Exercices d'examens I

Examen écrit

Michel Semon

02/02/2023

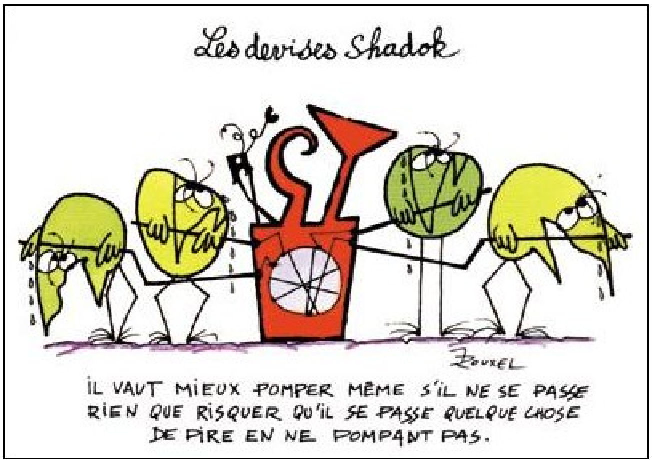

Table des matières

I Exercices d'examens **3**

1 Analyse - Exercices d'examens **4**
1.1 Introduction 4
1.2 Analyse - Exercices d'examens - Niveau standard 4
1.3 Analyse - Solutions des exercices d'examens - Niveau standard 6
1.4 Analyse - Exercices d'examens - Niveau renforcé* 20
1.5 Analyse - Solutions des exercices d'examens - Niveau renforcé 21

2 Probabilités - Exercices d'examens **30**
2.1 Probabilités - Exercices d'examens - Niveaux standard et renforcé 30
2.2 Probabilités - Solutions des exercices d'examens - Niveaux standard et renforcé 33

3 Optimisation - Exercices d'examens **46**
3.1 Introduction 46
3.2 Optimisation - Exercices d'examens - Niveau standard 46
3.3 Optimisation - Solutions des exercices d'examens - Niveau standard 47
3.4 Optimisation - Exercices d'examens - Niveau renforcé 49
3.5 Optimisation - Solutions des exercices d'examens - Niveau renforcé 50

4 Trigonométrie - Logarithme - Analyse - Divers **51**
4.1 Divers - Analyse - Niveau standard 51
4.2 Divers - Trigonométrie - Niveau standard 52
4.3 Divers - Logarithme - Niveau standard 53
4.4 Solutions - Divers - Analyse - Niveau standard 54
4.5 Solutions - Divers - Trigonométrie - Niveau standard 58
4.6 Solutions - Divers - Logarithme - Niveau standard 62

5 Géométrie - Exercices d'examens **65**
5.1 Géométrie - Exercices d'examens - Niveau standard 65
5.2 Géométrie - Solutions des exercices d'examens - Niveau standard 66
5.3 Géométrie - Exercices d'examens - Niveau renforcé 73
5.4 Géométrie - Solutions des exercices d'examens - Niveau renforcé 74

Première partie

Exercices d'examens

Chapitre 1

Analyse - Exercices d'examens

1.1 Introduction

Dans cette brochure, vous trouverez beaucoup d'exemples d'exercices qui ont été donnés lors de sessions précédentes dans diverses écoles du canton de Vaud principalement. Le cas échéant, le gymnase et l'année sont donnés.

1.2 Analyse - Exercices d'examens - Niveau standard

Ex 1.1. (Burier - 2010)
On considère la fonction

$$f(x) = \frac{40}{(x+2)^2}$$

ainsi que les droites $x = 0$ et $x = 6$. Soit D le domaine fermé limité par la fonction f, les deux droites et l'axe des abscisses.

1. Esquisser le domaine D.
2. Calculer la valeur exacte de l'aire de D.

Solution

Ex 1.2. (Chamblandes - 2009)
Soit les fonctions f et g définies par

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 6x^2 + 9x \\ g(x) &= -3x^2 + 9x \end{aligned}$$

1. Étudier le signe et la croissance de f.
2. Déterminer les points d'intersection du graphe de f et de celui de g.
3. Représenter la région limitée par les graphes de f et de g. Calculer son aire.

Solution

Ex 1.3. (Yverdon - 2009)
Soit la fonction réelle donnée par :

$$f(x) = e^{2-\frac{x}{3}} + \frac{1}{2}x$$

1. Calculer la dérivée de f et étudier son signe.
2. Calculer les coordonnées de ses éventuels extrema, approchées au millième.
3. La droite d'équation $y = \frac{1}{2}x$ est elle une asymptote oblique de la courbe $y = f(x)$ pour x tendant vers l'infini ? Justifier la réponse.
4. Calculer l'aire du domaine plan borné délimité par Oy, la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x$, le graphe de f et la droite d'équation $x = b$, $b > 0$.

5. Vers quelle valeur cette aire tend-elle lorsque $b \to \infty$?

Solution

Ex 1.4. (Nyon - Préparation 2013)
Faire l'étude de la fonction

$$f(x) = \frac{-e^{2x} + 5e^{x} - 4}{e^{2x} + 2}$$

Solution

Ex 1.5. (Nyon - Préparation 2013) Soit la fonction :

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + x - 6}$$

1. Faire l'étude complète.
2. Donner une équation de la tangente au graphe en $x = -2$.

Solution

Ex 1.6. (Nyon - Préparation 2013) Soit la fonction donnée par $f(x) = e^{x+1} + e^{x} + e^{-x}$. Déterminer le signe de f ainsi que ses extrema.

Solution

Ex 1.7. (Nyon - Juin 2011)
Soit f la fonction donnée par $f(x) = \dfrac{x^3}{(x+3)(x+4)^2} = \dfrac{x^3}{x^3 - 5x^2 - 8x + 48}$.

1. Etudier la fonction.
2. Esquisser la fonction $g(x) = \ln(f(x))$.

Solution

Ex 1.8. (Auguste Piccard - Juin 2011) On donne la fonction

$$f(x) = \frac{-3x^2 - 12x}{x^2 - 4x + 4}$$

1. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ a une solution double qu'on précisera.
2. Etudier la fonction f.
3. Donner l'équation de la tangente au graphe en $O(0;0)$.
4. Vérifier que $f(x) = -3 + \frac{-24}{(x-2)} + \frac{-36}{(x-2)^2}$.
5. En déduire l'aire du domaine borné limité par le graphe de f et l'axe Ox.
6. On considère la fonction $g(x) = \ln(f(x))$ dont l'ensemble de départ est l'intervalle ouvert $]-4;0[$.
7. Montrer que g a un zéro double que l'on calculera.
8. Donner les équations des asymptotes de g.
9. Déduire de la question 2 l'existence pour g d'un extremum unique que l'on précisera.

