on a trois groupes de même cardinal. On choisit 4 personnes parmi 12 pour le premier groupe, puis 4 parmi 8 pour le deuxième et finalement 4 parmi 4 pour le dernier. Ayant introduit un ordre dans des groupes qui ne sont pas discernables par leur cardinalité, on doit diviser par 3! pour ramener le résultat à sa juste valeur.

$$\frac{\binom{12}{4}\binom{8}{4}\binom{4}{4}}{3!} = \frac{495 \cdot 70 \cdot 1}{6} = \frac{34650}{6} = 5'775$$

Une autre façon de procéder consiste à utiliser la formule des *coefficients multinomiaux* : considérons pour commencer les douze personnes alignées sur un rang, on peut faire ceci de 12! manières différentes. Considérons les quatre premières personnes dans le groupe A, les quatre suivantes dans le groupe B et les quatre dernières dans le groupe C. En se souvenant de l'exercice du mot MISSISSIPPI cela donne

$$\frac{12!}{4!4!4!} = 34'650$$

possibilités. À présent on se rend compte que l'on a bien introduit un ordre entre les lettres A, B et C. Il faut le supprimer donc diviser par $3! = 6$ ce qui donne bien $5'775$ comme auparavant.

Solution Ex 1.12. →1.12.

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

1. Un nombre de six chiffres ne peut pas commencer par zéro sinon il se transforme en un nombre à cinq chiffres. Un nombre est impair lorsqu'il se termine par $1, 3, 5, 7, 9$. Il y a donc 5 possibilités pour le dernier chiffre. Pour le premier chiffre il reste 8 possibilités car on ne peut pas prendre le zéro et finalement le nombre de possibilités est
$$8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 5 = 67\,200$$
2. Un nombre est pair lorsqu'il se termine par $0, 2, 4, 6, 8$. Ici il faut faire attention car le si le zéro est choisi comme dernier chiffre il y aura 9 façons de choisir le premier vu que le zéro est déjà "occupé" ailleurs. On doit scinder le problème en deux :
   (a) Le 0 est le dernier chiffre :
   $$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 1 = 15\,120.$$
   (b) On choisit un des chiffres $2, 4, 6, 8$ comme chiffre des unités :
   $$8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 53\,760.$$
   Il faut faire le somme des deux résultats qui est 68 880.

1.6.2 SOLUTIONS des exercices de probabilités

Solution Ex 1.13. →1.13.
Chaque carte a la même probabilité d'apparaître
$$P(\{\text{n'importe quelle carte}\}) = \frac{1}{52}$$
Le mot "simultanément" est important, il signifie que les 5 cartes sont tirées sans que l'on s'occupe de l'ordre dans lequel elles apparaissent. Le tirage simultané peut être opposé au tirage d'un échantillon ordonné. Dans ce dernier, l'ordre a une importance, on peut faire un parallèle avec les termes "collection" et "famille" de vecteurs. Dans ce problème, on nous demande des probabilités, il faut donc diviser le nombre de cas favorables (qui nous intéressent) par le nombre de cas possibles. Le nombre de cas possibles de tirer 5 cartes parmi 52 est
$$\text{card}(\Omega) = C_5^{52} = \binom{52}{5} = 2\,598\,960.$$

Remarque 9. *La probabilité de tirer les 4 as et le roi de trèfle est la même que celle de tirer le 5 de coeur, le 2 de trèfle, le 7 de carreau, le valet de coeur et l'as de carreau (probabilités uniformes).*

1. Il y a 13 cartes par couleur (coeur, pique, carreau ou trèfle), donc 13 coeurs. On choisit 5 coeurs parmi 13, donc
   $$C_5^{13} = \binom{13}{5} = 1\,287$$
   possibilités. La probabilité est
   $$P(\{5 \text{ coeurs}\}) = \frac{\binom{13}{5}}{\binom{52}{5}} = \frac{\frac{13!}{8!5!}}{\frac{52!}{47!5!}} = \frac{33}{66\,640} \approx 0.00049.$$

   Remarque 10. *** On peut également compliquer le problème ainsi : on aimerait 3 coeurs <u>et</u> 2 coeurs (ce qui est la même chose que 5 coeurs). On choisit 3 coeurs parmi 13 <u>et</u> ensuite 2 coeurs parmi les 10 restants. Cela donne une probabilité de*
   $$P(\{3 \text{ coeurs } \underline{\text{et}} \text{ 2 coeurs}\}) = \frac{\binom{13}{3}\binom{10}{2}}{\binom{52}{5}} = \frac{33}{6664},$$
   c'est-à-dire 10 fois plus qu'avant, pourquoi ?
   <u>Indication :</u> Si on veut 4 coeurs <u>et</u> 1 coeur (ce qui est à nouveau la même chose apparemment) on obtient :
   $$P(\{4 \text{ coeurs } \underline{\text{et}} \text{ 1 coeurs}\}) = \frac{\binom{13}{4}\binom{9}{1}}{\binom{52}{5}} = \frac{33}{13\,328},$$
   ce qui est cette fois 5 fois trop grand !

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

2. On tire à nouveau simultanément 5 cartes, on aimerait que 3 d'entre elles soient des coeurs et 2 des piques. On veut 3 coeurs parmi les 13 que contient le jeu et 2 piques parmi 13 également. La conjonction "et" se traduit par la multiplication :

$$P(\{\text{3 coeurs et 2 piques}\}) = \frac{\binom{13}{3}\binom{13}{2}}{\binom{52}{5}} = \frac{143}{16660} \approx 0.0086.$$

3. On aimerait 5 trèfles ou 5 coeurs. Par rapport au point 1. (5 coeurs) on diminue nos exigences, la probabilité de succès devra être supérieure. La conjonction "ou" se traduit algébriquement par l'addition.

$$P(\{\text{5 coeurs ou 5 trèfles}\}) = \frac{\binom{13}{5} + \binom{13}{5}}{\binom{52}{5}} = \frac{2 \cdot \binom{13}{5}}{\binom{52}{5}} = \frac{33}{33\,320}$$

4. 5 cartes de la même couleur, du point précédent on déduit :

$$\begin{aligned} P(\{\text{5 coeurs ou 5 trèfles ou 5 carreaux ou 5 piques)}\} &= \frac{\binom{13}{5} + \binom{13}{5} + \binom{13}{5} + \binom{13}{5}}{\binom{52}{5}} \\ &= \frac{4 \cdot \binom{13}{5}}{\binom{52}{5}} = \frac{33}{16\,660} \approx 0.0198 \end{aligned}$$

5. On se base sur la réponse du point 2. ci-dessus, qui est $\frac{\binom{13}{3}\binom{13}{2}}{\binom{52}{5}}$. Si l'on avait voulu 3 carreaux et 2 trèfles, la réponse aurait été identique. Il suffit donc de multiplier la probabilité que l'on connait déjà par $\binom{4}{2} = 6$ qui est le nombre de paires de couleurs que l'on peut former avec 4 à disposition. Il y a encore juste un petit détail, on doit encore multiplier par $\binom{2}{1} = 2$ car il faut également choisir parmi les groupes de 3 ou de 2 cartes. Par exemple, les événements "3 coeurs et 2 trèfles" et "3 trèfles et 2 coeurs" satisfont les deux l'énoncé.

$$P(\{\text{3 cartes d'une couleur et 2 d'une autre}\}) = \binom{4}{2}\binom{2}{1} \cdot \frac{\binom{13}{3}\binom{13}{2}}{\binom{52}{5}} = \frac{429}{4165} \approx 0.1030.$$

Ou alors : On commence par choisir 3 cartes dans les 4 couleurs à disposition puis on continue en choisissant 2 cartes parmi une des trois couleurs restantes, on obtient

$$P(\{\text{3 cartes d'une couleur et 2 d'une autre}\}) = \frac{\binom{4}{1}\binom{13}{3}\binom{3}{1}\binom{13}{2}}{\binom{52}{5}} = \frac{429}{4\,165} \approx 0.1030$$

également, mais de manière plus élégante.

