Exercices d'examens II

Examen oral

Michel Semon

02/02/2023

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

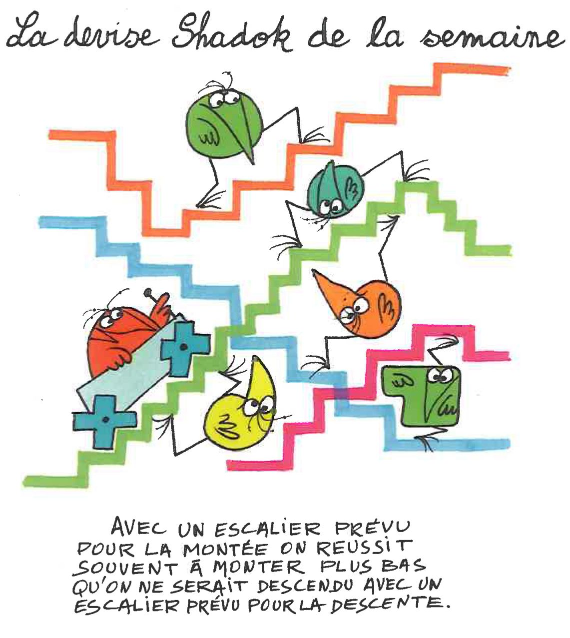


Table des matières

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

Première partie

Préparation à l'examen oral

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

Chapitre 1

Examen oral - Niveau standard

1.1 Introduction

Ce fascicule est consacré aux exercices pouvant apparaître lors des examens oraux de maturité en mathématiques pour les niveaux standard et renforcé. La liste n'est pas exhaustive, mais donne une idée de ce qui est requis.

1.2 Oral - Enoncés des exercices

Ex 1.1. (Nyon - Préparation 2014)
D'un triangle ABC, on connaît les coordonnées de $A(-2,5)$, l'équation $x-2y=0$ de la droite BC ainsi que l'équation $4x-y=-28$ de la hauteur h_B (passant par B). Déterminer les coordonnées de B et C.

Solution

Ex 1.2. (Nyon - Préparation 2014)
Un cercle γ de rayon 5 est tangent à la droite passant par $A(10;-2)$ et $B(4;6)$. Le centre C de γ se trouve sur la droite $y=0$. Déterminer les coordonnées de C.

Solution

Ex 1.3. (Nyon - Préparation 2014)
Déterminer les coordonnées du centre et le rayon du cercle passant par $A(-6;6)$ et $B(1;-1)$ dont le centre se trouve sur la droite $g : x-2y+8=0$.

Solution

Ex 1.4. (Nyon - Préparation 2014)
Soient les droites $a : 2x-3y+7=0$, $b : 3x-2y=5$ et $c : x=y$. Déterminer l'équation du cercle tangent à a et b dont le centre se trouve sur c.

Solution

Ex 1.5. (Nyon - Préparation 2014)
Soient $A(-3;14)$, $B(6;2)$ et $C(2;-1)$.

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

1. Montrer que le triangle ABC est rectangle (en B).
2. Déterminer une équation du cercle circonscrit de ce triangle.

Solution

Ex 1.6. (Nyon - Préparation 2014)
Soit la fonction f donnée par l'expression algébrique

$$f(x) = \frac{ax+b}{x+c}$$

Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$, de sorte à ce que le graphe de f passe par le point $(1; 0)$ et tel que $x = 2$ et $y = 3$ soient des asymptotes.

Solution

Ex 1.7. (Nyon - Préparation 2014)
Soit la fonction f donnée par

$$f(x) = \frac{3x^2+a}{(x+1)^2}$$

Déterminer $a \in \mathbb{R}$, de sorte à ce que f possède un extremum en $x = -4$.

Solution

Ex 1.8. (Nyon - Préparation 2014)
Soit la fonction f donnée par l'expression algébrique

$$f(x) = x^2 + 1$$

Déterminer une équation de la tangente au graphe de f en $x = -1$.

Solution

Ex 1.9. (Nyon - Préparation 2014)
Déterminer l'aire du domaine délimité par le graphe de la fonction f donnée par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{5x+1}},$$

la droite d'équation $x = 1$ et les axes de coordonnées.

Solution

Ex 1.10. (Nyon - Préparation 2014)
Soit la fonction f donnée par l'expression algébrique

$$f(x) = \frac{1}{3-x}.$$

Déterminer l'aire du domaine délimité par la droite d'équation $x = 2$, le graphe de la fonction f et les axes de coordonnées.

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

Solution

Ex 1.11. (Nyon - Préparation 2014)
Déterminer l'aire du domaine délimité par les courbes d'équations $y = e^x$, $y = e^{-x}$ et $x = 2$.

Solution

Ex 1.12. (Nyon - Préparation 2014)
Le domaine délimité par les courbes d'équations $y = \sqrt{x}$ et $y = x$ est tourné autour de l'axe Ox. Déterminer le volume du corps de révolution ainsi obtenu.

Solution

Ex 1.13. (Nyon - Préparation 2014)
Déterminer

$$\int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1}\,\mathrm{d}x.$$

Solution

Ex 1.14. (Nyon - Préparation 2014)
Esquisser le graphe de la fonction f donnée par son expression algébrique

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

(sans dérivée). Esquisser ensuite le graphe de la fonction g, où $g(x) = \ln(f(x))$.

Solution

Ex 1.15. (Nyon - Préparation 2014)
Une usine estime que 5% des appareils qu'elle produit comportent des défauts.

1. Si on livre 8 appareils au même client, quelle serait alors la probabilité qu'au moins un appareil comporte un défaut ?
2. Si on livre 8 appareils au même client, quelle serait alors la probabilité qu'au plus deux appareils comportent un défaut ?

Solution

Ex 1.16. (Nyon - Préparation 2014)
On tire simultanément 4 cartes d'un jeu de chibre / jass (36 cartes).

1. Quelle est la probabilité qu'on ait tiré exactement 3 as ?
2. Quelle est la probabilité qu'au moins une des cartes tirée est un coeur ?
3. Quelle est la probabilité que les quatre cartes comportent les quatre couleurs ?

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

Solution

Ex 1.17. (Nyon - Préparation 2014)
Dans une urne se trouvent quatre boules rouges et x boules jaunes. On tire deux boules de l'urne. La probabilité qu'on ait tiré deux boules de même couleur est $\frac{7}{15}$. Combien de boules jaunes étaient dans l'urne au début ?

Solution

Ex 1.18. (Nyon - Préparation 2014)
Un prestidigitateur possède deux pièces de monnaie : une normale et une qui a deux faces “pile”. Il choisit une des pièces au hasard et la lance. Le résultat est “pile”.

1. Quelle est la probabilité que la pièce lancée soit la normale ?
2. Le prestidigitateur lance la même pièce encore une fois. Le résultat est encore “pile”. Quelle est maintenant la probabilité que la pièce lancée soit la pièce normale ?

Solution

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

1.3 Oral - Solutions des exercices

Solution Ex 1.1. $\rightarrow$1.1.
Le point B est donné par l'intersection des droites BC et h_B qui est :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrl} 4x & - & y & = & -28 & L_1 \\ x & - & 2y & = & 0 & L_2 \end{array}\right. \quad \xrightarrow{L_1 - 4L_2} \quad y = -4 \text{ et } x = -8$$

Le point B est le point $(-4; -8)$. La droite AC contenant les points A et C est perpendiculaire à la hauteur issue de B et a pour vecteur normal un vecteur directeur de h_B. La droite h_B a pour équation $4x - y + 28 = 0$ donc $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ est un vecteur directeur de celle-ci. $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ est également le vecteur normal de la droite AC passant par A. Donc

$$AC : \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} -2 - x \\ 5 - y \end{bmatrix} = 0 \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad AC : \; -2 - x + 20 - 4y = 0 \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad AC : \; -x - 4y + 18 = 0$$

La droite AC a pour équation cartésienne $-x - 4y + 18 = 0$. L'intersection des droites AC et BC nous

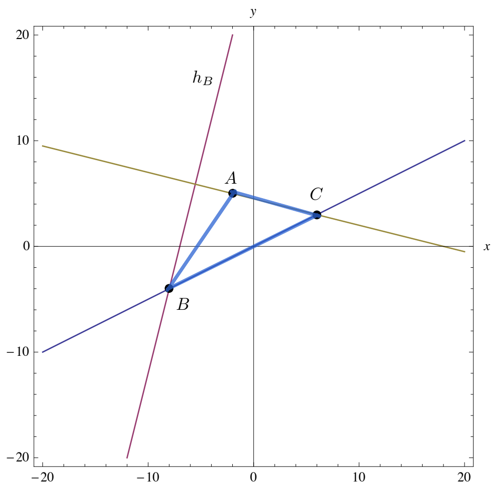


FIGURE 1.1 – Exercice 1.1

donne le point C :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrl} -x & - & 4y & = & -18 & L_1 \\ x & - & 2y & = & 0 & L_2 \end{array}\right. \quad \xrightarrow{L_1 + L_2} \quad y = 3 \text{ et } x = 6$$

Le point C est le point $(6; 3)$. (voir fig. 1.1).

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

Solution Ex 1.2. →1.2.
La solution sera de la forme $C(c_1;0)$ car le centre se trouve sur l'axe des abscisses. La droite passant par les points $A(10;-2)$ et $B(4;6)$ a comme vecteur directeur $d_{AB} = \begin{bmatrix}-6\\8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3\\4\end{bmatrix}$. L'équation de cette droite est donc

$$4x + 3y = 4(10) + 3(-2) = 4(4) + 3(6) = 34.$$

La distance entre le centre C du cercle γ et la droite AB vaut 5. En se basant sur la formule donnant la distance du point $P(p_1;p_2)$ à la droite $ax+by+c=0$,

$$\delta(P;d) = \frac{|ap_1 + ap_2 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

on obtient,

$$\delta(C;AB) = \frac{|4(c_1) + 3\underbrace{(0)}_{c_2=0} - 34|}{5} = \frac{|4c_1 - 34|}{5} = 5 \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad |4c_1 - 34| = 25.$$

C'est une équation contenant une valeur absolue, on peut la résoudre de deux manières différentes :

1. On sépare l'équation en deux parties :

$$|4c_1 - 34| = 25 \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad \begin{cases} 4c_1 - 34 = 25, \\ 34 - 4c_1 = 25, \end{cases}$$

   Les solutions sont $c_1 = \frac{59}{4}$ et $c_1 = \frac{9}{4}$.

2. On élève le tout au carré et on résout l'équation quadratique :

$$(4c_1 - 34)^2 = 625 \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad 16c_1^2 - 272c_1 + 531 = 0.$$

   Les solutions sont également $c_1 = \frac{59}{4}$ et $c_1 = \frac{9}{4}$.

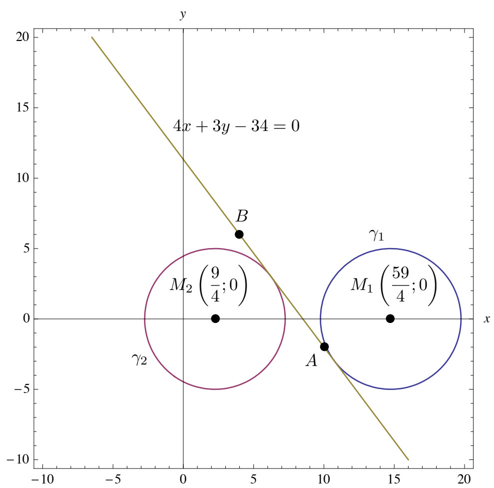


FIGURE 1.2 – Exercice 1.2

Il y a donc deux cercles de centres $M_1\left(\frac{59}{4};0\right)$ et $M_2\left(\frac{9}{4};0\right)$ qui sont tangents à la droite passant par les points A et B. (Voir fig. 1.2).

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

Solution Ex 1.3. $\rightarrow$1.3.
Posons $C(c_1; c_2)$ le centre du cercle et r son rayon.
L'intersection de la médiatrice du segment $[AB]$ et de la droite g fournit le centre du cercle cherché.