Solution

1.3 Analyse - Solutions des exercices d'examens - Niveau standard

Solution Ex 1.1. (Burier - 2010) →1.1.
Le domaine de définition de f est $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-2\}$ et comme

$$\lim_{x\to 2^\pm} \frac{40}{(x+2)^2} = +\infty$$

on en déduit une asymptote verticale en -2. On peut voir f comme la fonction initiale $\frac{1}{x^2}$ que l'on a translaté de deux unités vers la gauche et multipliée par 40 (voir FIGURE 1.1). L'aire de la surface hachurée est obtenue

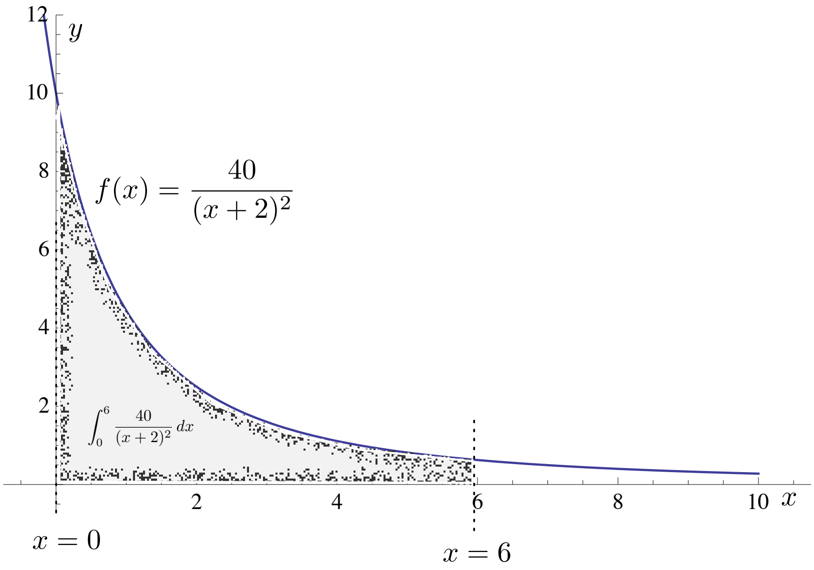

FIGURE 1.1 – Exercice 1.1

en effectuant l'intégrale définie

$$\int_0^6 \frac{40}{(x+2)^2}\,\mathrm{d}x = 40 \cdot \int_0^6 (x+2)^{-2}\,\mathrm{d}x$$

dont la solution est

$$40 \cdot \left.\frac{(x+2)^{-1}}{-1}\right|_0^6 = -\left.\frac{40}{(x+2)}\right|_0^6 = -5 - (-20) = 15$$

Solution Ex 1.2. (Chamblandes - 2009) →1.2.

1. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x = x(x-3)^2$
   Le signe de f est le même que celui de x, car le facteur $(x-3)^2$ est toujours positf. La fonction est négative sur $\mathbb{R}_-$ et positive sur $\mathbb{R}^+$. La dérivée est

   $$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2) - 4x + 3 = 3(x-1)(x-4).$$

   La fonction dérivée est une parabole convexe (le coefficient de x^2 est positif), qui passe par zéro en $x = 1$ et $x = 4$. Il y a des extremum en $x = 1$ et $x = 4$. Une parabole possède une convexité constante, donc on élimine la possibilité d'un palier. La parabole étant convexe, son signe est négatif entre 1 et 4, positif partout ailleurs. La fonction f est croissante jusqu'à $x = 1$, décroissante jusqu'à $x = 4$ et croissante à nouveau ensuite. Il y a un maximum en $x = 1$ et un minimum en $x = 4$. (On peut également faire un tableau des signes).
2. Les points d'intersection entre f et g sont obtenus en égalant leur différence à zéro.

   $$f - g = 0 \quad \longrightarrow \quad (x^3 - 6x^2 + 9x) - (-3x^2 + 9x) = x^3 - 3x^2 = x^2(x-3) = 0.$$

   On en déduit que les graphes se coupent en 0 et 3. Comme les deux courbes sont des polynômes de degré différent qui tendent vers $\pm\infty$ lorsque $x \to \pm\infty$ on en déduit que seule l'aire se situant entre 0 et 3 a une valeur finie.
3. L'aire de la surface qui nous intéresse est donnée par l'intégrale définie

   $$\left|\int_0^3 (f-g)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_0^3 x^3 - 3x^2\,\mathrm{d}x\right| = \left|\frac{x^4}{4} - x^3\Big|_0^3\right| = \left|-\frac{27}{4}\right| = \frac{27}{4}.$$

   Finalement le graphe (FIGURE 1.2) :

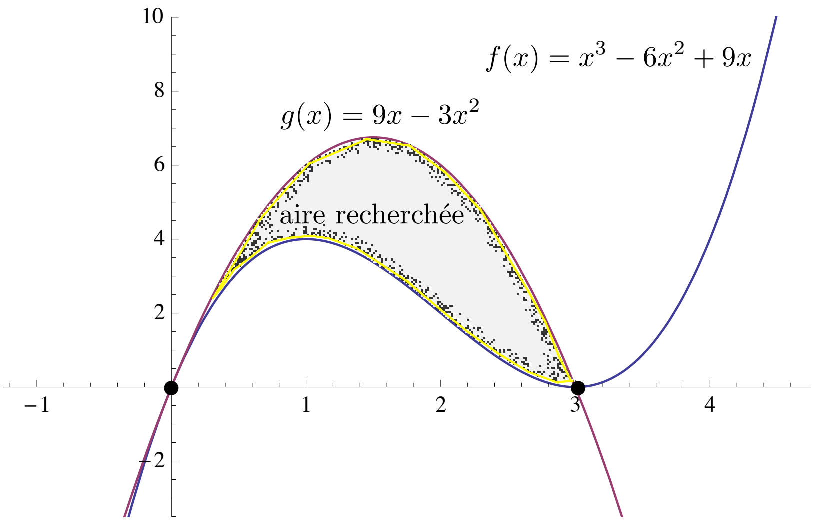

FIGURE 1.2 – Exercice 1.2

Solution Ex 1.3. (Yverdon - 2009) →1.3.

1. Calcul de la dérivée de f :

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{2-\frac{x}{3}}\left(-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{6}e^{-\frac{x}{3}}\left(3e^{\frac{x}{3}}-2e^{2}\right) \end{aligned}$$

   En appliquant les propriétés de la fonction exponentielle (en l'occurrence $e^{(\text{n'importe quoi})}>0$), on peut affirmer que le terme $\frac{1}{6}e^{-\frac{x}{3}}$ sera toujours positif. Le signe dépendra donc de la parenthèse. Il n'est pas nécessaire de faire un tableau des signes, la parenthèse est nulle pour

$$3e^{\frac{x}{3}}-2e^{2}=0.$$

   On calcule la valeur pour laquelle x s'annule

$$\begin{aligned} 3e^{\frac{x}{3}}-2e^{2}=0 \quad &\xrightarrow{\looparrowright} \quad 3e^{\frac{x}{3}}=2e^{2} \\ &\xrightarrow{\looparrowright} \quad e^{\frac{x}{3}}=\frac{2}{3}e^{2} \\ &\xrightarrow{\text{logarithme}} \quad \frac{x}{3}=\ln\left(\frac{2}{3}e^{2}\right) \\ &\xrightarrow{\looparrowright} \quad x=3\ln\left(\frac{2}{3}e^{2}\right)=3\ln\left(\frac{2}{3}\right)+6=4.7836=4.784 \end{aligned}$$

   On a un point critique en $x=4.784$. Pour savoir son type on peut utiliser la dérivée seconde de f :

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{2-\frac{x}{3}}+\frac{1}{2}x \\ f'(x) &= \frac{1}{2}-\frac{1}{3}e^{2-\frac{x}{3}} \\ f''(x) &= \frac{1}{9}e^{2-\frac{x}{3}} \end{aligned}$$

   La dérivée seconde est toujours positive, f est une fonction convexe, donc le point critique $x=4.784$ est un minimum d'ordonnée $f(4.784)=3,892$. La fonction f décroit jusqu'à ce point puis croît ensuite pour $x\to\infty$.