Remarque 11. *Réutiliser des résultats déjà obtenus n'est pas forcément une bonne idée !*

6. On choisit les quatres as parmi les quatres à disposition puis une carte parmi les 48 restante :

$$P(\{\text{4 as et une carte}\}) = \frac{\binom{4}{4}\binom{48}{1}}{\binom{52}{5}} = \frac{1 \cdot 48}{\binom{52}{5}} = \frac{1}{54\,145} \approx 0.0000185.$$

7. On choisit 3 as parmi 4 puis 2 rois parmi 4.

$$P(\{\text{3 as et 2 rois}\}) = \frac{\binom{4}{3}\binom{4}{2}}{\binom{52}{5}} = \frac{1}{108\,290} \approx 9.23 \cdot 10^{-6}.$$

8. On choisit 5 cartes qui ne sont pas des as, donc 5 cartes parmi 48.

$$P(\{\text{aucun as}\}) = \frac{\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}} = \frac{35\,673}{54\,145} \approx 0.6588$$

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

9. Au moins un as signifie "exactement un as" ou "exactement deux as" ou "exactement trois as" ou "exactement quatre as". On peut très bien calculer chacune de ces probabilités et les additionner.

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{\binom{4}{i}\binom{48}{4-i}}{\binom{52}{5}}$$

mais c'est un peu long. Il est préférable d'utiliser le fait que toute probabilité $P(A)$ a une probabilité complémentaire $P(\overline{A})$ définie ainsi : $P(\overline{A} = 1 - P(A))$. Ici A est la probabilité "A=au moins un as" et $\overline{A}$ est la probabilité complémentaire "$\overline{A}$=aucun as". Le calcul de $P(\overline{A})$ est facile et nous l'avons fait juste avant. La probabilité recherchée est

$$P(\{\text{au moins un as}\}) = 1 - P(\{\text{aucun as}\}) = 1 - \frac{\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}} = \frac{18\,472}{54\,145} = 0.3411.$$

10. Au plus un as est la somme des événements "aucun as" et "un as" qui est :

$$\begin{aligned} P(\{\text{au plus un as}\}) &= P(\text{aucun as}) + P(\{\text{un as}\}) \\ &= \frac{\binom{48}{5} + \left[\binom{4}{1}\binom{48}{4}\right]}{\binom{52}{5}} \\ &= \frac{51\,888}{54\,145} = 0.9583 \end{aligned}$$

Solution Ex 1.14. →1.14.
Chaque jet à deux issues équiprobables. En utilisant le principe fondamental de dénombrement on obtient 2^{10} possibilités de tirages différents. Il faut à présent calculer la cardinalité des événements qui nous intéressent pour pouvoir la diviser par 2^{10} et ainsi obtenir une probabilité. Le nombre manière de former un mot avec 6 P et 4 F est $\binom{10}{6,4} = \frac{10!}{6!4!}$. La solution est,

$$\frac{\binom{10}{6,4}}{2^{10}} = \frac{\frac{10!}{6!4!}}{2^10} = \frac{105}{5012} \approx 0.2050$$

On peut aussi le voir comme ça :

$$\frac{\binom{10}{6}\binom{4}{4}}{2^{10}} \frac{105}{5012} \approx 0.2050$$

Solution Ex 1.15. →1.15
La solution se trouve par un simple dessin (voir figure 1.3)

a) $20 + 140 + 40 = 200 \Rightarrow P = \frac{200}{400} = \frac{1}{2}$.

b) $20 + 140 + 100 + 20 + 20 + 40 + 10 = 350 \Rightarrow P = \frac{350}{400} = \frac{7}{8}$

Autre approche : La formule d'inclusion-exclusion peut être utilisée pour répondre à la question b), en effet la probabilité de parler au moins une des trois langues se traduit par $P(A \cup F \cup E)$.

$$P(A \cup F \cup E) = P(A) + P(F) + P(E) - P(A \cap F) - P(A \cap E) - P(F \cap E) + P(A \cap F \cap E)$$

Notons ce que l'on connait :

$P(A) = \frac{200}{400} = \frac{1}{2}$
$P(F) = \frac{300}{400} = \frac{3}{4}$
$P(E) = \frac{90}{400} = \frac{9}{40}$

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

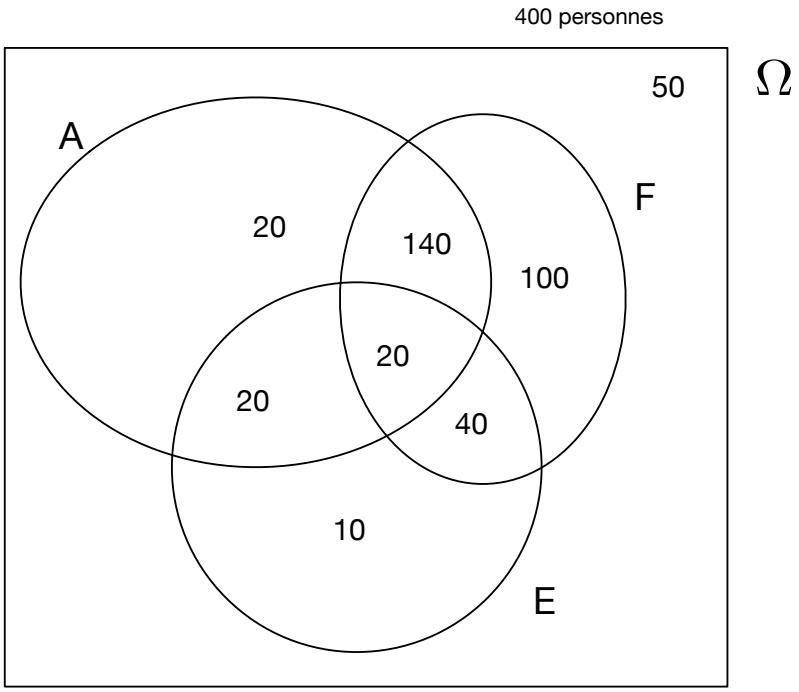

FIGURE 1.3 – Exercice 1.15

$P(A \cap F) = \frac{160}{400} = \frac{2}{5}$
$P(F \cap E) = \frac{60}{400} = \frac{3}{20}$
$P(A \cap E) = ?$
$P(A \cap E \cap F) = \frac{20}{400} = \frac{1}{20}$

Il nous manque $P(A \cap E)$.
Les 20 personnes personne ne parlant que l'allemand correspondent à la probabilité

$$\frac{20}{400} = P(A \cup E \cup F) - P(E \cup F) = P(A \cup E \cup F) - [P(F) + P(E) - P(F \cap E)]$$

On substitue la valeur de $P(A \cup F \cup E)$ dans l'expression ci-dessus et en simplifiant il reste

$$\frac{1}{20} = P(A) - P(A \cap F) - P(A \cap E) + P(A \cap F \cap E)$$

D'où l'on tire $P(A \cap E)$,

$$P(A \cap E) = P(A) - \frac{1}{20} - P(A \cap F) + P(A \cap F \cap E) = \frac{1}{2} - \frac{1}{20} - \frac{2}{5} + \frac{1}{20} = \frac{1}{10}$$

On peut à présent calculer $P(A \cup F \cup E)$:

$$\begin{aligned} P(A \cup F \cup E) &= P(A) + P(F) + P(E) - P(A \cap F) - P(A \cap E) - P(F \cap E) + P(A \cap F \cap E) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{9}{40} - \frac{2}{5} - \frac{1}{10} - \frac{3}{20} + \frac{1}{20} \\ &= \frac{7}{8} \end{aligned}$$

La probabilité qu'une personne parle au moins une des trois langues est $\frac{7}{8}$.