- Le point milieu M de $[AB]$ est :

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix} \quad \overset{\looparrowright}{\longrightarrow} \quad M = \left(-\frac{5}{2}; \frac{5}{2}\right).$$

- La médiatrice de $[AB]$ à pour vecteur normal $\overrightarrow{AB}$ qui vaut $\begin{bmatrix} 7 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.
- La médiatrice a pour équation :

$$x - y = -\frac{5}{2} - \frac{5}{2} = -5 \quad \overset{\looparrowright}{\longrightarrow} \quad y = x + 5.$$

- L'intersection de la médiatrice et de la droite g est obtenue en résolvant le système

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & 2y & = & -8 & L_1 \\ x & - & y & = & -5 & L_2 \end{array}\right. \quad \xrightarrow{L_1 - L_2} \quad y = 3 \text{ et } x = -2$$

  Le centre du cercle est $C(-2; 3)$.
- Le rayon est obtenu en calculant la norme du vecteur joignant le centre du cercle à un point de sa circonférence disons A.

$$\overrightarrow{CA} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \overset{\looparrowright}{\longrightarrow} \quad ||\overrightarrow{CA}|| = \sqrt{\overrightarrow{CA} \circ \overrightarrow{CA}} = 5$$

  Le rayon du cercle est 5.

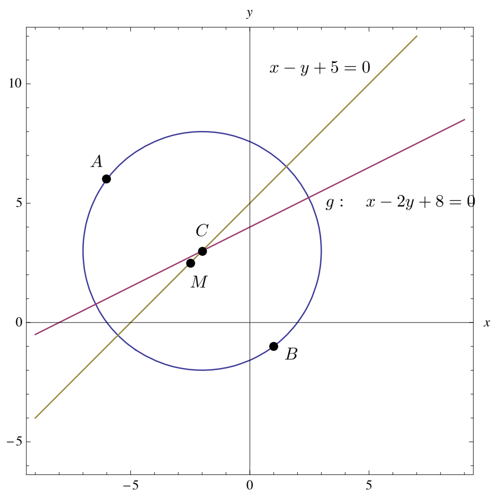


FIGURE 1.3 – Exercice 1.3

L'équation cherchée est

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 25.$$

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

Solution Ex 1.4. →1.4.

Si le cercle est tangent à a et b, il a forcément son centre sur les bissectrices de ces deux droites. Il suffit donc de chercher l'intersection de celles-ci avec la droite c.

- Les bissectrices se calculent à l'aide de la formule suivante :

$$\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \pm\frac{ex+dy+f}{\sqrt{e^2+d^2}}$$

  dans notre cas :

$$b_1: \qquad \frac{2x-3y+7}{\sqrt{13}} = +\left(\frac{3x-2y-5}{\sqrt{13}}\right)$$
$$2x-3y+7 = 3x-2y-5 \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad -x-y+12=0$$

  La première bissectrice a pour équation $b_1: \ -x-y+12=0$

$$b_2: \qquad \frac{2x-3y+7}{\sqrt{13}} = -\left(\frac{3x-2y-5}{\sqrt{13}}\right)$$
$$2x-3y+7 = -3x+2y+5 \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad 5x-5y+2=0$$

  La deuxième bissectrice a pour équation $b_2: \ 5x-5y+2=0$.

- La bissectrice b_2 est parallèlle à la droite c, il n'y aura donc une intersection qu'avec la bissectrice b_1. L'intersection est obtenue par la résolution du système :

$$\begin{cases} x - y = 0 & L_1 \\ -x - y = -12 & L_2 \end{cases} \quad \xrightarrow{L_1+L_2} \quad -2y=-12 \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad y=6 \text{ et } x=6$$

  Le centre du cercle tangent à a et b est $C(6;6)$.

- Le rayon du cercle est égal à la distance du centre à l'une des droites tangentes a et b. Choisissons b. Nous avons

$$\delta(C;b) = \frac{|3x-2y-5|}{\sqrt{13}} \quad \xrightarrow{x=6;\,y=6} \quad \frac{|3(6)-2(6)-5|}{\sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{13}}.$$

  Le rayon du cercle est $r = \frac{1}{\sqrt{13}}$

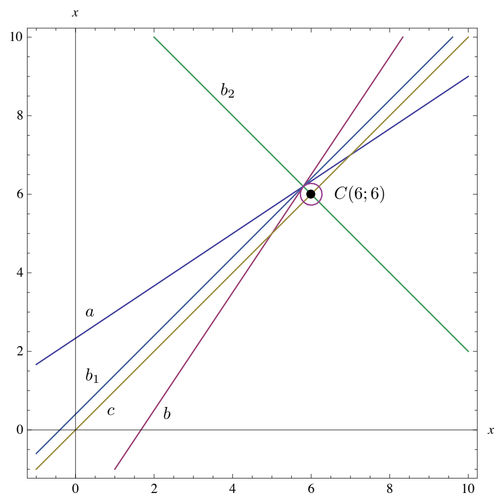


FIGURE 1.4 – Exercice 1.4

L'équation du cercle recherché est

$$(x-6)^2+(y-6)^2=\frac{1}{13}$$

(Voir fig(1.4))

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

Solution Ex 1.5. →1.5.

Pour démontrer que le triangle est rectangle en B il suffit de montrer que le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ est nul.

- Le vecteur $\overrightarrow{BA}$ est $\begin{bmatrix}-9\\12\end{bmatrix}$, le vecteur $\overrightarrow{BC}$ est $\begin{bmatrix}-4\\-3\end{bmatrix}$, le produit scalaire de ces deux vecteurs est :

$$\overrightarrow{BA} \circ \overrightarrow{BC} = \begin{bmatrix}-9\\12\end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix}-4\\-3\end{bmatrix} = 36 - 36 = 0.$$

  Le produit scalaire étant nul, le triangle est rectangle en B.

- Si le triangle est rectangle alors le centre du cercle circonscrit est le point milieu de son hypothénuse, qui est le point :

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}-3\\14\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{13}{2}\end{bmatrix}$$

  Le centre du cercle circonscrit est $M\left(-\frac{1}{2}; \frac{13}{2}\right)$

- Le diamètre du cercle est la distance de A à C, c'est-à-dire la norme du vecteur $\overrightarrow{AC}$:

$$||\overrightarrow{AC}|| = \sqrt{\overrightarrow{AC} \circ \overrightarrow{AC}} = \left(\begin{bmatrix}5\\-15\end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix}5\\-15\end{bmatrix}\right)^{\frac{1}{2}} = 5\sqrt{10}.$$

  Le rayon du cercle est $\frac{5\sqrt{10}}{2}$ et l'équation de celui-ci :

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{13}{2}\right)^2 = \frac{125}{2}.$$

(Voir fig. 1.5)

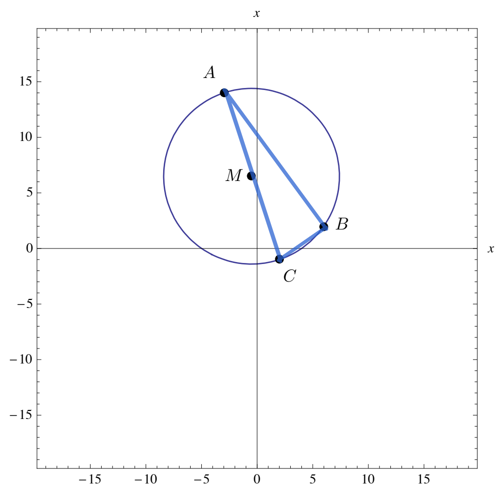


FIGURE 1.5 – Exercice 1.5

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

Solution Ex 1.6. $\rightarrow$1.6.

Il s'agit de trouver trois relations permettant de déterminer les valeur des trois inconnues a, b et c.

1. On nous dit que la fonction à une asymptote verticale en $x = 2$, donc
$$\lim_{x\to 2^{\pm}} \frac{ax+b}{x+c} = \pm\infty.$$
Cela se traduit par le fait que le dénominateur doit s'annuler pour $x = 2$, autrement dit que $c = -2$.
2. La fonction f possède une asymptote horizontale d'équation $y = 3$. Il faut que
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{ax+b}{x+c} = \frac{ax}{x} = a = 3.$$
a prend la valeur 3.
3. Finalement f passe par le point $(1;0)$, donc $f(1) = 0$.
$$f(1) = \frac{a\cdot 1+b}{1+c} = 0 \quad \xrightarrow{\text{a=3 ;c=-2}} \quad \frac{3\cdot 1+b}{1-2} = 0 \quad \longrightarrow \quad b = -3.$$

Les valeurs sont $a = 3$, $b = -3$ et $c = -2$, la fonction cherchée est :
$$f(x) = \frac{3x-3}{x-2} = \frac{3(x-1)}{x-2}$$
dont le graphe est à la figure (1.6).

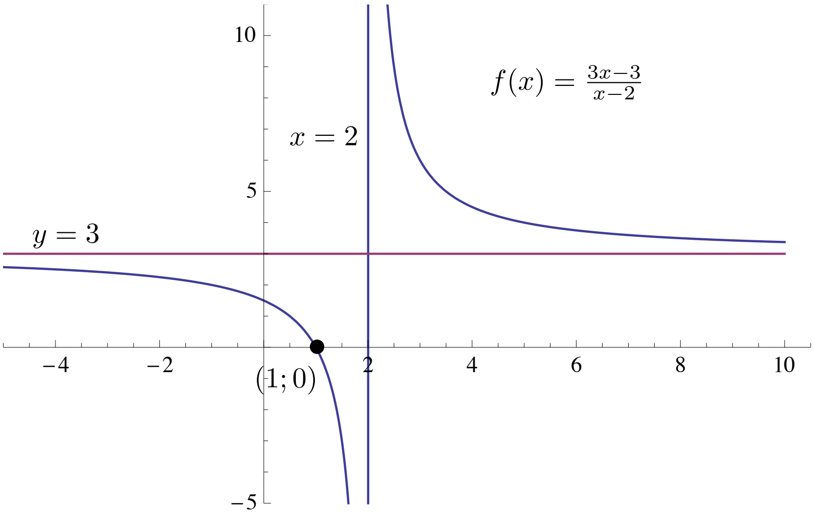


FIGURE 1.6 – Exercice 1.6

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

Solution Ex 1.7. →1.7.
Il faut que $f'(-4) = 0$,

$$f'(x) = \frac{2(3x-a)}{(x+1)^3}$$

. En substituant $x = -4$ dans cette expression, on a

$$f'(-4) = \frac{2(a+12)}{27} \quad \longrightarrow \quad a = -12.$$

La valeur de a est -12 et la fonction recherchée est

$$f(x) = \frac{3x^2 - 12}{(x+1)^2}$$

(Voir fig.1.7).

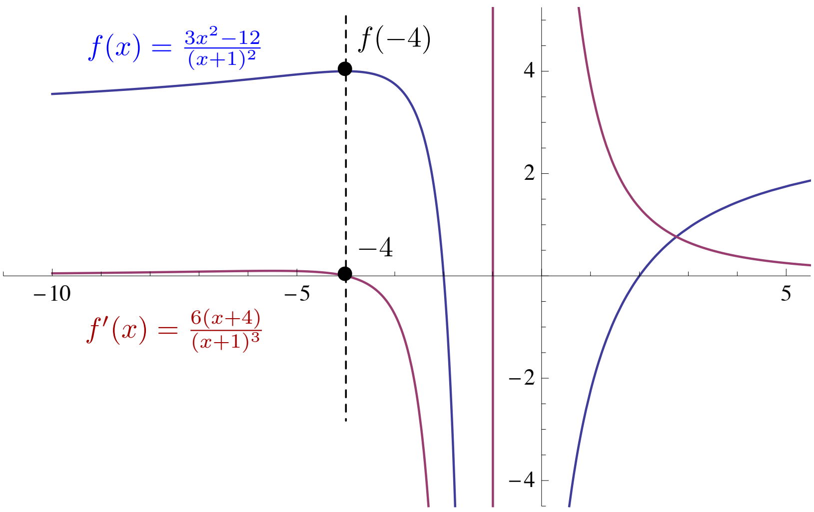


FIGURE 1.7 – Exercice 1.7

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

Solution Ex 1.8. →1.8.
La dérivée de $f(x) = x^2 + 1$ est $f'(x) = 2x$. L'image de $x = -1$ par f' donne la pente de la tangente que l'on cherche, $f'(-1) = -2$. De plus la droite passe par le point $(-1; f(-1)) = (-1; 2)$. L'équation de la droite de pente $m = -2$ passant par le point $(-1; 2)$ est :

$$y = mx + q \quad \xrightarrow{\ \hookrightarrow\ } \quad 2 = -2 \cdot -1 + q \quad \xrightarrow{\ \hookrightarrow\ } \quad q = 0 \quad \xrightarrow{\ \hookrightarrow\ } \quad y = -2x$$