2. Pour que la droite d d'équation $d(x)=\frac{x}{2}$ et la fonction f aient un comportement asymptotique, il faut que la limite de leur différence pour $x\to\infty$ soit nulle,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} f(x)-d(x) &= \lim_{x\to\infty} e^{2-\frac{x}{3}}+\frac{x}{2}-\frac{x}{2} \\ &= \lim_{x\to\infty} e^{\left(2-\frac{x}{3}\right)} \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{e^{2}}{e^{\frac{x}{3}}} \\ &= \frac{e^{2}}{\lim_{x\to\infty} e^{\frac{x}{3}}}=0 \end{aligned}$$

   On remarquera également que la limite

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} f'(x) &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}e^{2-\frac{x}{3}}\right) \\ &= \frac{1}{2}-\frac{1}{3}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^{\left(\frac{x}{3}-2\right)}} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

   Cette valeur confirme que la pente à l'infini de f est la même que celle de d. d est une asymptote de f.

3. Pour le moment on garde la valeur b comme borne supérieure de l'intégrale, on la remplacera par ∞ au point 5. On calcule l'intégrale de la fonction $(f-d)$ de 0 à b.

$$\begin{aligned}\int_0^b (f-d)\,\mathrm{d}x &= \int_0^b \left(e^{2-\frac{x}{3}}\right)\mathrm{d}x \\ &= -3e^{2-\frac{x}{3}}\Big|_0^b \\ &= -3e^{2-\frac{b}{3}}+3e^2 \\ &= 3e^2\left(1-e^{-\frac{b}{3}}\right)\end{aligned}$$

4. Pour trouver la valeur de l'intégrale, on calcule la limite

$$\lim_{b\to\infty} 3e^2\left(1-e^{-\frac{b}{3}}\right)=3e^2$$

qui est la valeur demandée.

Solution Ex 1.4. →1.4.
Étudier : $f(x) = \frac{-e^{2x}+5e^{x}-4}{e^{2x}+2}$
L'étude d'une fonction se fait d'après cette liste (a peu près !)

1. Domaine de définition et $f(0)$:
2. Parité :
3. Asymptotes verticales. Trous :
4. Zéros et signe de la fonction (tableau des signes.) :
5. Asymptotes horizontales ou obliques. :
6. Extremums et paliers. :
7. Étude de la croissance de f (tableau des signes de la dérivée) :
8. Graphe :

1. Domaine de définition et $f(0)$:
   La fonction ne s'annulle pas au dénominateur, car le terme e^{2x} est toujours positif. Le domaine de définition est $\mathbb{R}$.
   $$f(0) = 0.$$
2. Parité :
   Le domaine de définition étant symétrique, il faut tester la parité.
   La fonction n'est pas paire, car $f(x) \neq f(-x)$.
   $$\begin{aligned} f(-x) = \frac{-e^{2x}+5e^{x}-4}{e^{2x}+2} &= \frac{-e^{-2x}+5e^{-x}-4}{e^{-2x}+2} \\ &= \frac{-\frac{1}{e^{2x}}+\frac{5}{e^{x}}-4}{\frac{1}{e^{2x}}+2} \\ &= \frac{\frac{-1+5e^{x}-4e^{2x}}{e^{2x}}}{\frac{1+e^{2x}}{e^{2x}}} \\ &= \frac{-4e^{2x}+5e^{x}-1}{e^{2x}+1} \\ &\neq f(x) \end{aligned}$$
   Pour voir qu'elle n'est pas impaire non plus on reprend la valeur de $f(-x)$ ci-dessus et on la multiplie par -1.
   $$\begin{aligned} f(-x)\cdot(-1) = -f(-x) &= -\left(\frac{-4e^{2x}+5e^{x}-1}{e^{2x}+1}\right) \\ &= \frac{4e^{2x}-5e^{x}+1}{e^{2x}+1} \\ &\neq f(x). \end{aligned}$$
   La fonction est quelconque.
3. Asymptotes verticales. Trous :
   Il n'y a ni asymptotes verticales ni trou, car le domaine de définition est $\mathbb{R}$.
4. Zéros et signe de la fonction (tableau des signes.) :
   On cherche les valeurs pour lesquelles le numérateur s'annulle. En substituant $e^{x} = y$ dans le numérateur, on obtient
   $$-e^{2x}+5e^{x}-4 \quad \xrightarrow{e^{x}=y} \quad -y^{2}+5y-4 = -(y-4)(y-1)$$

La substitution retour donne

$$-(y-4)(y-1) \quad \xrightarrow{y=e^x} \quad -(e^x-1)(e^x-4).$$

Le numérateur s'annule pour $e^x - 1 = 0$ et $e^x - 4 = 0$.
Les solutions sont :

$$\begin{array}{lclcl} e^x - 1 = 0 & \xrightarrow{\looparrowright} & e^x = 1 & \xrightarrow{\looparrowright} & x = 0 \\ e^x - 4 = 0 & \xrightarrow{\looparrowright} & e^x = 4 & \xrightarrow{\looparrowright} & x = \ln(4) \end{array}$$

La fonction s'annule en $x = 0$ et $x = \ln(4)$.
Le tableau des signes de

$$f(x) = \frac{-(e^x-1)(e^x-4)}{e^2x+2}$$

est

x		0		$\ln(4)$	
-1	$-$		$-$		$-$
$e^x - 1$	$-$	0	$+$		$+$
$e^x - 4$	$-$		$-$	0	$+$
$(x-2)^2$	$+$		$+$		$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

5. Asymptotes horizontales ou obliques. :
   La fonction ne possède pas d'asymptotes obliques, car le degré de e^x est le même au numérateur qu'au dénominateur, par contre elles possèdent des asymptotes horizontales.
   Les asymptotes horizontales et se calculent en effectuant les limites