Calcul de a)
On doit calculer,

$$P(A \cap F) + P(A \cap E) + P(F \cap E) - 3 \cdot P(A \cap F \cap E) = \frac{2}{5} + \frac{1}{10} + \frac{3}{20} - 3 \cdot \frac{1}{20} = \frac{1}{2}$$

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

La probabilité qu'une personne parle exactement deux langues est $\frac{1}{2}$.

Solution Ex 1.16. →1.16.

1. On applique le principe même des probabilités qui veut que la probabilité d'un événement est le rapport entre les cas favorables[1] (n) et les cas possibles (N). L'expérience nous dit qu'un élève sur cinq est mauvais en mathématiques et que si on enlève un élément de ce sous-ensemble, la probabilité chute à un élève sur six, on pose le système
$$\begin{cases} \dfrac{n}{N} & = & \dfrac{1}{5} \\ \dfrac{n-1}{N-1} & = & \dfrac{1}{6} \end{cases}$$
et sa résolution donne $N = 25$ et $n = 5$. Il y a 25 élèves dans cette classe.
2. Il s'agit ici d'une nouvelle classe de 25 élèves. On nous dit qu'en moyenne, au moins un élève sur trois est insuffisant en physique c'est-à-dire qu' un ou deux ou trois sont insuffisants. L'événement "au moins un élève insuffisant" est l'événement complémentaire de "tous ont une note suffisante". On pose $P(S) = 1 - P(I)$. En tenant compte de la complémentarité, la traduction mathématique de l'énoncé est,
$$\begin{aligned} 1 - P(S)^3 = 0.784 \quad &\overset{\hookrightarrow}{\longrightarrow} \quad 1 - (1 - P(I))^3 = 0.784 \\ &\overset{\hookrightarrow}{\longrightarrow} \quad (1 - P(I))^3 = 0.216 \\ &\overset{\hookrightarrow}{\longrightarrow} \quad 1 - P(I) = 0.6 \\ &\overset{\hookrightarrow}{\longrightarrow} \quad P(I) = 0.4, \end{aligned}$$
d'où l'on déduit que le nombre d'élèves insuffisants en physique est de $0.4 \times 25 = 10$.

Solution Ex 1.17. →1.17.
Les réponses sautent aux yeux si l'on utilise le diagramme 1.4.

1. $\frac{50}{100} = 0.5$
2. $\frac{15}{25} = 0.6$

Autre méthode :
On sait que

a) $P(CB) = 0.40$
b) $P(YM) = 0.25$
c) $P(CB \cap YM) = 0.15$

1. N'avoir ni les cheveux bruns ni les yeux marrons est l'événement complémentaire d' avoir au moins les cheveux bruns ou les yeux marrons. On calcule cette dernière probabilité à l'aide de la **formule d'inclusion-exclusion**.
$$P(CB \cup YM) = P(CB) + P(YM) - P(CB \cap YM) = 0.40 + 0.25 - 0.15 = 0.50,$$
donc l'événement que l'on cherche est
$$P(\overline{CB} \cap \overline{YM}) = 1 - P(CB \cup YM) = 1 - 0.5 = 0.5$$
La probabilité que cette personne n'ait ni les cheveux bruns ni les yeux marrons est de 0.5.

1. qui nous intéresse

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

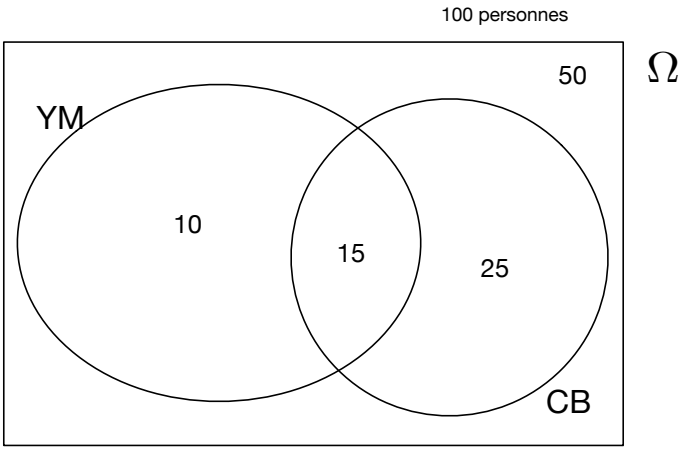

FIGURE 1.4 – Exercice 1.17

2. On demande la probabilité conditionnelle $P(CB|YM)$. On applique la formule des **probabilités conditionnelles** :
$$P(CB|YM) = \frac{P(CB \cap YM)}{P(YM)} = \frac{0.15}{0.25} = \frac{3}{5} = 0.6.$$
La probabilité qu'une personne ait les cheveux bruns si l'on sait déjà qu'elle a déjà les yeux marrons est de 0.6.

Solution Ex 1.18. →1.18.
Le plus simple est de résoudre en faisant un arbre de toutes les possibilités, comme celui de la figure 1.5. on tire rapidement que la probabilité qu'il fasse beau trois jours de suite est $0.8^3 = 0.512$ et que la probabilité qu'il fasse beau le troisième jour est la somme des probabilités des cas favorables divisés par la somme des probabilités, $\frac{0.512+0.064+0.064+0.048}{1} = 0.688$.

Autre méthode :
On indice les jours et on note ce que l'on sait :
$P(B_{n+1}|B_n) = 0.8 \quad n \in [0,1,2]$
$P(M_{n+1}|B_n) = 0.2 \quad n \in [0,1,2]$
$P(M_{n+1}|M_n) = 0.6 \quad n \in [0,1,2]$
$P(B_{n+1}|M_n) = 0.4 \quad n \in [0,1,2]$
Avec comme valeurs initiales :
$P(B_1|B_0) = P(B_1) = 0.8$ et $P(M_1|B_0) = 0.2$.
On remarque que la règle de détermination du temps au jour $(n+1)$ ne dépend que du temps qu'il faisait le jour (n) mais en aucun cas du temps qu'il faisait les jours $(n-1), (n-2), ...(1)$. Cela est une indication précieuse, car comme on utilise la règle des multiplications, les expressions peuvent devenir très longues et compliquées.