La droite tangente à f en $x = -1$ est $y = -2x$. Voir fig 1.8

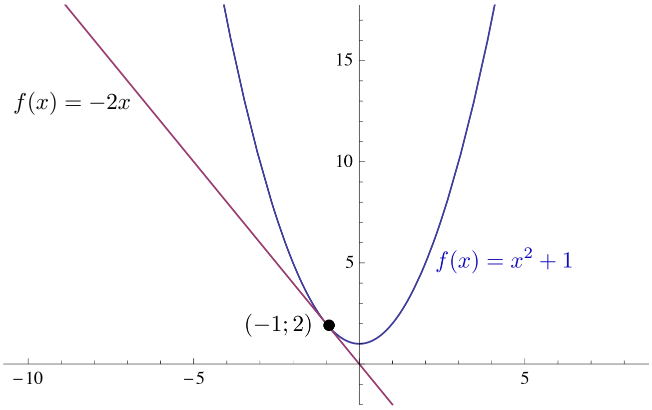


FIGURE 1.8 – Exercice 1.8

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

Solution Ex 1.9. $\rightarrow$1.9.
Le domaine de définition est donné par la solution de $5x + 1 > 0$,

$$D_f =]-\frac{1}{5}; +\infty[$$

La fonction est continue sur son domaine de définition, on peut donc l'intégrer de $x = 0$ à $x = 1$.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{5x+1}}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 (5x+1)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{5}\sqrt{5x+1}\Big|_0^1 \\
&= \frac{2}{5}\sqrt{6} - \frac{2}{5}\sqrt{1} = \frac{2}{5}(\sqrt{6} - 1)
\end{aligned}$$

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

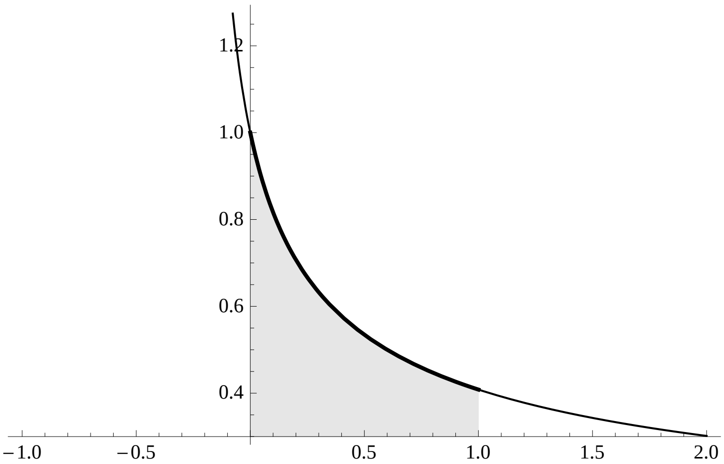


Figure 1.9 – Exercice 1.9

Solution Ex 1.10. →1.10.
La fonction a une asymptote verticale d'équation $x = 3$. Elle est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$. On peut l'intégrer sans autre sur l'intervalle demandé $[0; 2]$.

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \frac{1}{3-x}\,\mathrm{d}x &= -\ln|3-x|\Big|_0^2 \\
&= \ln\left(\frac{1}{3-x}\right)\Big|_0^2 \\
&= \ln(1) - \ln\left(\frac{1}{3}\right) \\
&= 0 + \ln(3) \\
&= \ln(3)
\end{aligned}$$

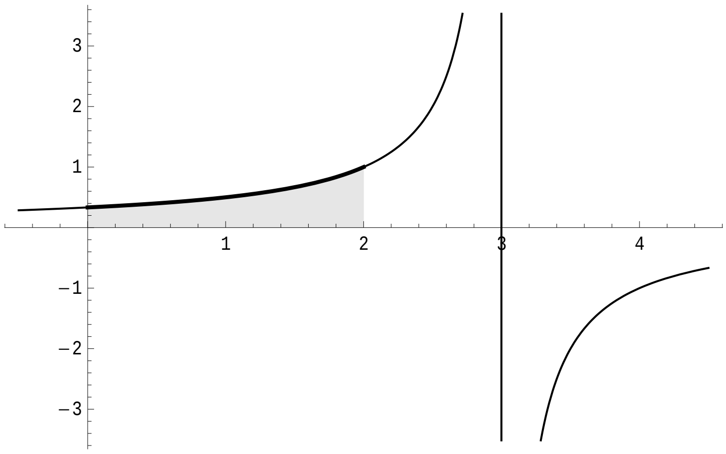


FIGURE 1.10 – Exercice 1.10

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

Solution Ex 1.11. $\rightarrow$1.11.
Les fonctions e^x et e^{-x} sont continue sur $\mathbb{R}$.

- La valeur d'abscisse du point d'intersection des fonctions e^x et e^{-x} est $x = 0$, en effet :

$$e^x = e^{-x} \quad \longrightarrow \quad x = -x \quad \longrightarrow \quad x = 0.$$

- L'aire géométrique correspond à l'intégrale :

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^2 (e^{-x} - e^x)\,\mathrm{d}x\right| &= \left|-e^{-x} - e^x\Big|_0^2\right| \\
&= \left|(-e^{-2} - e^2) - (-e^0 - e^0)\right| \\
&= \left|-\frac{1}{e^2} - e^2 + 2\right| \\
&\approx 5.52.
\end{aligned}$$

Remarque 1. *Lorsque l'on ne sait pas laquelle des fonctions a une valeur supérieure, il suffit de prendre la valeur absolue de l'intégrale d'aire.*

L'aire est de 5.52.

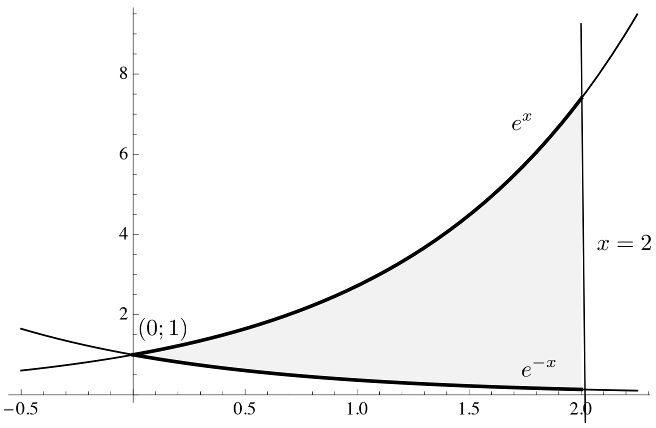


FIGURE 1.11 – Exercice 1.11

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

Solution Ex 1.12. →1.12.
Il s'agit premièrement de déterminer les bornes d'intégrations qui sont données par les points d'intersection des deux fonctions. (Voir fig.1.12).

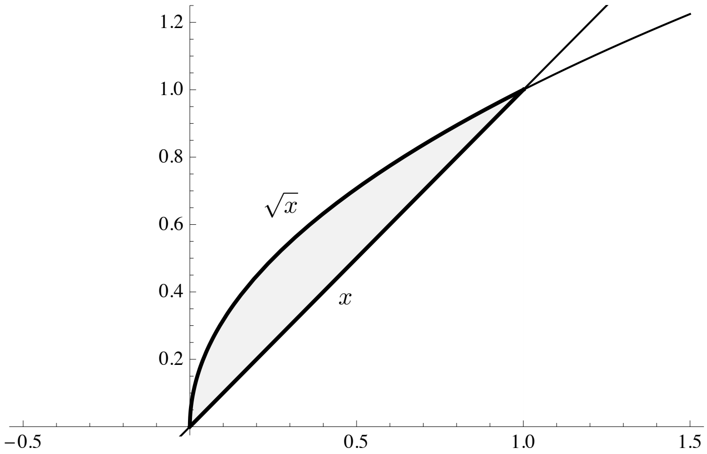


FIGURE 1.12 – Exercice 1.12

$$\sqrt{x} = x \quad \longrightarrow \quad x = x^2 \quad \longrightarrow \quad x(x-1) = 0 \quad \longrightarrow \quad x = 0 \text{ et } x = 1$$

Les bornes d'intégration sont 0 et 1.
Le volume donné par la rotation autour de l'axe x est :

$$V = \pi \int f(x)^2 \, \mathrm{d}x$$

Le volume donné par la rotation de l'aire grisée de la fig. 1.12 est :

$$V = \pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2 \, \mathrm{d}x - \pi \int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x = \pi \int_0^1 x - x^2 \, \mathrm{d}x$$

L'évaluation de l'intégrale donne :

$$\pi \int_0^1 x - x^2 \, \mathrm{d}x = \pi \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}.$$

Le volume de révolution est $\frac{\pi}{6}$

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

Solution Ex 1.13. →1.13.
Le truc dans ce genre d'intégration est la division euclidienne :

$$\begin{array}{rr|l} x^3 & & x^2+1 \\ \cline{3-3} x^3 & +x & \qquad x \\ \cline{1-2} & -x & \\ & & \end{array}$$

L'intégrant devient

$$\frac{x^3}{x^2+1} = x - \frac{x}{x^2+1}$$

et l'intégrale

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 x\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 - \frac{1}{2}\ln|x^2+1|\Big|_0^1 \\
&= \left(\frac{1}{2}-0\right) - \left(\frac{1}{2}\ln(2) - \frac{1}{2}\ln(1)\right) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln(2) \\
&= \frac{1}{2}\left(1-\ln(2)\right)
\end{aligned}$$

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

Solution Ex 1.14. $\rightarrow$1.14.
Le domaine de définition est $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, on a donc une asymptote verticale d'équation $x = 1$. Le graphe de la fonction montre une asymptote horizontale d'équation

$$y = \lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1$$

Le tableau des signes

x		-1		$+1$	
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	‖	$+$

nous dit que la fonction est positive partout sauf sur l'intervalle $[-1;1]$. Si on trace le graphe on obtient (fig. 1.13). Si on prend le logarithme de la fonction on a (fig.1.14) :

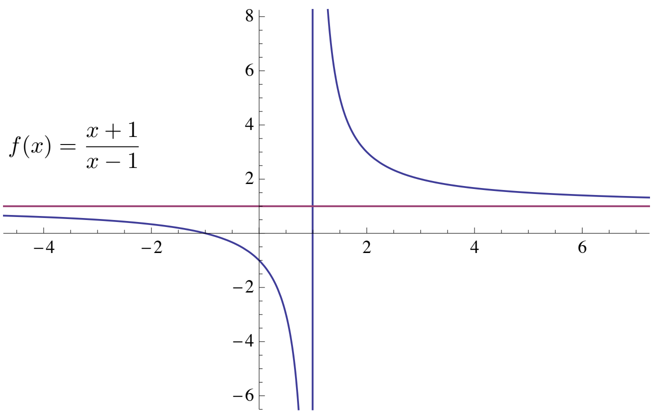


FIGURE 1.13 – Exercice 1.14

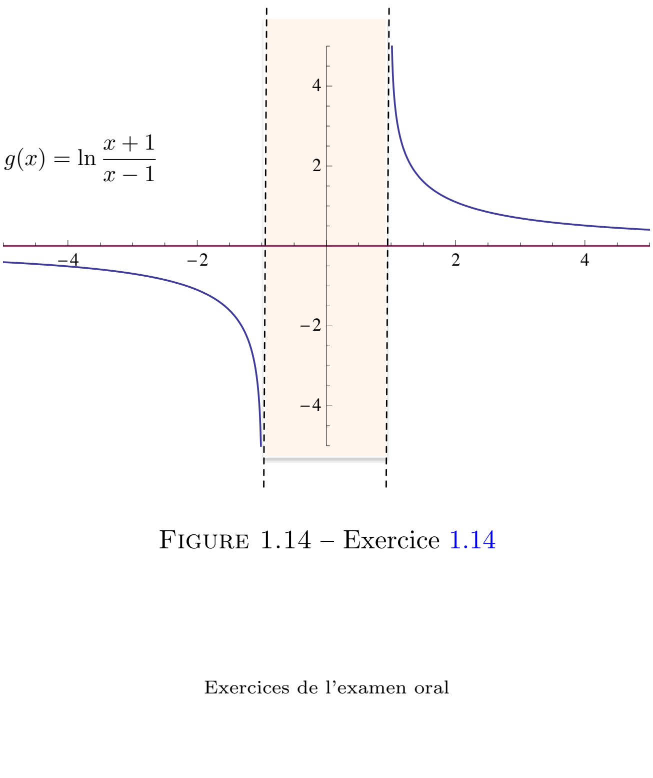


FIGURE 1.14 – Exercice 1.14

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

Solution Ex 1.15. →1.15.
On est en présence d'une suite de huit épreuves de Bernouilli (deux résultats possibles), on a donc à faire à une loi binomiale. Les deux probabilités qui entrent en jeu (loi **bi**-nomiale) sont :

$$\begin{aligned} P(\text{“appareil défectueux”}) &= p_{\text{def}} = 0.05 \\ P(\text{“appareil en bon état”}) &= 1 - p_{\text{def}} = \overline{p_{\text{def}}} = 0.95 \end{aligned}$$

1. “Au moins un” est l'événement complémentaire de “aucun”. La probabilité qu'aucun appareil parmi huit ne soit défectueux est :

$$P(\text{“aucun app. déf.”}) = \binom{8}{0} \cdot (p_{\text{def}})^0 \cdot (\overline{p_{\text{def}}})^8 = 1 \cdot 1 \cdot 0.95^8 \approx 0.66342$$

La probabilité qu'au moins un appareil soit défectueux est $1 - 0.66342 = 0.33658$.