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \text{ et } \lim_{x\to-\infty} f(x)$$

   qui valent

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \frac{-e^{2x}+5e^x-4}{e^{2x}+2} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{-e^{2x}+5e^x-4}{e^{2x}}}{\frac{e^{2x}+2}{e^{2x}}} \\ &= \frac{-1+0-0}{1+0} = -1 \\ \lim_{x\to-\infty} \frac{-e^{2x}+5e^x-4}{e^{2x}+2} &= \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{1}{e^{2x}}+\frac{5}{e^x}-4}{\frac{1}{e^{2x}}+2} \\ &= \frac{-0+0-4}{0+2} = -2 \end{aligned}$$

   On remarque que les asymptotes horizontales sont différentes à gauche et à droite.
6. Extremums et paliers. :
   La dérivée de $f(x)$ est

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{5e^x-2e^{2x}}{e^{2x}+2} - \frac{2e^{2x}\left(5e^x-e^{2x}-4\right)}{\left(e^{2x}+2\right)^2} \\ &= \frac{e^x\left(4e^x-5e^{2x}+10\right)}{\left(e^{2x}+2\right)^2} \end{aligned}$$

   En égalant la dérivée à zéro on obtient les points stationnaires qui sont

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x\left(4e^x-5e^{2x}+10\right)}{\left(e^{2x}+2\right)^2} \\ &= \frac{-e^x\left(5e^{2x}-4e^x-10\right)}{\left(e^{2x}+2\right)^2} = 0 \end{aligned}$$

Le terme $-e^x$ ne peut pas s'annuler donc il faut chercher les solutions de

$$\left(5e^{2x} - 4e^x - 10\right) = 0$$

Commençons par diviser le tout par 5, on obtient :

$$e^{2x} - \frac{4}{5}e^x - 2 = 0$$

On applique la méthode du début du carré au terme de gauche :

$$\begin{aligned}
\left(e^x - \frac{2}{5}\right)^2 - \frac{4}{25} - 2 &= \left(e^x - \frac{2}{5}\right)^2 - \left(\frac{3\sqrt{6}}{5}\right)^2 \\
&= \left(e^x - \frac{1}{5}\left(2 + 3\sqrt{6}\right)\right)\left(e^x + \frac{1}{5}\left(3\sqrt{6} - 2\right)\right)
\end{aligned}$$

En posant

$$\left(e^x - \frac{1}{5}\left(2 + 3\sqrt{6}\right)\right)\left(e^x + \frac{1}{5}\left(3\sqrt{6} - 2\right)\right) = 0$$

On voit que seule la parenthèse de gauche possède une solution dans $\mathbb{R}$. La solution de $\left(e^x - \frac{1}{5}\left(2 + 3\sqrt{6}\right)\right) = 0$ est

$$e^x = \left(\frac{1}{5}\left(2 + 3\sqrt{6}\right)\right) \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad x = \ln\left(\frac{1}{5}\left(2 + 3\sqrt{6}\right)\right) = 0.6257.$$

Il n'est pas nécessaire de faire un tableau des signes de la dérivée, car on voit tout de suite que son signe sera le signe opposé du facteur $(x - 0.6257)$, c.-à-d. positif jusqu'au point stationnaire et négatif ensuite. Le point $x = 0.6257$ est donc un maximum.

Intersections éventuelles de la fonction et de ses asymptotes :

(a) On cherche $f(x) = -1$.

$$\begin{aligned}
\frac{-e^{2x} + 5e^x - 4}{e^{2x} + 2} = -1 \quad &\xrightarrow{\looparrowright} \quad -e^{2x} + 5e^x - 4 = -e^{2x} - 2 \\
&\xrightarrow{\looparrowright} \quad 5e^x = 2 \\
&\xrightarrow{\looparrowright} \quad x = \ln\left(\frac{2}{5}\right) \approx -0.91
\end{aligned}$$

Le graphe de f coupe l'asymptote horizontale $y = -1$ en $x \approx -0.91$.

(b) On cherche $f(x) = -2$.

$$\begin{aligned}
\frac{-e^{2x} + 5e^x - 4}{e^{2x} + 2} = -2 \quad &\xrightarrow{\looparrowright} \quad -e^{2x} + 5e^x - 4 = -2e^{2x} - 4 \\
&\xrightarrow{\looparrowright} \quad e^{2x} + 5e^x = 0
\end{aligned}$$

Cette dernière équation n'a pas de solution. Le graphe de f ne coupe pas l'asymptote $y = -2$.

7. Graphe : (Voir FIGURE 1.3) En remarquant que $f(0) = 0$.
Le graphe est :

Solution Ex 1.5. $\rightarrow$1.5.

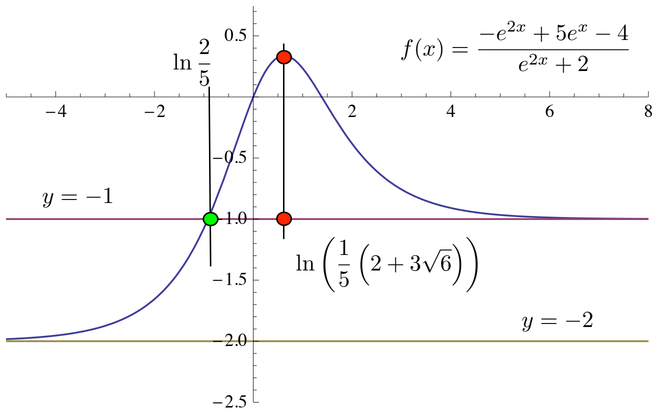

FIGURE 1.3 – Exercice 1.4

Solution Ex 1.6. $\rightarrow$1.6. On peut séparer la fonction $f(x)$ en 3 fonctions. $f_1(x) = e^{x+1} = e \cdot e^x$, $f_2(x) = e^x$ et $f_3(x) = e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ et poser :

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$$

Il est aisé de voir que les 3 fonctions sont strictement positives. Leur somme l'est donc également.

Pour calculer les extrema on commence par déterminer la fonction dérivée $f'(x)$.

$$f'(x) = e^{x+1} + e^x - e^{-x}$$

On égale la dérivée à zéro pour trouver les points stationnaires :

$$\begin{aligned}
f'(x) = e^{x+1} + e^x - e^{-x} = 0 \quad & \longrightarrow \quad e^x(e+1) = \frac{1}{e^x} \\
& \longrightarrow \quad e^{2x} = \frac{1}{e+1} \\
& \xrightarrow{\ln()} \quad 2x = -\ln(e+1) \quad \longrightarrow \quad x = -\frac{1}{2}\ln(e+1)
\end{aligned}$$

Pour trouver la nature du point (maximum ou minimum), on utilise le test de la dérivée seconde.

$$f''(x) = e^{x+1} + e^x + e^{-x} = f(x)$$

On a démontré plus haut que $f(x)$ est partout positif. $f''(x)$ l'est donc aussi, ce qui signifie que la fonction est partout convexe et ne peut donc montrer qu'un minimum en $x = -\frac{1}{2}\ln(e+1)$.

Solution Ex 1.7. $\rightarrow$1.7.

Solution Ex 1.8. →1.8.