1. Dans la première question, on nous demande de calculer $P(B_1 \cap B_2 \cap B_3)$ que l'on peut réécrire
$$P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = P(B_1)P(B_2|B_1)P(B_3|(B_1 \cap B_2))$$
En appliquant le fait que le temps ne dépend que du jour précédent, on a :
$$P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = P(B_1)P(B_2|B_1)\underbrace{P(B_3|(B_1 \cap B_2))}_{P(B_3|B_2)}$$

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

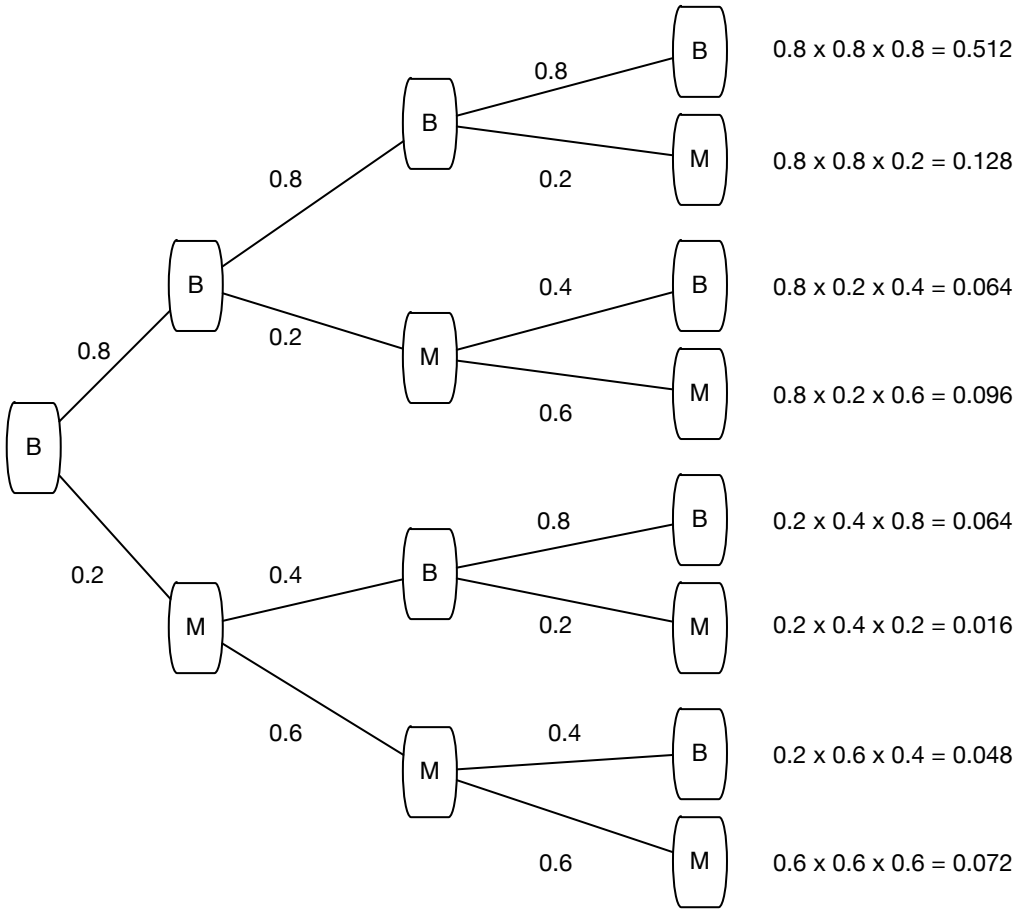

FIGURE 1.5 – Exercice 1.18

En appliquant les valeurs définies ci-dessus on a

$$\begin{aligned} P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) &= P(B_1)P(B_2|B_1)P(B_3|(B_1 \cap B_2)) \\ &= P(B_1)P(B_2|B_1)P(B_3|B_2) \\ &= 0.8 \cdot 0.8 \cdot 0.8 = 0.512 \end{aligned}$$

La probabilité qu'il fasse beau trois jours de suite est 0.512.

2. La probabilité qu'il fasse beau dans 3 jours (uniquement le troisième jour suffit) est la somme des probabilités :

$$P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) + P(B_1 \cap M_2 \cap B_3) + P(M_1 \cap B_2 \cap B_3) + P(M_1 \cap M_2 \cap B_3)$$

$$\begin{aligned} P(B_1 \cap M_2 \cap B_3) &= P(B_1)P(M_2|B_1)P(B_3|(M_2 \cap B_1)) \\ &= P(B_1)P(M_2|B_1)P(B_3|M_2) = 0.8 \cdot 0.2 \cdot 0.4 \\ &= 0.064 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(M_1 \cap B_2 \cap B_3) &= P(M_1)P(B_2|M_1)P(B_3|(M_1 \cap B_2)) \\ &= P(M_1)P(B_2|M_1)P(B_3|B_2) = 0.2 \cdot 0.4 \cdot 0.8 \\ &= 0.064 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(M_1 \cap M_2 \cap B_3) &= P(M_1)P(M_2|M_1)P(B_3|(M_2 \cap M_1)) \\ &= P(M_1)P(M_2|M_1)P(B_3|M_2) = 0.2 \cdot 0.6 \cdot 0.4 \\ &= 0.048 \end{aligned}$$

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

La somme des quatres séries d'événements donne $0.512+0.064+0.064+0.048 = 0.688$. Ce qui est le résultat recherché.

Solution Ex 1.19. →1.19.
La figure 1.6 nous donne la réponse instantanément.

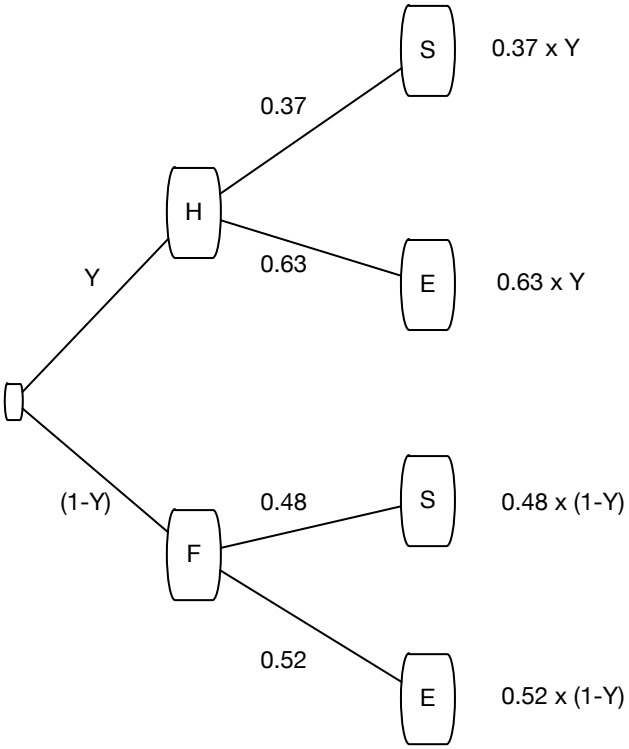

FIGURE 1.6 – Exercice 1.19

$$\frac{0.48(1-Y)}{0.48(1-Y)+0.37Y} = 0.6$$

On en déduit que $Y = 0.4637$. La proportion d'hommes ayant débuté le programme est 0.4637.

Autre méthode :
Posons,

Y ={probabilité d'être un homme},
$\overline{Y}$ ={probabilité d'être une femme},
S={succès},
$\overline{S}$={échec}.