2. “Au plus deux” signifie aucun, un ou deux appareils défectueux. La probabilité qu'aucun ne soit défectueux est déjà connue, il s'agit de calculer les probabilités qu'exactement un ou exactement deux appareils soient défectueux.

$$P(\text{“un app. déf.”}) = \binom{8}{1} \cdot (p_{\text{def}})^1 \cdot (\overline{p_{\text{def}}})^7 = 0.279335$$
$$P(\text{“deux app. déf.”}) = \binom{8}{2} \cdot (p_{\text{def}})^2 \cdot (\overline{p_{\text{def}}})^6 = 0.0514564.$$

La réponse est la somme de ces trois probabilités :

$$\begin{aligned} P(\text{“au plus deux...”}) &= P(\text{“aucun app. déf.”}) + P(\text{“un app. déf.”}) + P(\text{“deux app. déf.”}) \\ &\approx 0.66342 + 0.279335 + 0.0514564 \approx 0.994211. \end{aligned}$$

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

Solution Ex 1.16. $\rightarrow$1.16.
On commence par calculer le nombre total de possibilités qui existent de tirer 4 cartes d'un jeu de 36. Ce nombre est

$$\#\text{cas possibles} = \binom{36}{4} = \frac{36!}{(36-4)! \cdot 4!} = 58\,905$$

1. Le nombre de possibilités de tirer exactement 3 as signifie : Choisir 3 as parmi 4 plus une carte qui n'est pas un as, ce qui se traduit par :

   $$\binom{4}{3} \cdot \binom{32}{1} = 128$$

   La probabilité cherchée est le quotient du nombre favorable de possibilités par le nombre total :

   $$\frac{\#\text{cas favorables}}{\#\text{cas possibles}} = \frac{\binom{4}{3} \cdot \binom{32}{1}}{\binom{36}{4}} = \frac{128}{58905} \approx 0.0021$$

2. "Au moins un coeur" est l'événement complémentaire de "aucun coeur" :

   $$P(\text{“au moins un coeur”}) = 1 - P(\text{“aucun coeur”}).$$

   Le calcul de la probabilité "aucun coeur" se calcule en choisissant 4 cartes parmi celles qui ne sont pas des coeurs, ce qui donne

   $$\binom{27}{4} = 17\,550$$

   en divisant par le nombre de cas possibles, on obtient la probabilité de ne tirer aucun coeur, qui est :

   $$P(\text{“aucun coeur”}) = \frac{\binom{27}{4}}{\binom{36}{4}} = \frac{390}{1309} \approx 0.298.$$

   La probabilité cherchée est

   $$P(\text{“au moins un coeur”}) = 1 - \frac{390}{1309} = \frac{919}{1309} \approx 0.702$$

3. On n'impose aucun ordre sur les couleurs, donc la première carte tirée peut être n'importe laquelle $\left(\frac{36}{36}\right)$. Le tirage de la deuxième cartes devra se faire parmi toutes les cartes qui ne sont pas de la couleur de la première $\left(\frac{27}{35}\right)$, le tirage de la troisième carte devra se faire parmi toutes celles qui restent et qui ne sont ni de la couleur de la première, ni de la couleur de la deuxième c.-à.-d $\left(\frac{18}{34}\right)$ et ainsi de même pour la dernière pour laquelle on aura $\left(\frac{9}{33}\right)$. Le résultat est le produit de ces probabilités :

   $$\frac{36}{36} \cdot \frac{27}{35} \cdot \frac{18}{34} \cdot \frac{9}{33} = \frac{729}{6545} \approx 0.112.$$

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

Solution Ex 1.17. $\rightarrow$1.17.
Le nombre total de boules est $4+n$ (n étant le nombre de boules jaunes). La probabilité de tirer deux boules de la même couleur, qui vaut $\frac{7}{15}$, est donnée par l'expression.

$$\frac{\binom{4}{2}+\binom{n}{2}}{\binom{n+4}{2}}=\frac{7}{15}$$

Si on développe l'expression on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{7}{15}=\frac{\binom{4}{2}+\binom{n}{2}}{\binom{n+4}{2}} \quad &= \quad \frac{\dfrac{4!}{2!2!}+\dfrac{n!}{(n-2)!2!}}{\dfrac{(n+4)!}{(n+2)!2!}} \\ &= \quad \frac{\dfrac{4!}{2!}+\dfrac{n!}{(n-2)!}}{\dfrac{(n+4)!}{(n+2)!}} \\ &= \quad \frac{12+n(n-1)}{(n+4)(n+3)}\end{aligned}$$

Les solutions de l'équation quadratique

$$\frac{7}{15}=\frac{(n-1)n+12}{(n+3)(n+4)}$$

sont $n=2$ et $n=6$.

L'urne contient soit 2 boules jaunes soit 6 boules jaunes.

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

Solution Ex 1.18. →1.18.
Un prestidigitateur possède deux pièces de monnaie : une normale et une qui a deux faces “pile”. Il choisit une des pièces au hasard et la lance. Le résultat est “pile”.

1. Quelle est la probabilité que la pièce lancée soit la normale ?
2. Le prestidigitateur lance la même pièce encore une fois. Le résultat est encore “pile”. Quelle est maintenant la probabilité que la pièce lancée soit la pièce normale ?

Les probabilités de choisir la pièce normale ou la pièce truquée sont identiques donc $P(n) = P(t) = \frac{1}{2}$. On connait également les probabilités conditionnelles suivantes (p =pile, f =face)

$$\begin{aligned} P(f|t) &= 0, \\ P(p|t) &= 1, \\ P(f|n) &= \frac{1}{2}, \\ P(p|n) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

1. On nous demande de calculer la valeur de la probabilité conditionnelle $P(n|p)$. On utilise les formules des probabilités conditionnelles, la formule de Bayes et celle des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(n|p) &= \frac{P(n \cap p)}{P(p)} \quad \text{(formule des probabilités conditionnelles)} \\ &= \frac{P(p|n) \cdot P(n)}{P(p)} \quad \text{(formule de Bayes)} \\ &= \frac{P(p|n) \cdot P(n)}{P(p|n) \cdot P(n) + P(p|t)P(t)} \quad \text{(formule des probabilités totales)} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

La probabilité d’avoir tiré la pièce normale si l’on obtient face au premier lancé est $\frac{1}{3}$.

On peut également faire un arbre (fig.1.15) :

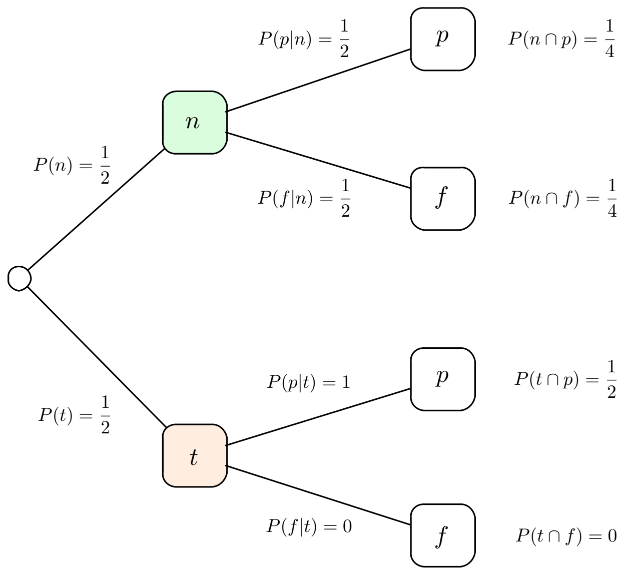


FIGURE 1.15 – Exercice 1.18. $\frac{P(n \cap p)}{P(p)} = \frac{1}{3}$

©michelsemon.ch - Cours d’appui - 2023

2. Le prestidigitateur relance la **même** pièce encore une fois et celle-ci tombe à nouveau sur pile. On aimerait connaitre la valeur $P(n|(p\cap p))$, c.-à.-d la probabilité que la pièce soit normale si elle tombe deux fois de suite sur "pile". On refait le même raisonnement :

$$\begin{aligned} P(n|(p\cap p)) &= \frac{P(n\cap p\cap p)}{P(p\cap p)} \\ &= \frac{P((p\cap p)|n)P(n)}{P((p\cap p)|n)P(n)+P((p\cap p)|t)P(t)} \\ &= \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

La probabilité d'avoir tirer la pièce normale si on lance deux fois la même pièce et que celle-ci tombe chaque fois sur pile est $\frac{1}{5}$.

Remarque 2. *Ce nest pas la même chose si l'on recommence deux fois de suite l'expérience décrite sous 1. Dans ce cas la probabilité de tirer deux fois la pièce normale et qu'elle tombe sur pile les deux fois est* $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$.

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

Chapitre 2

Examen oral - Niveau renforcé*

2.1 Oral - Enoncés des exercices

Ex 2.1. (Nyon - Préparation 2011)
Résoudre l'équation suivante dans $\mathbb{C}$:

$$x^5 - x^4 + x - 1 = 0$$

Solution

Ex 2.2. (Nyon - Préparation 2011)
Soient les droites a : $8x - 6y + 24 = 0$ et b : $12x - 9y - 6 = 0$. Déterminer la distance entre les deux droites si elle existe.

Solution

Ex 2.3. (Nyon - Préparation 2011)
Calculer :

$$\frac{(\sqrt{3}+i)^{15}}{2^{12}(1-2i)}$$

Solution

Ex 2.4. (Nyon - Préparation 2011)
Montrer que i est une solution de l'équation suivante et la résoudre dans $\mathbb{C}$.

$$x^3 + (-5-6i)x^2 + (-5+18i)x + 13$$

Solution

Ex 2.5. (Nyon - Préparation 2011)
Soit f la fonction donnée par

$$f(x) = \frac{3x^2 + a}{(x+1)^2}.$$

Déterminer $a \in \mathbb{R}$, tel que f admet un extremum en $x = -4$.

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

Solution

Ex 2.6. (Nyon - Préparation 2011) Esquisser le graphe de la fonction f donnée par :

$$f(x) = \frac{x-1}{(x^2-2x)^2}$$

Solution

Ex 2.7. (Nyon - Préparation 2011)
D'un carré $ABCD$ on connaît les coordonnées des point $A(3;4)$ et $C(1;-2)$. Déterminer B et D.

Solution

Ex 2.8. (Nyon - Préparation 2011)
Déterminer la distance de la droite $2x - 3y + 5 = 0$ à l'origine.

Solution

Ex 2.9. (Nyon - Préparation 2011) Déterminer les coordonnée du point A', symétrique de $A(4;3)$ par rapport à la droite $g:\ x + 2y - 4 = 0$.

Solution

Ex 2.10. (Nyon - Préparation 2011) Soit $P(x;y)$ un point quelconque de la parabole d'équation $y = x^2 - 1$.

1. Montrer que la distance de P à l'origine est
$$d(x) = \sqrt{x^4 - x^2 + 1}.$$
2. Déterminer le(s) point(s) de la parabole le(s) plus proche(nt) de l'origine.