1. On égale $f(x)$ à 1 et on résout :

$$f(x) = \frac{-3x^2 - 12x}{x^2 - 4x + 4} = 1 \quad \overset{\Leftrightarrow}{\longrightarrow} \quad -3x^2 - 12x = x^2 - 4x + 4$$
$$\overset{\Leftrightarrow}{\longrightarrow} \quad -4x^2 - 8x - 4 = 0$$
$$\overset{\Leftrightarrow}{\longrightarrow} \quad -4(x^2 - 2x + 1) = 0$$
$$\overset{\Leftrightarrow}{\longrightarrow} \quad (x-1)^2 = 0.$$

Il y a une solution double pour $f(x) = 1$. La solution double est $x = 1$ et le point $(1; 1)$.

2. L'étude d'une fonction se fait d'après cette liste (a peu près !)
   (a) Domaine de définition et $f(0)$:
   (b) Parité :
   (c) Asymptotes verticales. Trous :
   (d) Zéros et signe de la fonction (tableau des signes.) :
   (e) Asymptotes horizontales ou obliques. :
   (f) Extremums et paliers. :
   (g) Étude de la croissance de f (tableau des signes de la dérivée) :
   (h) Graphe :

   (a) Domaine de définition et $f(0)$:
   Il faut toujours commencer par factoriser la fraction rationnelle :

$$f(x) = \frac{-3x^2 - 12x}{x^2 - 4x + 4} = \frac{-3x(x+4)}{(x-2)^2}$$

   Le domaine de définition est $D_f = \mathbb{R}\backslash\{2\}$ et $f(0)$=0.

   (b) Parité :
   Le domaine de définition étant asymétrique, la fonction f est quelconque.

   (c) Asymptotes verticales. Trous :
   Il y a une asymptote verticale en 2 mais il n'y a pas de facteur commun au numérateur et au dénominateur. Les valeurs des limites de f à gauche et à droite de l'asymptote sont :

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{-3x(x+4)}{(x-2)^2} = \text{``}\frac{-36}{0^+}\text{``} = -\infty$$
$$\lim_{x \to 2^+} \frac{-3x(x+4)}{(x-2)^2} = \text{``}\frac{-36}{0^+}\text{``} = -\infty$$

   La fonction tend vers $-\infty$ à gauche et à droite du point $x = 2$.

   (d) Zéros et signe de la fonction (tableau des signes.) :

x		-4		0		2	
$-3x$	$+$		$+$	0	$-$		$-$
$(x+4)$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$(x-2)^2$	$+$		$+$		$+$	0	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	‖	$-$

(e) Asymptotes horizontales ou obliques. :
Le degré du numérateur est identique à celui du dénominateur donc la fonction possède une asymptote horizontale. Celle-ci est donnée par le calcul des limites de f pour $x \to \pm\infty$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \frac{-3x^2-12x}{x^2-4x+4} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(-3-\frac{12}{x}\right)}{x^2\left(1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}\right)} \\
&= -3.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{-3x^2-12x}{x^2-4x+4} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(-3-\frac{12}{x}\right)}{x^2\left(1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}\right)} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(-3-\frac{12}{x}\right)}{\left(1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}\right)} \\
&= -3\cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\frac{12}{x}\right)}{\left(\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}\right)} \\
&= -3.
\end{aligned}$$

La fonction f possède une asymptote horizontale d'équation $a_h(x) = -3$. Il est **absolument nécessaire** de calculer les limites vers plus **et** moins l'infini, car l'asymptote n'est pas forcément la même à gauche et à droite.
On s'intéresse à présent au comportement fonction-asymptote. Premièrement on chercher l'intersection des deux graphes en égalant leurs expressions.

$$f(x) = \frac{-3x^2-12x}{x^2-4x+4} = a_h(x) = -3 \quad \longrightarrow \quad (-3x^2-12x) = -3(x^2-4x+4)$$
$$\longrightarrow \quad -24x = -12 \quad \longrightarrow \quad x = \frac{1}{2}$$

La fonction et son asymptote se croisent au point $\left(\frac{1}{2}; f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \left(\frac{1}{2}; -3\right)$. Pour connaître le comportement en chaque point du domaine de définition de il faut étudier le reste de la division euclidienne du numérateur par le dénominateur :

$$\begin{array}{l}
\big(-3x^2-12x\big) : \big(x^2-4x+4\big) = -3 + \dfrac{-24x+12}{x^2-4x+4} \\
\underline{\quad 3x^2-12x+12} \\
\qquad\quad -24x+12
\end{array}$$

Le reste est la fonction $\delta(x) = -\frac{12(2x-1)}{(x-2)^2}$. Son tableau des signes est

x		$\frac{1}{2}$		2	
-12	$-$		$-$		$-$
$(2x-1)$	$-$	0	$+$		$+$
$(x-2)^2$	$+$		$+$	0	$+$
$\delta(x)$	$+$	0	$-$	‖	$-$

La fonction est au-dessus de l'asymptote sur l'intervalle $]-\infty; \frac{1}{2}]$ puis en dessous, sur l'intervalle $[\frac{1}{2}; 2[\cup]2; +\infty[$.

(f) Extremums et paliers. :
La dérivée de f est :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(-6x-12)(x^4-4x+4)-(-3x^2-12x)(2x-4)}{(x^2-4x+4)^2} \\
&= \frac{24(x+1)}{(x-2)^3}
\end{aligned}$$

Le seul point critique (point où la dérivée s'annule) est en $x = -1$. Afin de savoir si il s'agit d'un minimum, d'un maximum ou d'un palier on fait le tableau des signes de la fonction dérivée f' :

x		-1		2	
$24(x+1)$	$-$	0	$+$		$+$
$(x-2)^3$	$-$		$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$
	$\nearrow$	0	$\searrow$		$\nearrow$

La fonction est croissante avant -1 et décroissante ensuite, on a donc un maximum en $x = -1$. Après $x = 2$ la fonction est croissante. Le maximum est au point $(-1; 1)$.

(g) Graphe : (Voir FIGURE 1.3)

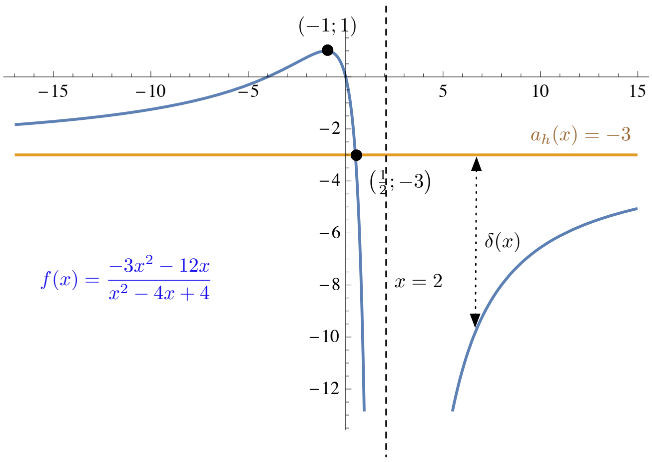

FIGURE 1.4 – Exercice 1.8

3. Décomposition de la fonction en éléments simples.
Comme on a vu lors de l'étude des asymptotes, la fonction peut également s'écrire de la façon suivante :

$$f(x) = \frac{-3x^2 - 12x}{x^2 - 4x + 4} = -3 + \frac{-24x + 12}{(x-2)^2}$$

La décomposition de f en éléments simples est :

$$\begin{aligned} f(x) = -3 + \frac{-24x+12}{(x-2)^2} &= -3 + \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-2)^2} \\ &= -3 + \frac{Ax - 2A + B}{(x-2)^2} \end{aligned}$$

Par identification on peut écrire le système :

$$\begin{cases} A + 0 = -24 \\ -2A + B = 12 \end{cases} \Rightarrow \quad A = -24 \text{ et } B = -36.$$

Donc,

$$f(x) = -3 + \frac{-24x + 12}{(x-2)^2} = -3 + \frac{-24}{(x-2)} + \frac{-36}{(x-2)^2}$$

La transformation de la fonction en éléments simples va permettre son intégration.