On sait que

$P(S|\overline{Y}) = 0.48 \Rightarrow P(\overline{S}|\overline{Y}) = 0.52$
$P(S|Y) = 0.37 \Rightarrow P(\overline{S}|Y) = 0.63$
$P(\overline{Y}|S) = 0.6 \Rightarrow P(Y|S) = 0.4$

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

On demande quelle proportion d'hommes à débuter le programme c'est-à-dire la valeur $P(Y)$. On utilise la **formule de Bayes**, on commence par poser la formule des probabilités conditionnelles pour $P(\overline{Y}|S)$.

$$P(\overline{Y}|S) = \frac{P(\overline{Y} \cap S)}{P(S)}$$

On voit que la probabilité $P(S)$ est inconnue, mais qu'on peut la conditionner selon Y.

$$P(S) = P(S|Y)P(Y) + P(S|\overline{Y})P(\overline{Y})$$

On regroupe

$$P(\overline{Y}|S) = \frac{P(\overline{Y} \cap S)}{P(S|Y)P(Y) + P(S|\overline{Y})P(\overline{Y})}$$

Il reste à traiter la quantité inconnue $P(\overline{Y} \cap S)$. A l'aide des probabilités conditionnelles, on peut la transformer,

$$P(\overline{Y} \cap S) = P(S|\overline{Y})P(\overline{Y})$$

Finalement :

$$P(\overline{Y}|S) = \frac{P(S|\overline{Y})P(\overline{Y})}{P(S|Y)P(Y) + P(S|\overline{Y})P(\overline{Y})}$$

Que l'on peut réécrire en tenant compte que $P(\overline{Y}) = 1 - P(Y)$ comme

$$P(\overline{Y}|S) = \frac{P(S|\overline{Y})(1 - P(Y))}{P(S|Y)P(Y) + P(S|\overline{Y})(1 - P(Y))}$$

On substitue les valeurs connue

$$0.6 = \frac{0.48(1 - P(Y))}{0.37P(Y) + 0.48(1 - P(Y))}$$

D'où l'on calcule $P(Y) = 0.4637$. On peut maintenant calculer la probabilité $P(S)$ qui est demandéé :

$$\begin{aligned} P(S) &= P(S|Y)P(Y) + P(S|\overline{Y})(1 - P(Y)) \\ &= 0.48(1 - 0.4637) + 0.37 \cdot 0.4637 \\ &= 0.4289 \end{aligned}$$

La probabilité qu'une personne prise au hasard ait pu arrêter de fumer est de 0.4637.

Solution Ex 1.20. →1.20.
On note,

gr={l'élève mesure 1.80m ou plus}
G={l'élève est un garçon}
F={l'élève est une fille}

On sait que,

$P(gr|G) = 0.04 \Rightarrow P(\overline{gr}|G) = 0.96$
$P(gr|F) = 0.01 \Rightarrow P(\overline{gr}|F) = 0.99$
$P(F) = 0.6 \Rightarrow P(G) = 0.4$

a) On utilise la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned} P(gr) &= P(gr|G)P(G) + P(gr|\overline{G})P(\overline{G}) \\ &= P(gr|G)P(G) + P(gr|F)P(F) \\ &= 0.04 \cdot 0.4 + 0.01 \cdot 0.6 = 0.022 \end{aligned}$$

La probabilité qu'un élève mesure 1.80 m ou plus est de 0.022.

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

b) On nous demande $P(F|gr)$, on utilise la formule de Bayes

$$\begin{aligned} P(F|gr) &= = \frac{P(F \cap gr)}{P(gr)} \\ &= \frac{P(gr|F)P(F)}{P(gr)} \\ &= \frac{0.01 \cdot 0.6}{0.022} \\ &\approx = 0.2728 \end{aligned}$$

c) La probabilité qu'un garçon mesure 1.80 m ou plus est de $P(gr|G) = p = 0.04$

i) On peut appliquer une loi binomiale $B(n, k, p)$ de paramètres $B(10, 10, 0.04)$.

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} p^k \cdot (1 - p^{n-k}) &= \binom{10}{10} 0.04^{10}(1 - 0.04)^0 \\ &= 1.048 \cdot 10^{-14}. \end{aligned}$$

La probabilité que tous mesurent 1.8 m ou plus est 0.00000000000001048 !

ii) "Au moins un mesure 1.8m ou plus" est l'événement complémentaire de "aucun ne mesure 1.8 m ou plus". CE qui se traduit par $[1 - B(10, 0, 0.04)]$.

$$\begin{aligned} [1 - B(10, 0, 0.04)] &= 1 - \left[\binom{10}{0} 0.04^0 \cdot (1 - 0.04)^{10}\right] \\ &= 1 - 0.96^{10} = 0.3351 \end{aligned}$$

La probabilité que parmi dix garçons au moins un mesure 1.80 m ou plus est 0.3351.

iii) On applique une loi binomiale de paramètres $B(10, 2, 0.04)$

$$B(10, 2, 0.04) = \binom{10}{2} 0.04^2 \cdot (1 - 0.04)^8 = 0.0519$$

La probabilité que parmi dix garçons deux exactement mesure 1.8m ou plus est 0.0519.

Solution Ex 1.21. →1.21.

On va résoudre ce problème de deux manières, à l'aide d'un arbre puis à l'aide des formules de la théorie des probabilités et du dénombrement.

1. Arbre :
   On nous demande la probabilité que la boule originale soit verte si on tire une verte. On voit très vite que cette probabilité est $\frac{\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3}$.
2. Formules :
   Posons :
   $P(pV)$, la probabilité que la première boule soit verte,
   $P(tV)$, la probabilité que la boule tirée soit verte et
   $P(rV)$ la probabilité que la boule restante soit verte.
   On cherche la probabilité que la boule restante soit verte sachant que la boule tirée l'est également c'est-à-dire $P(rV|tV)$.
   On conditionne par rapport à l'événement $P(pV|tV)$ ("la première boule est verte sachant que la boule tirée est verte").

$$\begin{aligned} P(rV|tV) &= \underbrace{P(rV|tV \cap pV)}_{\text{événement certain}=1} \cdot P(pV|tV) + \underbrace{P(rV|tV \cap (1 - pV))}_{\text{événement impossible}=0} \cdot P((1 - pV)|tV) \\ &= P(pV|tV) \end{aligned}$$

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

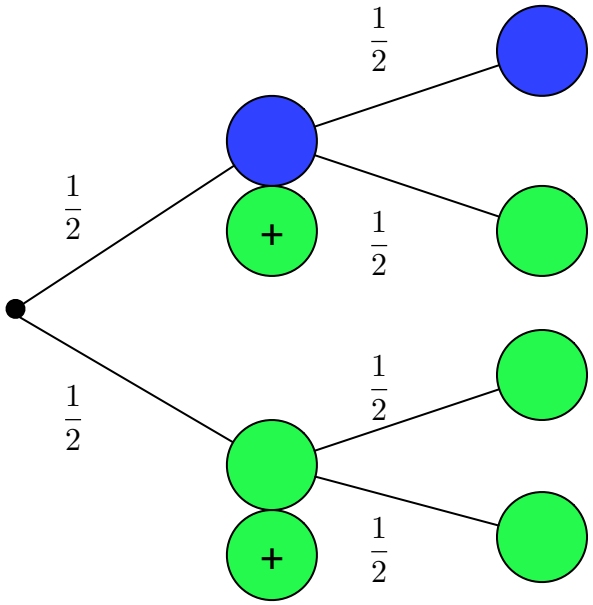

FIGURE 1.7 – Exercice 1.21. Arbre qui a les boules!!!