Solution

Ex 2.11. (Nyon - Préparation 2011) Une usine confectionne des boîtes cylindrique en tôle d'un contenu de 1000 cm3. Montrer que la surface totale d'une telle boîte peut être donnée par

$$A(r) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$$

Déterminer le rayon qui minimise la surface de la boîte.

Solution

Ex 2.12. (Nyon - Préparation 2011)
Un rectangle de surface 225 doit avoir un périmètre le plus petit possible. Déterminer sa longueur et sa largeur.

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

Solution

Ex 2.13. (Nyon - Préparation 2011) Déterminer le centre du cercle circonscrit du triangle ABC, avec $A(1;0;0), B(0;1;0)$ et $C(0;0;1)$.

Solution

Ex 2.14. (Nyon - Préparation 2011) Soit c le cercle d'équation $4x^2+4y^2-16x+8y+4=0$. Déterminer les tangentes à c qui passent par l'origine.

Solution

Ex 2.15. (Nyon - Préparation 2011) Soient le cercle $c : x^2 + y^2 - 6x + 2y - 15 = 0$ et la droite $g : 4x + 3y - 12 = 0$. Déterminer une équations des tangentes à c parallèles à g.

Solution

Ex 2.16. (Nyon - Préparation 2011) Montrer que le quadrilatère $A(7;0)$, $B(9;2)$, $C(5;6)$, $D(3;4)$ est un rectangle. En déterminer une équation du cercle circonscrit.

Solution

Ex 2.17. (Nyon - Préparation 2011) Déterminer les équations des deux tangentes verticales au cercle

$$c : x^2 + y^2 - 6x + 10y + 33 = 0$$

Solution

Ex 2.18. (Nyon - Préparation 2011) En Angleterre on écrit le mot "rigueur" avec un "u" ("rigour"). En Amérique, par contre on l'écrit "rigor". Un client anglophone d'un hôtel a écrit ce mot sur un bout de papier. On choisit au hasard une lettre du mot. Il s'agit d'une voyelle ("a","e","i","o","u","y"). 40% des clients anglophones de l'hôtel sont anglais, 60% américains. Quelle est la probabilité que l'auteur du mot soit anglais ?

Solution

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

2.2 Oral - Solutions des exercices

Solution Ex 2.1. →2.1.
Résoudre dans $\mathbb{C}$ implique l'utilisation des nombres complexes. On commence par factoriser l'équation donnée.

$$x^5 - x^4 + x - 1 = 0 \quad \longrightarrow \quad x^4(x-1) + (x-1) = (x-1)(x^4+1) = 0$$

Une solution évidente est $x = 1$. Dans l'ensemble des nombres réels l'équation $x^4 = -1$ n'a pas de solution. Dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ on peut la résoudre et elle aura 4 solutions.
On va chercher toutes les solutions de $x^4 = -1$ en commençant par réécrire -1 sous forme complexe exponentielle. -1 se trouve sur l'axe des réels, en notation complexe c'est le nombre $(-1 + 0\,i)$ (voir figure 2.1).

La notation complexe exponentielle de $z = (-1 + 0\,i)$ est $z = e^{i\,\pi}$. Pour trouver les k racines ω_k du

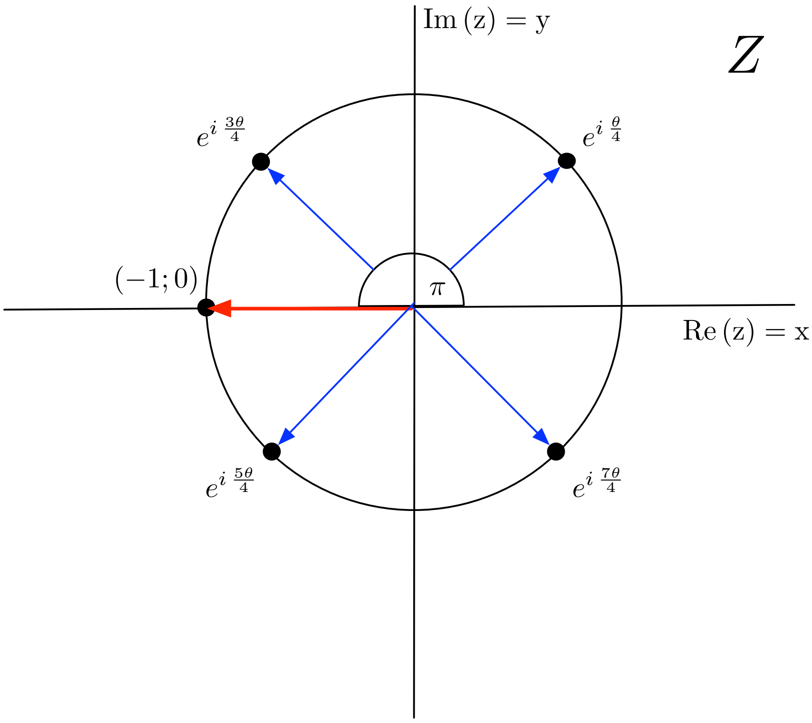


FIGURE 2.1 – Exercice 2.1. Les solutions (en vert) de $\sqrt[4]{-1}$ (en rouge)

nombre complexe $\sqrt[k]{z}$ on utilise la formule suivante :

$$\omega_n = |z|^{\frac{1}{k}} \cdot e^{\frac{i\,\theta}{k}} \cdot e^{\frac{i\,2n\pi}{k}} \text{ avec } n = (0..(k-1))$$

Dans notre cas, $k = 4$ et $|z|^{\frac{1}{4}} = 1^{\frac{1}{4}} = 1$.

$$\begin{aligned}
\omega_0 &= e^{\frac{i\,\theta}{4}} \cdot e^{\frac{i\,2\cdot 0\cdot\pi}{4}} = e^{\frac{i\,\theta}{4}} \cdot e^0 = e^{i\,\frac{\theta}{4}} \\
\omega_1 &= e^{\frac{i\,\theta}{4}} \cdot e^{\frac{i\,2\cdot 1\cdot\pi}{4}} = e^{\frac{i\,\theta}{4}} \cdot e^{\frac{i\,\pi}{2}} = e^{i\,\frac{3\pi}{4}} \\
\omega_2 &= e^{\frac{i\,\theta}{4}} \cdot e^{\frac{i\,2\cdot 2\cdot\pi}{4}} = e^{\frac{i\,\theta}{4}} \cdot e^{i\,\pi} = e^{i\,\frac{5\pi}{4}} \\
\omega_3 &= e^{\frac{i\,\theta}{4}} \cdot e^{\frac{i\,2\cdot 3\cdot\pi}{4}} = e^{\frac{i\,\theta}{4}} \cdot e^{\frac{i\,3\pi}{2}} = e^{i\,\frac{7\pi}{4}}
\end{aligned}$$

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

Les 5 solutions de l'équation $x^5 - x^4 + x - 1 = 0$ sont

$$S = \left\{1, e^{i\,\frac{\theta}{4}}, e^{i\,\frac{3\pi}{4}}, e^{i\,\frac{5\pi}{4}}, e^{i\,\frac{7\pi}{4}}\right\}$$

Ou, sous forme cartésienne

$$S = \left\{1, \frac{1}{\sqrt{2}} + i\,\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\,\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\,\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} - i\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}.$$

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

Solution Ex 2.2. →2.2.

On est dans $\mathbb{R}^2$. La distance entre deux droites n'a de sens que si celles-ci sont parallèlles. Un vecteur normal de la droite a est $\mathbf{n}_a = \begin{bmatrix} 8 \\ -6 \end{bmatrix}$ et un de la droite b est $\mathbf{n}_b = \begin{bmatrix} 12 \\ -9 \end{bmatrix}$. Ces deux vecteurs sont colinéaires, car

$$\begin{bmatrix} 8 \\ -6 \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 12 \\ -9 \end{bmatrix}.$$

On en conclu que a et b sont parallèlles.

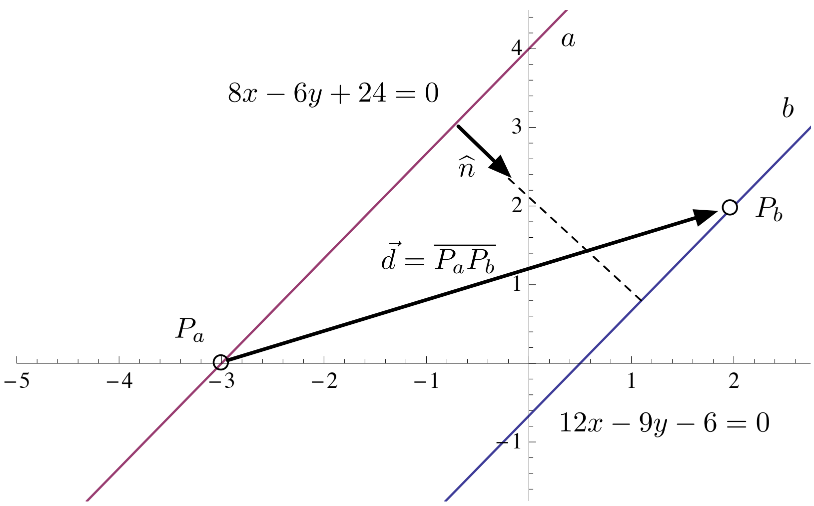


FIGURE 2.2 – Exercice 2.2

On commence par choisir deux points P_a et P_b (un dans chaque droite) et on forme le vecteur $\mathbf{d} = \overline{P_aP_b}$, qui les relie.

$$P_a = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix} \in a \quad \text{et} \quad P_b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \in b \quad \longrightarrow \quad \mathbf{d} = \overline{OP_b} - \overline{OP_a} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

La norme de la projection du vecteur $\mathbf{d}$ joignant P_a et P_b sur le vecteur unitaire normal commun aux deux droites donnera la distance qui les sépare.

Un vecteur normal de l'une des droites est par exemple $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 8 \\ -6 \end{bmatrix}$ sa norme est $||n|| = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = 10$.

Le vecteur unitaire $\widehat{\mathbf{n}}$ est donné par

$$\widehat{\mathbf{n}} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 8 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

La distance entre les droites est donnée par le produit scalaire des deux vecteurs $\mathbf{d}$ et $\widehat{\mathbf{n}}$:

$$\mathbf{d} \circ \widehat{\mathbf{n}} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{bmatrix} = \frac{14}{5}$$

Les droites sont distantes de $\frac{14}{5}$.

On peut également utiliser la formule toute prête donnant la distance d'un point $P = (p_1; p_2)$ à une droite $d = ax + by + c$,

$$\delta(d, P) = \frac{|a \cdot p_1 + b \cdot p_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

En calculant la distance du point $P_b = (2; 2)$ à la droite a : $8x - 6y + 24 = 0$ on obtient

$$\delta(a, P_b) = \frac{|8 \cdot 2 - 6 \cdot 2 + 24|}{\sqrt{8^2 + (-6)^2}} = \frac{14}{5}$$

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

également.

Solution Ex 2.3. $\rightarrow$2.3.

$$\frac{(\sqrt{3}+i)^{15}}{2^{12}(1-2i)}$$

On commence par supprimer le nombre complexe du dénominateur en amplifiant la fraction par $(1+2i)$.

$$\frac{(\sqrt{3}+i)^{15}(1+2i)}{2^{12}(1-2i)(1+2i)} = \frac{(\sqrt{3}+i)^{15}(1+2i)}{5\cdot 2^{12}},$$

puis on met $(\sqrt{3}+i)$ sous sa forme exponentielle :

Rappel :

$$(a+i\,b) = \rho e^{i\,\theta} \quad \text{avec} \quad \rho = \sqrt{a^2+b^2} \quad \text{et} \quad \theta = \begin{cases} \cos(\theta) = \frac{a}{\rho}, \\ \\ \sin(\theta) = \frac{b}{\rho}, \end{cases}$$

$$\begin{array}{lcl} (\sqrt{3}+i) & \longrightarrow & \rho = \sqrt{\sqrt{3}^2+1^2} = \sqrt{4} = 2 \\ & \longrightarrow & \theta = \begin{cases} \cos(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \sin(\theta) = \frac{1}{2}, \end{cases} \qquad \Rightarrow \quad \theta = \dfrac{\pi}{6} \\ & \longrightarrow & 2e^{i\frac{\pi}{6}} \end{array}$$

On replace $2e^{i\frac{\pi}{6}}$ dans la fraction et on simplifie :

$$\begin{aligned} \frac{\left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{15}(1+2i)}{5\cdot 2^{12}} &= \frac{2^{15}\cdot e^{i\frac{15\pi}{6}}(1+2i)}{5\cdot 2^{12}} \\ &= \frac{2^3\cdot e^{i\frac{\pi}{2}}\cdot(1+2i)}{5} \\ &= \frac{8}{5}(i)(1+2i) \\ &= \frac{8}{5}(i-2) \end{aligned}$$

Le résultat final est :

$$\frac{(\sqrt{3}+i)^{15}}{2^{12}(1-2i)} = -\frac{16}{5} + \frac{8}{5}i$$

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

Solution Ex 2.4. →2.4.
On vérifie que i est une solution du polynôme complexe :

$$\begin{aligned} x^3+(-5-6i)x^2+(-5+18i)x+13 &= i^3+(-5-6i)i^2+(-5+18i)i+13 \\ &= -i+5+6i-5i-18+13 \\ &= 0. \end{aligned}$$

i étant une solution du polynôme on peut effectuer la division polynomiale par $x-i$.