Remarque 1. *Dans l'énoncé, la décomposition est gracieusement offerte.*

4. L'aire du domaine borné par f et l'axe Ox s'étend sur l'intervalle $[-4;0]$. L'aire est donnée par l'intégrale :

$$A = \int_{-4}^{0} \left(-3 + \frac{-24}{(x-2)} + \frac{-36}{(x-2)^2}\right) \mathrm{d}x$$

dont la solution est :

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-4}^{0} -3\,\mathrm{d}x + \int_{-4}^{0} \frac{-24}{(x-2)}\,\mathrm{d}x + \int_{-4}^{0} \frac{-36}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= -3 \cdot \int_{-4}^{0} \mathrm{d}x - 24 \cdot \int_{-4}^{0} \frac{1}{(x-2)}\,\mathrm{d}x - 36 \cdot \int_{-4}^{0} \frac{1}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= -3 \cdot \left[x\Big|_{-4}^{0} \right] - 24 \cdot \left[\ln|x-2|\Big|_{-4}^{0} \right] - 36 \cdot \left[-\frac{1}{x-2}\Bigg|_{-4}^{0} \right] \\
&= -3 \cdot \left(x + 8\ln|x-2| + \frac{12}{x-2} \right)\Bigg|_{-4}^{0} \\
&= -3\left[((8\ln(6) - 2)) - (6 + 8\ln(2)) \right] \\
&\approx 2.37
\end{aligned}$$

5. La fonction $g = \ln(f)$ est :

$$g(x) = \ln\left(\frac{-3x^2 - 12x}{x^2 - 4x + 4}\right)$$

La fonction logarithme s'annule lorsque son argument vaut 1. g s'annule donc pour $f(x) = 1$. Le résultat de $f(x) = 1$ a été calculé au point 1 de cet exercice et vaut $x = 1$. La fonction g s'annule en $x = 1$.

6. La fonction f s'annule aux points $x = -4$ et $x = 0$ provoquant des asymptotes verticales en ces deux points, car la valeur du logarithme d'un nombre qui tend vers zéro est $-\infty$. Donc g a deux asymptotes verticales d'équation $x = -4$ et $x = 0$.

7. La dérivée de $g(x) = \ln(f(x))$ est

$$\begin{aligned}
g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} &= \frac{\frac{24(x+1)}{(x-2)^3}}{\frac{-3x(x+4)}{(x-2)^2}} \\
&= -\frac{8(x+1)}{x(x-2)(x+4)}
\end{aligned}$$

g' s'annule en -1. On a un extremum en ce point. (Voir FIGURE 1.5).

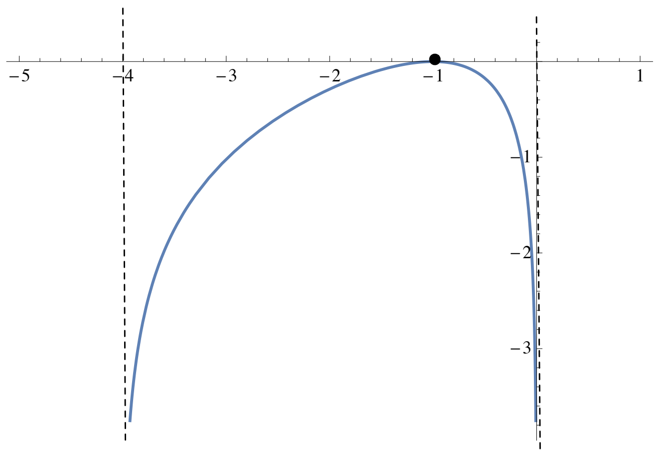

FIGURE 1.5 – Exercice 1.8 $g(x) = \ln(f(x))$

1.4 Analyse - Exercices d'examens - Niveau renforcé*

Ex 1.9. (Nyon - Juin 2010)
Soient g et f les fonctions données par

$$g(x) = \frac{x^2 + x - 2}{6x - 12} \quad \text{et} \quad f(x) = \exp(g(x)).$$

1. Étudier le signe de g. (Tableau des signes).
2. Faire l'étude complète de la fonction f.
3. Donner une équation de la tangente au graphe de f en $x = 1$.

Solution

Ex 1.10. (Nyon - Juin 2011) On appelle S la surface limitée par la courbe d'équation $y = \frac{3}{x-3}$ et les droites d'équations $y = 0$, $x = 4$ et $x = 6$.

1. Calculer l'aire de S.
2. Trouver un nombre a, compris entre 4 et 6, de façon à ce que la droite d'équation $x = a$ coupe S en deux morceaux de même aire.
3. Calculer le volume du solide obtenu en faisant tourner S autour de la droite d'équation $y = 0$.

Solution

Ex 1.11. (Nyon - Juin 2005) Soit la fonction,

$$f(x) = \frac{(x-3)^2}{x^2}$$

1. Etudier la fonction et déterminer les coordonnées des éventuelles points d'intersection du graphe de f avec ses asymptotes.
2. En se basant sur le graphe de f, esquisser les graphes des fonctions :
   (a) $g(x) = \frac{x^2}{(x-3)^2}$
   (b) $h(x) = \ln\left(\frac{(x-3)^2}{x^2}\right)$
   (c) $i(x) = 2\ln\left(\frac{(x-3)}{x}\right)$

Solution

Ex 1.12. (Nyon - Juin 2005) Dans l'intervalle $[-1; 1]$ on considère la fonction f donnée par :

$$f(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Le graphe de f est donné à la FIGURE . La rotation autour de l'axe Ox de la surface comprise entre le graphe et cet axe, engendre un corps de révolution appelé un *caténoïde* qui sera utilisé comme pièce mécanique. Dans un souci de simplification, le constructeur décide de remplacer la fonction f par la parabole associée à la fonction g donnée par :

$$g(x) = \frac{27}{50}x^2 + 1$$

1. Montrer que f et g sont des fonctions paires.
2. Calculer le volume de la pièce en utilisant la fonction f (au centième).
3. Calculer le volume de la pièce en utilisant la fonction g (au centième).
4. Quelle justification mathématique et mécanique peut-on donner pour le choix de g.