On voit que les probabilités des événements $P(rV|tV)$ et $P(pV|tV)$ sont les mêmes, ce qui n'est pas forcément évident.
On utilise la formule des probabilités conditionnelles sur l'événement $P(pV|tV)$,

$$\begin{aligned} P(pV|tV) &= \frac{P(pV \cap tV)}{P(tV)} \\ &= \frac{P(tV|pV) \cdot P(pV)}{P(tV)} \\ &= \frac{1 \cdot \frac{1}{2}}{P(tV)}. \end{aligned}$$

Il reste à conditionner $P(tV)$ par rapport à l'événement "la première boule est verte" :

$$P(tV) = P(tV|pV) \cdot P(pV) + P(tV|(1-pV)) \cdot P(1-pV) = 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

Donc le résultat final est :

$$\begin{aligned} P(rV|tV) &= P(pV|tV) \\ &= \frac{1 \cdot \frac{1}{2}}{P(tV)} \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

comme trouvé précédemment. Dans une première lecture on peut remplacer $P(1-pV)$ par $P(pB)$, on comprend mieux la logique, mais moins bien les mathématiques du conditionnement.

Solution Ex 1.22. →1.22. Subir plus d'un vol est l'événement complémentaire d'exactement un vol par quartier étant donné qu'il y a six voleurs et six quartiers.

a) Chaque voleur peut choisir son quartier donc il y a 6^6 possibilités différentes. Exactement un vol par quartier est le nombre de permutations des six voleurs (un par quartier) c'est-à-dire 6!. Le résultat est

$$1 - \frac{6!}{6^6} = 1 - \frac{720}{46'656} = 0.9845$$

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

b) dans ce cas, il n'y a qu'une seule possibilité d'avoir un vol dans chaque quartier, car les voleurs ont tous un "masque". Le nombre de cas possibles se calcule de la manière suivante (il faut bien comprendre que si les voleurs ne sont pas discernables un vol commis dans un quartier spécifique par n'importe lequel d'entre eux ne sera comptabilisé qu'une fois). Considérons les districts comme étant six récipients avec 5 séparations que l'on désignera par le symbole "|", chacun des six vols est représenté par la lettre "v".
Voilà deux événements possibles avec leurs significations.

$|||vvv|vvv| =$
{ 0 vol dans les quartiers 1, 2, 3 et 6, 3 vols dans le quartier 4 et 3 vols dans 5}

$vv|v|||vv|v =$
{ 0 vol dans les quartiers 3 et 4, un vol dans les quartiers 2 et 6, 2 vols dans 1 et 5}.

Le nombre d'événements différents se calcule en estimant le nombre de combinaisons possibles de cinq éléments (les séparations "|") parmi 11 (les séparations "|" plus les vols "v"). Ce qui donne

$$\binom{11}{5} = 462.$$

(On peut penser également au mot "mississippi", mais avec uniquement des "|" et des "v".) La probabilité recherchée est $1 - \frac{1}{462} = 0.9978$.
Si l'on pose $n = 6$ pour le nombre de vols et $r = 6$ pour le nombre de quartiers, on obtient la formule $\binom{n+r-1}{r-1}$ pour le nombre d'événements possibles (combinaisons avec répétitions).

c) Lorsque ni les quartiers ni les voleurs ne sont discernables, le cardinal de l'ensemble des événements possibles est simplement le nombre de possibilités qui existent de partager le chiffre 6, c'est-à-dire 12.

$$\{6\},\{5,1\},\{4,2\},\{4,1,1\},\{3,3\},\{3,2,1\},$$
$$\{3,1,1,1\},\{2,4\},\{2,2,2\},\{2,2,1,1\},\{2,1,1,1,1\},$$
$$\{1,1,1,1,1,1\}.$$

La probabilité recherchée est $1 - \frac{1}{12} = 0.9167$.

Solution Ex 1.23. →1.23.
Un anniversaire au moins à chaque saison est l'événement complémentaire de au moins une saison sans anniversaire.
Notation : $P(\overline{A}_3)$ signifie "il n' y a pas d'anniversaire en automne". $P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_4)$ signifie "il n' y a pas d'anniversaire au printemps, ni en hiver".
On utilise la formule d'inclusion-exclusion.

$$\begin{aligned} P(\overline{A}_1 \cup \overline{A}_2 \cup \overline{A}_3 \cup \overline{A}_4) &= \sum_{i=1}^{4} P(\overline{A}_i) \\ &- \sum_{i=1}^{4}\sum_{j>i} P(\overline{A}_i \cap \overline{A}_j) \\ &+ \sum_{i=1}^{4}\sum_{j>i}\sum_{k>j>i} P(\overline{A}_i \cap \overline{A}_j \cap \overline{A}_k) \\ &- \sum_{i=1}^{4}\sum_{j>i}\sum_{k>j>i}\sum_{k>j>i>l} P(\overline{A}_i \cap \overline{A}_j \cap \overline{A}_k \cap \overline{A}_l) \end{aligned} \tag{1.6}$$

$P(\overline{A}_1 \cup \overline{A}_2 \cup \overline{A}_3 \cup \overline{A}_4)$ signifie "pas d'anniversaire au printemps ou pas d'anniversaire en été ou pas d'anniversaire en automne ou pas d'anniversaire en hiver".

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

1. Calcul de $\sum_{i=1}^{4} P(\overline{A}_i)$:

   Pour n'avoir aucun anniversaire en i, il faut que chacune des personnes choisisse une des trois saisons restantes, comme il y a quatre saisons,

$$\sum_{i=1}^{4} P(\overline{A}_i) = \binom{4}{1}\left(\frac{3}{4}\right)^7\left(\frac{1}{4}\right)^0 = 4\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^7$$

2. Calcul de $\sum_{i=1}^{4}\sum_{j>i} P(\overline{A}_i \cap \overline{A}_j)$:

   On peut choisir deux saisons parmi quatre de $\binom{4}{2} = 6$ manières différentes. Pour que deux saisons ne comportent aucun anniversaire, il faut que chaque personne choisisse une des deux restante,

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j>i} P(\overline{A}_i \cap \overline{A}_j) = \binom{4}{2}\left(\frac{2}{4}\right)^7\left(\frac{2}{4}\right)^0 = 6\cdot\left(\frac{2}{4}\right)^7.$$

3. Calcul de $\sum_{i=1}^{4}\sum_{j>i}\sum_{k>j>i} P(\overline{A}_i \cap \overline{A}_j \cap \overline{A}_k)$:

   Même raisonnement,

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j>i}\sum_{k>j>i} P(\overline{A}_i \cap \overline{A}_j \cap \overline{A}_k) = \binom{4}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^7\left(\frac{3}{4}\right)^0 = 4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^7.$$

4. Le dernier terme est nul, car il y a forcément au moins une saison sur laquelle tombe un anniversaire.

La probabilité complémentaire qui nous intéresse est :

$$1 - P(\overline{A}_1 \cup \overline{A}_2 \cup \overline{A}_3 \cup \overline{A}_4)$$

et vaut :

$$1 - \left[4\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^7 - 6\cdot\left(\frac{2}{4}\right)^7 + 4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^7 - 0\right] = 0.5126$$

Solution Ex 1.24. →1.24. Juliette peut être occupée chaque jour de deux manières différentes :

1. Trois jours à un cours et deux jours à deux cours
2. ou un jour avec trois cours et quatre jours à un cours.

Dans le premier cas, elle choisit trois jours parmi cinq et pour chacun des jours elle choisit un cours, puis elle choisit deux jours parmi six et pour chaque jour elle choisit deux cours parmi six.
Cela donne

$$\binom{5}{3}\binom{6}{1}^3\cdot\binom{2}{2}\binom{6}{2}^2 = 486'000 \text{ possibilités.} \tag{1.7}$$