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & +(5-i)x^2 & +(-5+18i)x & +13 & \quad x-i \\ \cline{5-5} x^3 & +(0-i)x^2 & & & x^2 \ -(5+5i)x \ +13i \\ \cline{1-2} & (-5-5i)x^2 & +(-5+18i)x & & \\ & (-5-5i)x^2 & +(+5+5i)x & & \\ \cline{2-3} & & (0+13i)x & +13 & \\ & & (0+13i)x & +13 & \\ \cline{3-4} & & & 0 & \end{array}$$

Le polynôme original devient $(x-i)(x^2-(5+5i)x+13i)$. On peut factoriser la deuxième parenthèse à l'aide de la méthode du début du carré.

$$\begin{aligned} x^2-(5+5i)x+13i &= \left(x-\frac{5}{2}(1+i)\right)^2-\left(\frac{5}{2}(1+i)\right)^2+13i \\ &= \left(x-\frac{5}{2}(1+i)\right)^2-\frac{50i}{4}+13i \\ &= \left(x-\frac{5}{2}(1+i)\right)^2+\frac{i}{2} \\ &= \left(x-\frac{5}{2}(1+i)\right)^2-\left(-\frac{i}{2}\right) \end{aligned}$$

Comme on travaille avec les nombres complexes on peut calculer le nombre dont $-\frac{i}{2}$ est le carré :

$$\sqrt{-\frac{i}{2}}=\left(0-\frac{1}{2}i\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)$$

En substituant dans l'égalité précédente on obtient l'identité remarquable :

$$\left(x-\frac{5}{2}(1+i)\right)^2-\left(-\frac{i}{2}\right)=\left(x-\frac{5}{2}(1+i)\right)^2-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)^2$$

En appliquant l'identité $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ on obtient :

$$\begin{aligned} &\left(x-\frac{5}{2}(1+i)\right)^2-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)^2= \\ &\left(x-\frac{5}{2}-\frac{5}{2}i-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)\left(x-\frac{5}{2}-\frac{5}{2}i+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)= \\ &(x-(3+2i))(x-(2+3i)) \end{aligned}$$

Le polynôme initial peut donc être écrit comme un produit de 3 facteurs :

$$x^3+(-5-6i)x^2+(-5+18i)x+13=(x-i)(x-(3+2i))(x-(2+3i))=0$$

dont les solutions sont $\{i, 3+2i, 2+3i\}$.

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

Solution Ex 2.5. →2.5.

$$f(x) = \frac{3x^2 + a}{(x+1)^2}.$$

La dérivée de f est :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{6x(x+1)^2 - 2(x+1)(3x^2+a)}{(x+1)^4} \\ &= \frac{(6x(x+1) - 2(3x^2+a))}{(x+1)^3} \\ &= \frac{6x - 2a}{(x+1)^3} \end{aligned}$$

On cherche la valeur de a pour $f'(-4) = 0$.

$$f'(-4) = \frac{-24 - 2a}{-27} = \frac{2(12+a)}{27} = 0$$

La solution est $a = -12$.

Solution Ex 2.6. →2.6. Le domaine de définition est $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0;2\}$. On a donc deux asymptotes verticales d'équations $x=0$ et $x=2$. La fonction a une racine en $x=1$, elle passe par zéro en ce point. La fonction a une asymptote horizontale donnée par le calcul des limites pour $x \to \pm\infty$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{(x^2-2x)^2} &= \lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{x^2(x-2)^2} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x^2(x-2)^2} \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x(x-2)^2} = 0^{\pm}.
\end{aligned}$$

La fonction a une asymptote horizontale d'équation $y=0$. La fonction tend vers son asymptote par le bas pour $x \to -\infty$ et par le haut pour $x \to +\infty$. Il n'est pas nécessaire de faire un tableau des signes car il est évident que la fonction aura le signe du facteur $(x-1)$. Elle sera négative avant $x=1$ et positive après. Il ne reste plus qu'à dessiner le graphe. (Voir fig.2.3).

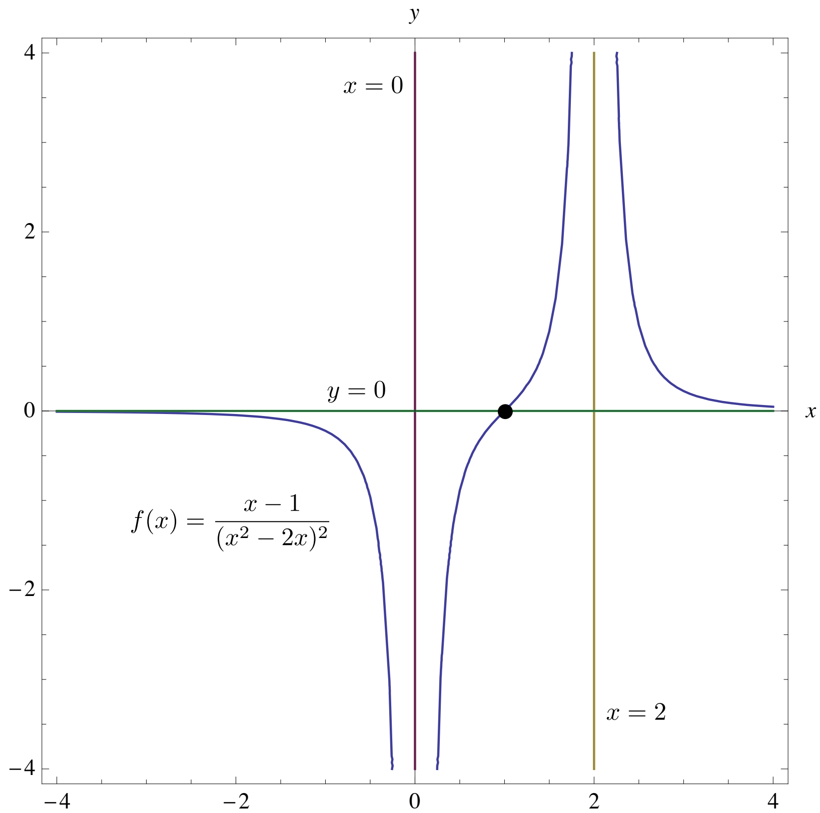


FIGURE 2.3 – Exercice 2.6

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

Solution Ex 2.7. →2.7. D'un carré $ABCD$ on connaît les coordonnées des point $A(3;4)$ et $C(1;-2)$. Déterminer B et D. Le point milieu M de la diagonale AC du carré est $(2;1)$. Le vecteur joignant ce milieu à A est $\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$. Les deux vecteurs orthogonaux à ce dernier sont $\begin{bmatrix}-3\\1\end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}$. En sommant ces deux vecteurs à $\overrightarrow{OM}$ on obtient $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OD}$,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OB} &= \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-3\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}\\ \overrightarrow{OD} &= \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\0\end{bmatrix}\end{aligned}$$

(Voir fig.2.7).

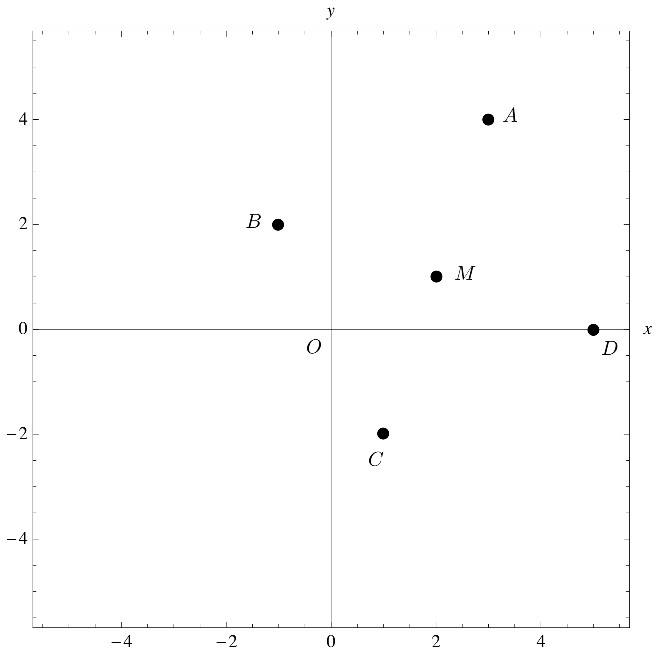


FIGURE 2.4 – Exercice 2.7

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

Solution Ex 2.8. →2.8.

1. 1ère méthode (en utilisant le formulaire)
La formule qui donne la distance δ du point $P(p_1; p_2)$ à la droite $d: \ ax + by + c = 0$ est :
$$\delta(P; d) = \frac{|ap_1 + bp_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$
En utilisant les valeurs du problème $P(0; 0)$ et $d : 2x - 3y + 5 = 0$, on obtient :
$$\delta = \frac{5}{\sqrt{4+9}} = \frac{5}{\sqrt{13}} \approx 1.37.$$
La distance de la droite à l'origine est $\frac{5}{\sqrt{13}}$.

2. 2ème méthode* (un peu plus "artisanale")

Rappel(s) 2.2.1. *La projection d'un vecteur* **a** *sur un vecteur* **b** *est le vecteur :*
$$\text{proj}_{\mathbf{b}}\, \mathbf{a} = \frac{\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}}{\mathbf{b} \bullet \mathbf{b}}\, \mathbf{b}$$
On peut récrire :
$$\begin{aligned} \text{proj}_{\mathbf{b}}\, \mathbf{a} &= \frac{\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}}{\mathbf{b} \bullet \mathbf{b}}\, \mathbf{b} \\ &= \frac{\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}}{||b||^2}\, \mathbf{b} \\ &= \frac{\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}}{||b||}\, \frac{\mathbf{b}}{||b||} \\ &= \frac{\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}}{||b||}\, \hat{b} \end{aligned}$$
La norme de la projection est la grandeur qui nous intéresse dans cette exercice. Elle vaut :
$$\left| \frac{\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}}{||b||} \right|.$$
On va donc projeter un vecteur, joignant l'origine à un point quelconque de la droite,. sur le vecteur normal. Puis on va en calculer la norme.
Le vecteur normal de la droite est $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ et $P\left(-\frac{5}{2}; 0\right)$ est un point de la droite. Le vecteur $\begin{bmatrix} \frac{-5}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$ est le vecteur joignant l'origine au point P. La distance cherchée est donc :
$$\left| \frac{\begin{bmatrix} \frac{-5}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}}{|| \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} ||} \right| = \frac{5}{\sqrt{13}}$$
comme auparavant.

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

Solution Ex 2.9. $\rightarrow$2.9.
Déterminer les coordonnée du point A', symétrique de $A(4;3)$ par rapport à la droite $g:\ x+2y-4=0$. La distance δ du point A à la droite g est :

$$\delta(A;g)=\frac{|x+2y-4|}{\sqrt{1^2+2^2}} \quad \xrightarrow{(x;y)=(4;3)} \quad \frac{4+2(3)-4}{\sqrt{5}}=\frac{6}{\sqrt{5}}.$$

La valeur obtenue au numérateur avant d'en prendre la valeur absolue est positive, cela indique que le point A se trouve donc au-dessus de la droite g.