Solution

1.5 Analyse - Solutions des exercices d'examens - Niveau renforcé

Solution Ex 1.9. →1.9.

1. Après factorisation :

$$g(x) = \frac{(x-1)(x+2)}{6(x-2)}.$$

Le tableau des signes est

x		-2		1		2	
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$g(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$

2. La fonction à étudier est

$$f(x) = +e^{\dfrac{x^2+x-2}{6(x-2)}}$$

C'est une fonction exponentielle. Le signe de f étant positif, la fonction sera positive sur tout son domaine de définition et ceci quelque soit le signe de l'exposant (caractéristique des fonctions exponentielles positives).

(a) **Domaine de définition**.
Le domaine de définition est $\mathbb{R}\backslash\{2\}$.

(b) Parité.
Le domaine de définition est asymétrique donc la fonction est quelconque.

(c) **Asymptotes verticales. Trous.**
Il faut calculer les deux limites suivantes :

$$e^{\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2+x-2}{6(x-2)}} \quad \text{et} \quad e^{\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2+x-2}{6(x-2)}}$$

i. On substitue x par la suite infinie (u_n) de terme $u_n = \left(2 - \frac{1}{n}\right)$ dans la première limite (u_n tend vers 2 depuis la gauche). La limite vers 2^- se transforme en une limite vers l'infini.

$$\begin{aligned} e^{\lim_{n\to\infty} \frac{\left(2-\frac{1}{n}\right)^2+\left(2-\frac{1}{n}\right)-2}{6\left(\left(2-\frac{1}{n}\right)-2\right)}} &= e^{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\left(-4n-\frac{1}{n}+5\right)} \\ &= e^{\frac{1}{6}(5+\lim_{n\to\infty}(-4n))} \\ &= e^{-\infty} = 0 \end{aligned}$$

ii. Dans la deuxième limite, on substitue x par la suite infinie (u_n) de terme $u_n = \left(2 + \frac{1}{n}\right)$ (u_n tend vers 2 depuis la droite). La limite vers 2^+ se transforme en une limite vers l'infini.

$$\begin{aligned} e^{\lim_{n\to\infty} \frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)^2+\left(2+\frac{1}{n}\right)-2}{6\left(\left(2+\frac{1}{n}\right)-2\right)}} &= e^{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\left(4n+\frac{1}{n}+5\right)} \\ &= e^{\frac{1}{6}(5+\lim_{n\to\infty}(4n))} \\ &= e^{\infty} = \infty. \end{aligned}$$

La limite n'existe pas en 2. On a un point trou en tendant vers 2 depuis la gauche et une asymptote verticale en tendant vers 2 depuis la droite.

(d) **Zéros et signe de la fonction (tableau des signes.)**
La fonction sera positive sur tout son domaine de définition. (Voir remarque au début).

(e) **Asymptotes horizontales ou obliques.**
On calcule les limites

$$e^{\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+x-2}{6(x-2)}} \quad \text{et} \quad e^{\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+x-2}{6(x-2)}}$$

i. La première des deux limites donne :

$$\begin{aligned} e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x-2}{6(x-2)}} &= e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(x+1-\frac{2}{x}\right)}{6x(1-\frac{2}{x})}} \\ &= e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x+1-\frac{2}{x}\right)}{6(1-\frac{2}{x})}} \\ &= e^{\infty} = \infty. \end{aligned}$$

ii. Pour la deuxième, on a :

$$\begin{aligned} e^{\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x-2}{6(x-2)}} &= e^{\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(x+1-\frac{2}{x}\right)}{6x(1-\frac{2}{x})}} \\ &= e^{\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(x+1-\frac{2}{x}\right)}{6(1-\frac{2}{x})}} \\ &= e^{-\infty} = 0. \end{aligned}$$

La fonction diverge lorsque x tend vers $+\infty$ et converge vers la fonction nulle $y = 0$ lorsque x tend vers $-\infty$.

(f) **Extremums et paliers.**
On recherche les points critiques en dérivant f et en égalant sa dérivée f' à zéro.

$$f'(x) = e^{\dfrac{x^2+x-2}{6(x-2)}} \cdot \frac{x(x-4)}{6(x-2)^2}$$

La dérivée s'annule pour

$$\frac{x(x-4)}{6(x-2)^2} = 0$$

car le premier facteur ne s'annule jamais. La dérivée s'annule en deux points, $x = 0$ et $x = 4$.

(g) **Étude de la croissance de f (tableau des signes de la dérivée).**
Le tableau des signes de la dérivée est le suivant :

x		0		2		4	
$e^{g(x)}$	$+$		$+$		$+$		$+$
x	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-4$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$(x-2)^2$	$+$		$+$	0	$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$

On a un maximum en $x = 0$ et un minimum en $x = 4$. En $x = 2$ la dérivée n'est pas définie.

(h) **Graphe.**

Remarque 2. *Avant de tracer le graphe on est en droit de se demander le comportement de ce dernier lorsque x tend vers 2 depuis la gauche. On sait que la valeur de la limite est 0, mais on ne sait pas comment le zéro va être atteint.*
Pour le savoir on peut calculer la valeur de

$$\lim_{x\to2^-} f'(x) = \lim_{x\to2^-}\left(e^{\frac{x^2+x-2}{6(x-2)}} \cdot \frac{x(x-4)}{6(x-2)^2}\right).$$

On utilise la suite $u_n = 2 - \frac{1}{n}$ pour n qui tend vers l'infini, ainsi on tend vers 2 depuis la gauche.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2^-}\left(e^{\dfrac{x^2+x-2}{6(x-2)}}\cdot\frac{x(x-4)}{6(x-2)^2}\right) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}e^{\frac{1}{6}\left(-4n-\frac{1}{n}+5\right)}\left(1-4n^2\right)\\
&= \frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{6}\left(-4n-\frac{1}{n}+5\right)}\left(1-4n^2\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{e^{\left(-4n-\frac{1}{n}+5\right)}}{6}-\lim_{n\to\infty}e^{\left(-4n-\frac{1}{n}+5\right)}\frac{4n^2}{6}\\
&= \left(e^{-\infty}\right)-\lim_{n\to\infty}e^{-\left(4n+\frac{1}{n}-5\right)}\frac{2n^2}{3}\\
&= 0-\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{3e^{\left(4n+\frac{1}{n}-5\right)}}\\
&= -\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{3e^{(4n)}e^{\left(\frac{1}{n}\right)}e^{-5}}\\
&= -\frac{2}{3e^{-5}}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{e^{4n}}
\end{aligned}$$

La limite est du type $\frac{\infty}{\infty}$, on peut appliquer la règle de L'Hospital deux fois de suite (ou la règle du "podium") :

$$\begin{aligned}
-\frac{2}{3e^{-5}}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{e^{4n}} &= -\frac{2}{3e^{-5}}\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2)''}{(e^{4n})''}\\
&= -\frac{2}{3e^{-5}}\lim_{n\to\infty}\frac{2}{16e^{4n}}\\
&= 0^-
\end{aligned}$$

A l'examen la limite était donnée dans l'énoncé.