Dans le deuxième cas,

$$\binom{5}{1}\binom{6}{3}\cdot\binom{4}{4}\binom{6}{1}^4 = 129'600 \text{ possibilités.} \tag{1.8}$$

Le nombre total de combinaisons de sept cours parmi trente est $\binom{30}{7} = 2'035'800$.
La probabilité cherchée est la somme de 1.7 et 1.8. divisée par le nombre de cas total, c'est-à-dire :

$$\frac{486'000 + 129'600}{2'035'800} = \frac{114}{377} = 0.3024.$$

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

Autre approche possible : On peut également utiliser la formule d'inclusion-exclusion en remarquant que *se rendre à l'école chaque jour* est l'événement complémentaire de *avoir au moins un jour de la semaine sans cours*. Notons $\overline{C}_i$ l'événement *ne pas avoir de cours le i-ème jour*. On cherche donc

$$1 - P(\bigcup_i \overline{C}_i) \text{ avec } i = 1..5.$$

On notera que Juliette doit se rendre à l'école au moins deux jours par semaine et que de ce fait les termes avec plus de quatre intersections peuvent être omis (elle ne peut pas ne pas se rendre à l'école plus de 3 jours étant donné qu'elle doit prendre sept cours et que chaque jour n'en compte que six). La formule est :

$$P(\bigcup_i \overline{C}_i) = \sum_i P(\overline{C}_i) - \sum_{i<j} P(\overline{C}_i \cap \overline{C}_j) + \sum_{i<j<k} P(\overline{C}_i \cap \overline{C}_j \cap \overline{C}_k)$$

1. Calcul de $\sum_i P(\overline{C}_i)$
   Afin de trouver la probabilité que Juliette n' aille pas au cours, disons le mardi, on enlève les six cours du mardi et on lui fait choisir les sept qu'elle doit prendre parmi les vingt-quatre restants. On répète pour chacun des autres jours et on obtient :
   $$\sum_i P(\overline{C}_i) = 5 \cdot \frac{\binom{24}{7}}{\binom{30}{7}} = 0.8500$$
2. Calcul de $\sum_{i<j} P(\overline{C}_i \cap \overline{C}_j)$
   On enlève les douze cours de $\binom{5}{2} = 10$ paires de jours de la semaine et on fait choisir à Juliette parmi les dix-huit restants :
   $$\sum_{i<j} P(\overline{C}_i \cap \overline{C}_j) = \binom{5}{2} \cdot \frac{\binom{18}{7}}{\binom{30}{7}} = 0.1563.$$
3. Calcul de $\sum_{i<j<k} P(\overline{C}_i \cap \overline{C}_j \cap \overline{C}_k)$
   C'est le même raisonnement que précédemment,
   $$\sum_{i<j<k} P(\overline{C}_i \cap \overline{C}_j \cap \overline{C}_k) = \binom{5}{3} \cdot \frac{\binom{12}{7}}{\binom{30}{7}} = 0.0039.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer par les valeurs numériques pour obtenir finalement :

$$1 - P(\bigcup_i \overline{C}_i) = 1 - (0.85 - 0.1563 + 0.0039) = 0.3024.$$

Solution Ex 1.25. →1.25.
Il est facile de suivre l'évolution possible du jeu avec le diagramme de la figure 1.8. Les manches de jeu jouées sont indépendantes l'une de l'autre, on peut donc choisir l'une d'elle et observer ce qui se passe.
Dans un premier temps, le candidat choisit au hasard l'une des trois portes, il y a donc une équiprobabilité de $\frac{1}{3}$ pour chacun des choix. Le présentateur doit maintenant ouvrir une porte derrière laquelle il y a une chèvre. Si le candidat a choisi la porte avec la voiture le présentateur doit ouvrir la porte sur Blanquette ($p = \frac{1}{2}$) ou sur Noirette ($\overline{p} = \frac{1}{2}$). Si le candidat a choisi Noirette le présentateur ne peut qu'ouvrir la porte où il y a Blanquette et vice-versa si le candidat a choisit la porte de Blanquette. Le candidat peut à présent décider de changer ou de rester sur son choix initial. S' il garde le choix initial les chances de gagner sont de :

$$\frac{\frac{1}{12} + \frac{1}{12}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6}} = \frac{\frac{1}{6}}{1} = \frac{1}{6}.$$

S' il décide de changer, les chances de gagner sont :

$$\frac{\frac{1}{6} + \frac{1}{6}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6}} = \frac{\frac{2}{6}}{1} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Le candidat a donc intérêt à changer de porte.

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

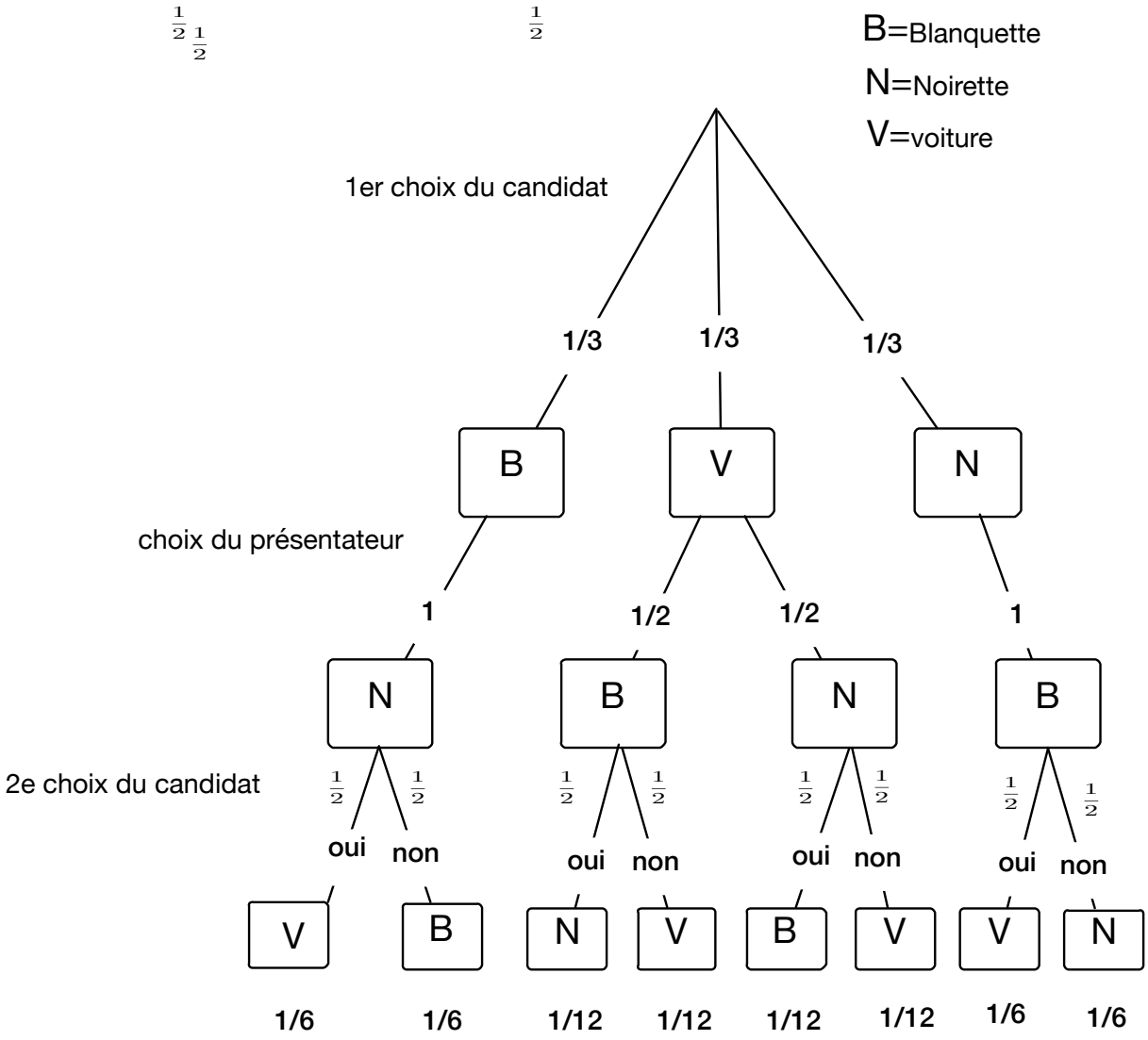

FIGURE 1.8 – Exercice 1.25. Paradoxe de Monty Hall

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

Solution Ex 1.26. →1.26.