L'idée est la suivante : le nouveau point A' se situera forcément à la même distance de la droite g que le point A. Si on ajoute au vecteur $\overrightarrow{OA}$ un vecteur de longueur 2δ dirigé "vers le bas" selon la normale à la droite, on aura notre point A'. Le vecteur normal unitaire dirigé vers le bas est $\begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix}$. Le vecteur normal unitaire $\hat{n}$ est trouvé en divisant chacune des composantes par la norme :

$$\hat{n}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix}$$

Le vecteur $\overrightarrow{OA'}$ est donné par

$$\overrightarrow{OA'}=\overrightarrow{OA}+2\cdot\delta\cdot\hat{n}=\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}+2\cdot\frac{6}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}8\\-9\end{bmatrix}$$

Le point est $A'=\left(\frac{8}{5};-\frac{9}{5}\right)$.

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

Solution Ex 2.10. →2.10.
La distance d'un point $P(x;y)$ de la parabole $y = x^2 - 1$ à l'origine des coordonnées est donnée par le théorème de Pythagore (Voir fig.)

$$d(x) = \sqrt{(x^2-1)^2 + x^2} = \sqrt{x^4 - 2x^2 + 1 + x^2} = \sqrt{x^4 - x^2 + 1}$$

Le domaine de validité de la variable x est $\mathbb{R}$. Pour déterminer le point le plus proche de l'origine il faut égaler la dérivée de la fonction $d(x)$ et chercher le(s) point(s) où elle s'annule.

$$d'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(4x^3 - 2x)}{\sqrt{x^4 - x^2 + 1}} = \frac{2x^3 - x}{\sqrt{x^4 - x^2 + 1}}$$

$$d'(x) = 0 \quad \xrightarrow{\leftrightarrow} \quad x(2x^2 - 1) = 0 \quad \xrightarrow{\leftrightarrow} \quad x \in \{0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\}.$$

Il faut à présent déterminer lesquels parmi ces points sont des minimums ou des maximums, le plus simple est de faire le tableau des signes de la fonction,

$$d'(x) = \frac{2x^3 - x}{\sqrt{x^4 - x^2 + 1}} = \frac{x(2x^2 - 1)}{\sqrt{x^4 - x^2 + 1}}$$

x		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$2x^2 - 1$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$\sqrt{x^4 - x^2 + 1}$	$+$		$+$		$+$		$+$
$d'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

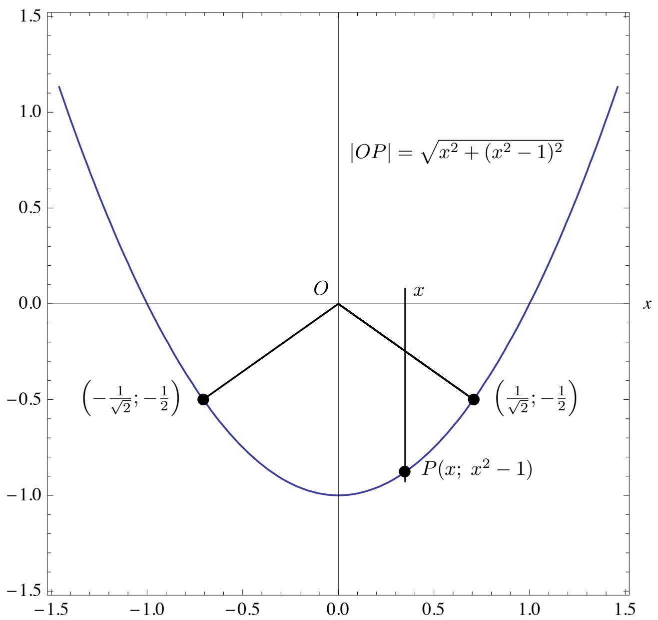


FIGURE 2.5 – Exercice 2.10

On observe deux minimums en $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ et un maximum en $x = 0$. Les points cherchés sont :

$$(x; x^2 - 1) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{2}\right) \text{ et } \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{2}\right)$$

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

Solution Ex 2.11. →2.11.
Une usine confectionne des boîtes cylindrique en tôle d'un contenu de 1000 cm3. Montrer que la surface totale d'une telle boîte peut être donnée par

$$A(r) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$$

Déterminer le rayon qui minimise la surface de la boîte.
On commence par écrire l'aire d'une boîte cylindrique sous la forme d'une fonction des deux variables r (rayon de la base) et h (hauteur du cylindre) :

$$A(r,h) = 2 \cdot \pi r^2 + 2\pi r \cdot h$$

Si le volume du cylindre est de 1000 alors on peut poser l'équation implicite des deux variables r et h suivante et en déduire une expression pour h

$$1000 = \pi r^2 \cdot h \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad h = \frac{1000}{\pi r^2}$$

En substituant h dans la fonction de deux variables, on transforme celle-ci en une fonction de la seule variable r :

$$A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi \cdot r \cdot \left(\frac{1000}{\pi r^2}\right) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$$

Le domaine de validité de la variable r est $D_v = \mathbb{R}_+^*$. La valeur de r qu'il faut utiliser pour optimiser la surface est la solution de l'équation $A'(r) = 0$.

$$A'(x) = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} = \frac{4\left(\pi r^3 - 500\right)}{r^2} = 0 \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad r_m = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}.$$

Il faut à présent s'assurer que la valeur obtenue est bien une valeur qui est mimimum. Pour changer de méthode on va utiliser le critère de la dérivée seconde. On dérive la dérivée !

$$A''(x) = \frac{4000}{r^3} + 4\pi \qquad \xrightarrow{\looparrowright} \qquad A''(r_m) = A''\left(\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}\right) = \frac{\pi}{8} > 0$$

La valeur de la dérivée seconde au point critique r_m est positive, la fonction $A(r)$ est convexe en ce point. Le point critique est un minimum. La boîte à une surface minimum pour la valeur $r_m = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$. Celle-ci vaut

$$A\left(\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}\right) = 300\sqrt[3]{2\pi}$$

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

Solution Ex 2.12. →2.12.
La fonction à optimiser est celle qui donne le périmètre d'un rectangle en fonction de sa longueur a et de sa largeur b :

$$P(a,b) = 2a + 2b$$

La contrainte nous est donnée par la sufrace fixée à 225,

$$225 = ab \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad a = \frac{225}{b}$$

En substituant la valeur de a en fonction de celle de b dans la fonction à optimiser, celle-ci devient une fonction d'une seule variable :

$$P(a,b) = 2a + 2b \quad \xrightarrow{a\,=\,\frac{225}{b}} \quad P(b) = \frac{450}{b} + 2b \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad P(b)$$

Le domaine de validité des variables a et b est $\mathbb{R}_+$. On dérive $P(b)$ et on égale la dérivée obtenue à zéro afin de trouver un point critique

$$P'(b) = 2 - \frac{450}{b^2} = 0 \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad b = \pm 15$$

On ne garde que la solution positive, $b = 15$ et de ce fait $a = \frac{225}{15} = 15$ également. La symétrie du problème laissait deviner cette égalité. Le test de la dérivée seconde nous démontre que $b = 15$ est un minimum car

$$P''(b) = \frac{900}{b^3} \quad \xrightarrow{b\,=\,15} \quad P''(15) = \frac{4}{15}$$

est plus grand que zéro ce qui signifie que la fonction P est convexe en $b = 15$ qui de ce fait est un minimum.

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

Solution Ex 2.13. $\rightarrow$2.13.
On remarque que la distance entre chacun des sommets du triangle est la même, en effet :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad ||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}\\
\overrightarrow{CB} &= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad ||\overrightarrow{CB}|| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}\\
\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad ||\overrightarrow{AC}|| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}
\end{aligned}$$

La distance entre les sommets étant la même, le triangle est un triangle équilatéral. Le centre du cercle circonscrit à un triangle est donné par l'intersection de ces médiatrices. Dans le cas du triangle équilatéral, le centre des cercles circonscrit et inscrit correspond avec le centre de gravité (barycentre). Le centre de gravité G est obtenu en effectuant la "moyenne" des vecteurs lieu reliant l'origine à chacun des sommets.

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) = \frac{1}{3}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}.$$

Le centre du cercle est le point $\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{bmatrix}$.

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

Solution Ex 2.14. →2.14. On commence par récrire l'équation du cercle sous sa forme "standard", qui permet d'en déduire directement le centre et le rayon :

$$\begin{aligned} 4(x^2+y^2-4x+2y+1)=0 \quad &\overset{\looparrowright}{\longrightarrow} \quad x^2+y^2-4x+2y+1=0 \\ &\overset{\looparrowright}{\longrightarrow} \quad (x-2)^2-4+(y+1)^2-1+1=0 \\ &\overset{\looparrowright}{\longrightarrow} \quad (x-2)^2+(y+1)^2=4 \end{aligned}$$

Le centre C du cercle est le point $C(2;-1)$ et son rayon est de $r=\sqrt{4}=2$.

Rappel(s) 2.2.2. *On a la situation générale suivante (fig.2.6) :*

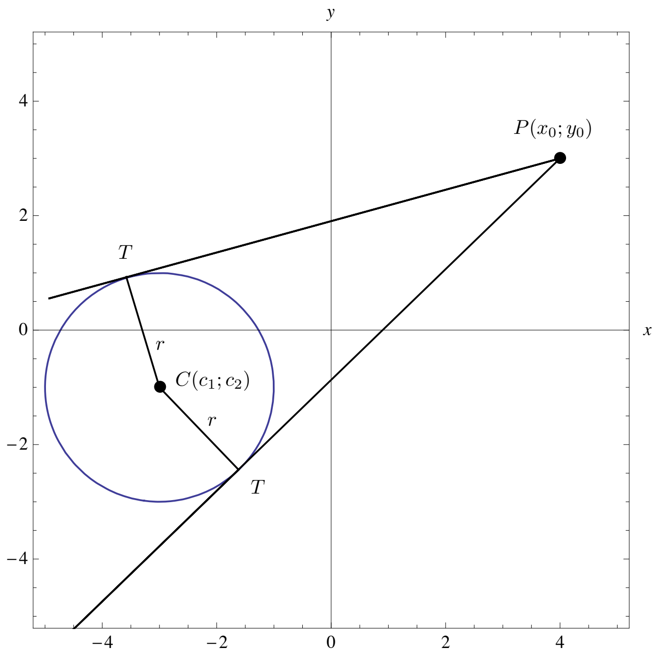


FIGURE 2.6 – Exercice 2.14

Une droite généralisée peut être vue comme ayant l'équation $y=mx+q$. La droite généralisée passant par le point $P(x_0;y_0)$ doit satisfaire $y_0=mx_0+q$, d'où $q=y_0-mx_0$. On peut alors écrire toute droite passant par $P(x_0;y_0)$ comme :

$$y=mx+y_0-mx_0 \quad \overset{\looparrowright}{\longrightarrow} \quad y-y_0-mx+mx_0=0 \quad \overset{\looparrowright}{\longrightarrow} \quad y-mx+mx_0-y_0=0$$

On sait la distance de la droite au centre du cercle est r, donc en utilisant la formule qui donne la distance droite-point $\frac{|ap_1+bp_2+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=r$ on obtient :

$$\frac{|c_2-mc_1+mx_0-y_0|}{\sqrt{m^2+1}}=r \quad \overset{\looparrowright}{\longrightarrow} \quad (c_2-y_0)-m(c_1-x_0)=\pm r\sqrt{m^2+1}$$

En résolvant cette équation pour m on obtient les pentes m_1 et m_2 des deux tangentes au cercle passant par le point P.

En appliquant la formule ci-dessus aux données de l'exercice, à savoir $C(2;-1)$, $P(0;0)$ et $r=2$:

$$(c_2-y_0)-m(c_1-x_0)=\pm r\sqrt{m^2+1} \quad \overset{\looparrowright}{\longrightarrow} \quad (-1)-m(2)=\pm 2\sqrt{m^2+1}$$

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

on a les deux équations :

$$
\begin{array}{rcl}
-1-2m = 2\sqrt{m^2+1} & \xrightarrow{()^2} & 4m^2+4m+1 = 4m^2+4 \\
 & \xrightarrow{\looparrowright} & m = \dfrac{3}{4} \\
-1-2m = -2\sqrt{m^2+1} & \xrightarrow{()^2} & 4m^2+4m+1 = -4m^2-4 \\
 & \xrightarrow{\looparrowright} & 8m^2+4m+5 = 0 \\
 & \xrightarrow{\looparrowright} & \text{pas de solution.}
\end{array}
$$

La solution inexistante vient de ce que l'une des tangentes au cercle est une droite verticale, autrement dit l'axe des y. La solution $m = \frac{3}{4}$ nous donne la droite $y = \frac{3}{4}x$. (Voir fig.2.7).