Remarque 12. *Il faut bien garder à l'esprit que l'on effectue un* ***seul et unique*** *tirage de deux cartes. C'est à cet unique tirage que la probabilité des événements demandés se rapportent.*

1. Notons
   (a) $A = \{\text{deux as}\}$
   (b) $B = \{\text{une des deux cartes au moins est un as}\}$
   (c) $C = \{\text{aucune carte n'est un as}\}$

   On cherche
   $$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$
   "Au moins un as" est l'événement complémentaire de "pas d'as du tout". Le nombre de possibilités de n'avoir aucun as est de choisir deux cartes parmi les quatre rois.
   $$P(B) = 1 - P(C) = 1 - \frac{\binom{4}{2}}{\binom{8}{2}} = 1 - \frac{6}{28} = \frac{22}{28} = \frac{11}{14}$$
   La probabilité d'avoir "au moins un as" peut également être obtenue en choisissant "un as parmi quatre et un roi parmi quatre" ou "deux as parmi quatre".
   $$P(B) = \frac{\binom{4}{1}\binom{4}{1} + \binom{4}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{22}{28} = \frac{11}{14}$$
   Le plus sûr moyen de ne pas se tromper pour trouver la probabilité $P(A \cap B)$ est d'utiliser la formule des probabilités conditionnelles
   $$P(A \cap B) = P(B|A)P(A)$$
   et d'appliquer la formule de Bayes,
   $$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$
   La probabilité conditionnelle $P(B|A) = P(\{\text{une des deux cartes au moins est un as si l'on a tiré deux as}\})$ est clairement l'événement certain et vaut un. La probabilité d'avoir deux as ($P(A)$) est $\frac{\binom{4}{2}}{\binom{8}{2}}$ donc,
   $$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \frac{1 \cdot \frac{\binom{4}{2}}{\binom{8}{2}}}{1 - \frac{6}{28}} = \frac{\frac{6}{28}}{\frac{22}{28}} = \frac{6}{22} = 0.2727.$$

2. Notons
   (a) $A = \{\text{deux as}\}$
   (b) $B = \{\text{une des deux cartes au moins est un as rouge}\}$
   (c) $C = \{\text{aucune carte n'est un as}\}$

   On cherche
   $$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$
   La probabilité $P(B)$ est le rapport entre le nombre de possibilités de tirer "au moins un as rouge" et le nombre de possibilités de tirer deux cartes parmi huit. Dans ce cas, passer par l'événement complémentaire ne simplifie pas beaucoup le calcul. "Au moins un as rouge" c'est :
   (choisir un as rouge et un as noir) ou (choisir un as rouge et un roi) ou (choisir deux as rouge).
   $$P(B) = \frac{\binom{2}{1}\binom{2}{1} + \binom{2}{1}\binom{4}{1} + \binom{2}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{4+8+1}{28} = \frac{13}{28}.$$

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

L'estimation de la probabilité de l'événement $P(A \cap B) = P(\{\text{avoir deux as et au moins un as rouge}\})$ peut éventuellement donner la migraine (surtout dans le cas de problèmes plus compliqués). Par contre l'estimation de $P(B|A)P(A)$ est étonnamment beaucoup plus simple. $P(B|A)$ est la probabilité de l'événement "une des deux cartes au moins est un as rouge si les deux cartes sont des as" vaut

$$P(B|A) = \frac{\binom{2}{1}\binom{2}{1} + \binom{2}{2}}{\binom{4}{2}} = \frac{5}{6}$$

$P(B|A)$ est également l'événement complémentaire "les deux as sont noirs si les deux cartes sont des as" qui vaut $1 - \frac{\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$. Finalement, connaissant déjà $P(A) = \frac{6}{28}$ et $P(B) = \frac{11}{14}$ le résultat recherché est

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{5}{6}\frac{6}{28}}{\frac{13}{28}} = \frac{5}{13} = 0.3846$$

3. On peut également résoudre de manière intuitive ce genre de problème. Dans cette partie 3 de l'exercice, on aimerait connaître la probabilité de l'événement "avoir deux as si l'on sait qu'une des deux cartes est l'as de coeur". Le nombre de possibilités d'avoir deux cartes dont l'une est l'as de coeur est de prendre l'as de coeur et l'une des sept autres cartes c.-à-d. sept possibilités. Le nombre de possibilités d'avoir deux as parmi ces sept possibilités est d'avoir l'as de coeur et l'un des trois autres as donc trois. Le rapport des deux est $\frac{3}{7} = 0.4286$.

Solution Ex 1.27. →1.27.

1. Le nombre de possibilités de choisir 5 problèmes parmi 10 est $\binom{10}{5}$. Le nombre de possibilités, pour l'élève, de tomber sur 5 des 7 problèmes que sait résoudre est $\binom{7}{5}$. Le rapport des deux est la probabilité recherchée (nombre de cas favorables divisé par nombre de cas possibles),

$$\frac{\binom{7}{5}}{\binom{10}{5}} = \frac{21}{252} = 0.0833.$$

Le problème est une application de la loi hypergéométrique (1.4.7) avec
$N = 10$,
$m = 7$,
$n = 5$ et
$i = 5$.
Le calcul effectué consiste à choisir cinq problèmes parmi sept que l'on connait et zéro problème parmi les trois que l'on ne connait pas. Ce qui donne

$$\frac{\binom{7}{5}\binom{3}{0}}{\binom{10}{5}} = \frac{\binom{7}{5}}{\binom{10}{5}} = \frac{21}{252} = 0.0833.$$

2. Au moins trois problèmes signifie (trois problèmes connus et deux inconnus) ou (quatre problèmes connus et un inconnu) ou (cinq problèmes connus et zéro inconnu).

$$\frac{\binom{7}{3}\binom{3}{2} + \binom{7}{4}\binom{3}{1} + \binom{7}{5}\binom{3}{0}}{\binom{10}{5}} = \frac{11}{12} = 0.916.$$

On peut également utiliser l'événement complémentaire de "répondre correctement à au moins trois problèmes" qui est ne "pas répondre à trois problèmes". La probabilité de ne pas pouvoir répondre à trois problèmes est de choisir trois parmi les trois que l'élève ne connait pas et deux parmi ceux qu'ils connait.

$$\frac{\binom{3}{3}\binom{7}{2}}{\binom{10}{5}} = \frac{1}{12}$$

La probabilité complémentaire est $1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12} = 0.916$ comme auparavant.

Solution Ex 1.28. →1.28.

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023