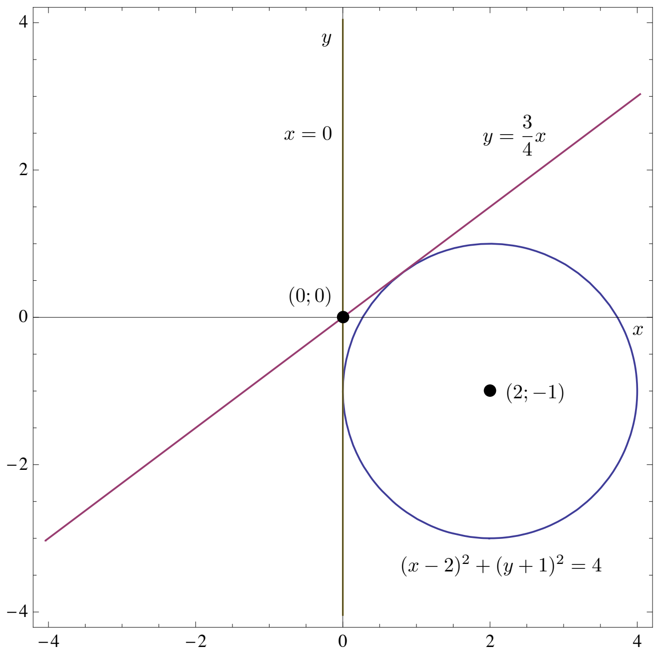


FIGURE 2.7 – Exercice 2.14

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

Solution Ex 2.15. →2.15.
On récrit l'équation du cercle afin de pouvoir en déduire son centre et son rayon :

$$(x-3)^2 - 9 + (y+1)^2 - 1 - 15 = 0 \quad \xrightarrow{\Leftrightarrow} \quad (x-3)^2 + (y+1)^2 = 25$$

Le centre du cercle est le point $C = (3; -1)$ et le rayon r vaut 5.

L'équation d'une tangente au cercle parallèle à la droite g est distante de 5 du centre du cercle et a pour équation,

$$h: \ 4x + 3y + d = 0.$$

Il faut à présent trouver d (il y aura deux solutions). On utilise la formule qui donne la distance d'un point à une droite (respectivement C et h en l'occurence).

$$\delta(C;h) = \frac{|4x+3y+d|}{5} = 5 \quad \xrightarrow{(x;y)=C(3;-1)} \quad |4(3)+3(-1)+d| = 25 \quad \xrightarrow{\Leftrightarrow} \quad |9+d| = 25$$

La dernière équation a deux solutions :

$$|9+d| = 25 \Rightarrow \begin{cases} 9+d = 25 & \Rightarrow d = 16 \\ 9+d = -25 & \Rightarrow d = -34 \end{cases}$$

(Voir fig.2.8).
Les droites recherchées sont :

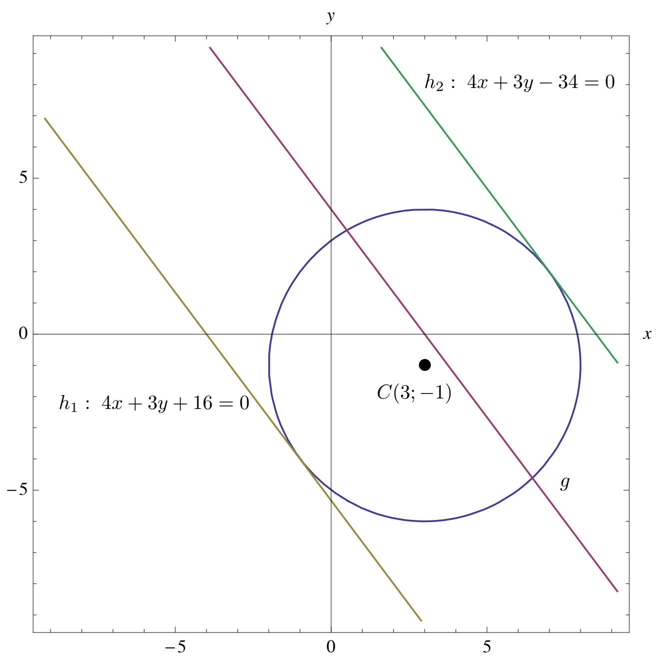


Figure 2.8 – Exercice 2.15

$$h_1: \ 4x + 3y + 16 = 0$$
$$h_2: \ 4x + 3y - 34 = 0$$

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

Solution Ex 2.16. →2.16. Montrer que le quadrilatère $A(7;0)$, $B(9;2)$, $C(5;6)$, $D(3;4)$ est un rectangle. En déterminer une équation du cercle circonscrit.
Il suffit de démontrer que les diagonales AC et BD du rectangle se coupent en leurs milieux et qu'elles ont la même longueur. Les milieux de AC et BD sont :

$$M_{AC} = \frac{1}{2} = \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}7\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}6\\3\end{bmatrix}$$
$$M_{BD} = \frac{1}{2} = \left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}9\\2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}6\\3\end{bmatrix}$$

Le point milieu de chacune des diagonales est le même, $M_{AC} = M_{BD} = M(6;3)$. (Voir fig.2.9). Il est

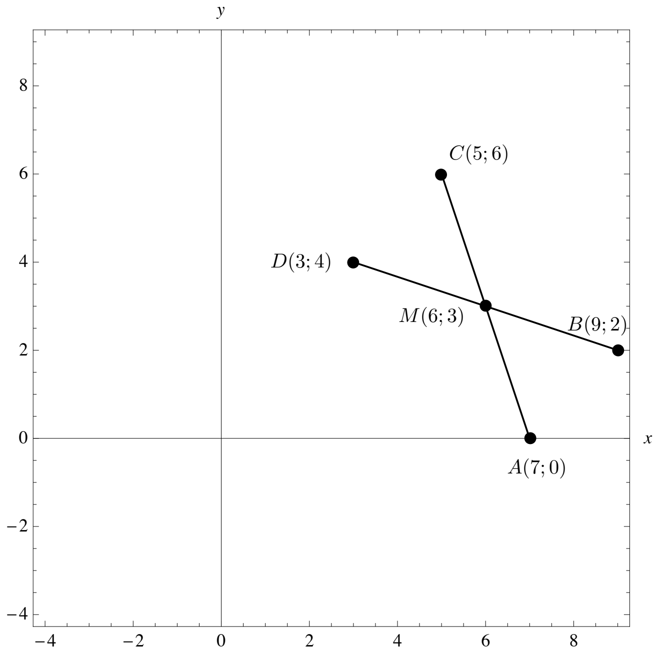


FIGURE 2.9 – Exercice 2.15

également nécessaire que les diagonales soient de même longueur :

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}7\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\6\end{bmatrix}$$
$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB} = \begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}9\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-6\\2\end{bmatrix}$$

On vérifie aisément que $||\overrightarrow{AC}|| = ||\overrightarrow{BD}|| = 2\sqrt{10}$. La preuve est faite, le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle.

Le centre du cercle circonscrit est le milieu des diagonales et le rayon la moitié de la longueur d'une diagonale.
L'équation du cercle circonscrit est :
$$(x-6)^2 + (y-3)^2 = 10.$$

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

Solution Ex 2.17. →2.17. Déterminer les équations des deux tangentes verticales au cercle

$$c : x^2 + y^2 - 6x + 10y + 33 = 0$$

La forme standard de l'équation du cercle est :

$$(x-3)^2 + (y+5)^2 = 1$$

d'où l'on déduit (par le dessin) que le centre est le point $C(3; -5)$ et le rayon 1. Les équations des tangentes verticales au cercle auront pour équation $x = 2$ et $x = 4$
(Voir fig.2.10).

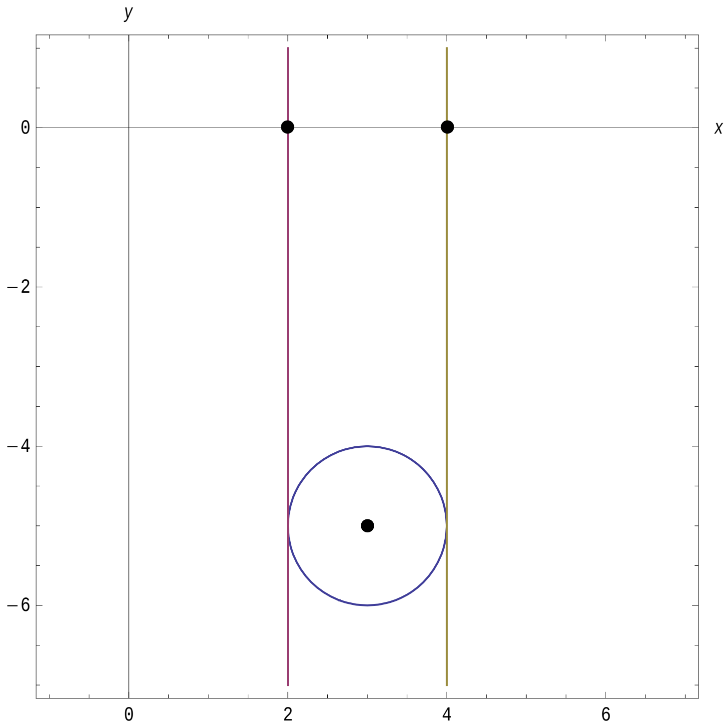


FIGURE 2.10 – Exercice 2.16

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023

Solution Ex 2.18. $\rightarrow$2.18.

1ère méthode :(pour ceux qui savent calculer !)

On commence par lister les probabilités données dans l'énoncé :

E="le client est anglais" $\rightarrow P(E) = \frac{2}{5}$,

A="le client es américain" $\rightarrow P(A) = \frac{3}{5}$,

$P(v|E) = P(\text{"La lettre est une voyelle si le client est anglais''}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$,

$P(v|A) = P(\text{"La lettre est une voyelle si le client est américains''}) = \frac{2}{5}$,

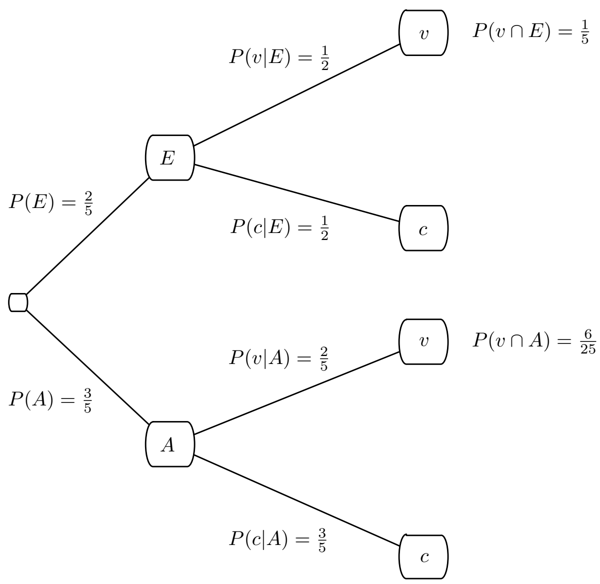
On nous demande de calculer la probabilité conditionnelle $P(E|v)$ c'est-à-dire la probabilité que le client soit anglais si on à tiré une voyelle ?

On applique la théorie des probabilités conditionnelles, le théorème de Bayes et les probabilités totales :

$$\begin{aligned}
P(E|v) = \frac{P(E\cap v)}{P(v)} & \xrightarrow{\text{Bayes}} \frac{P(v|E)P(E)}{P(v)} \\
& \xrightarrow{\text{form.prob.totales}} \frac{P(v|E)P(E)}{P(v|E)P(E)+P(v|A)P(A)} \\
P(E|v) & = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}} \\
& = \frac{5}{11}
\end{aligned}$$

La probabilité que le client soit anglais si la lettre tirée est une voyelle est $\frac{5}{11} \approx 0.455$.

2ème méthode :(pour ceux qui savent dessiner !)(Voir fig.2.11)



$P(E|v) = \frac{P(v\cap E)}{P(v\cap E)+P(v\cap A)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{5}+\frac{6}{25}} = \frac{5}{11}$

FIGURE 2.11 – Exercice 2.18

©michelsemon.ch - Cours d'appui - 2023