Le graphe de f va approcher la valeur $x = 2$ avec une pente nulle, c'est-à-dire tout en douceur (voir FIGURE 1.1 et 1.7).

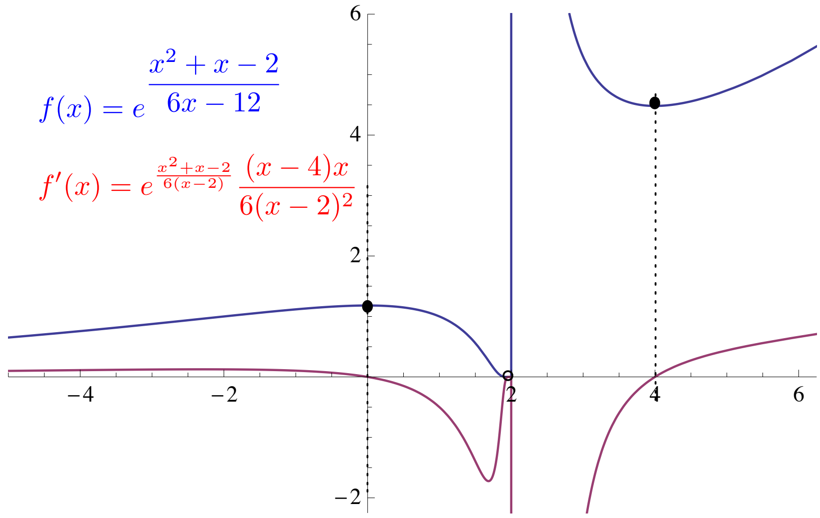

FIGURE 1.6 – Exercice 1.9. Graphe de la fonction et de sa dérivée

3. L'équation de la tangente $t(x)$ à la courbe en $x = 1$ peut être déterminée en utilisant la formule :

$$t(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

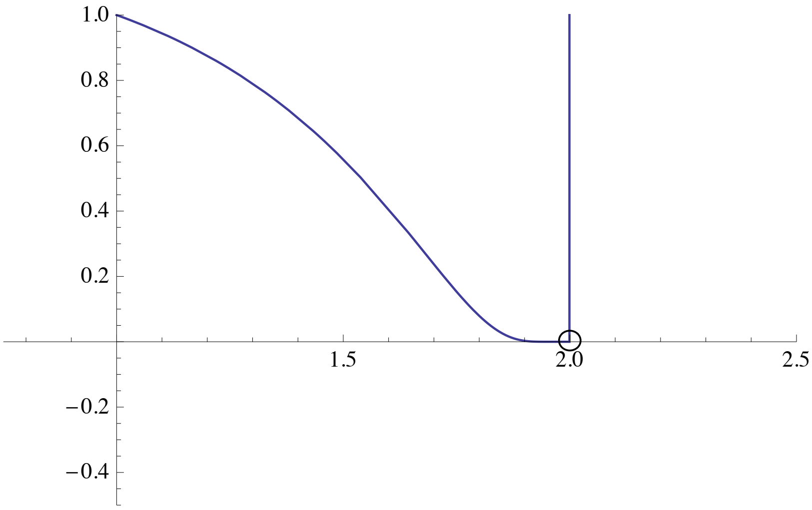

FIGURE 1.7 – Exercice 1.9. Approche de 2^-.

En substituant les valeurs suivantes,
$x_0 = 1$,
$f(x_0) = f(1) = 1$,
$f'(x_0) = f'(1) = -\frac{1}{2}$,
on obtient :

$$t(x) = 1 - \frac{1}{2}(x-1) = -\frac{1}{2}x + 2.$$

La tangente à la courbe en $x = 1$ est la droite $t(x) = -\frac{1}{2}x + 2$.

Solution Ex 1.10. $\rightarrow$1.10.

1. Avant de calculer l'aire, il est bon de vérifier que la fonction donnée est continue sur l'intervalle qui nous intéresse. Le domaine de définition de la fonction $f(x) = \frac{3}{x-3}$ est $D_f = \mathbb{R}\backslash\{3\}$, donc elle est continue sur $[4; 6]$. L'aire S est donnée par le calcul de l'intégrale définie,
$$\int_4^6 \frac{3}{3-x}\,\mathrm{d}x = 3\int_4^6 \frac{1}{3-x}\,\mathrm{d}x = 3\ln(|x-3|)|_4^6$$
L'évaluation de l'intégrale donne
$$3\ln(|x-3|)|_4^6 = 3(\ln(3) - \ln(1)) = 3(\ln(3) - 0) = 3\ln(3) = \ln(27)$$
L'aire de S est $3\ln(3) = \ln(27) \approx= 3.69$.
2. Il s'agit de trouver a pour que l'égalité suivante soit vérifiée :
$$\int_4^a \frac{3}{x-3}\,\mathrm{d}x = \int_a^6 \frac{3}{x-3}\,\mathrm{d}x \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad \ln(|x-3|)|_4^a = \ln(|x-3|)|_a^6.$$
L'évaluation de l'égalité donne :
$$\begin{aligned}
&\ln(|a-3|) - \ln(1) = \ln(3) - \ln(|a-3|)\\
&2\ln(|a-3|) = \ln(3)\\
&\ln\left(|a-3|^2\right) = \ln(3)\\
&\ln\left((a-3)^2\right) = \ln(3)
\end{aligned}$$

En exponentiant de chaque côté ou par identification on obtient :

$$\begin{aligned}(a-3)^2 &= 3\\ a^2-6a+9 &= 3\\ a^2-6a+6 &= 0\end{aligned}$$

Les solutions de cette dernière équation quadratique sont $x_1 = 3+\sqrt{3}$ et $x_2 = 3-\sqrt{3}$. La seule solution acceptable est $x_1 = 3+\sqrt{3} \approx 4.73$ car $x_2 = 3-\sqrt{3} \approx 1.26$ ne se trouve pas dans l'intervalle $[4;6]$.

Remarque 3. *On aurait tout aussi bien pu résoudre une des deux équations suivantes :*

$$\int_a^6 \frac{3}{x-3}\,\mathrm{d}x = \frac{S}{2} = \frac{3\ln(3)}{2}$$
$$\int_4^a \frac{3}{x-3}\,\mathrm{d}x = \frac{S}{2} = \frac{3\ln(3)}{2}$$

Solution Ex 1.11. →1.11.
L'étude d'une fonction se fait d'après cette liste.

1. Domaine de définition :
2. Parité :
3. Asymptotes verticales. Trous :
4. Zéros et signe de la fonction (tableau des signes.) :
5. Asymptotes horizontales ou obliques. :
6. Extremums et paliers. :
7. Étude de la croissance de f (tableau des signes de la dérivée) :
8. Graphe :

1. *Domaine de définition :* Le domaine de définition de f est $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\} = \mathbb{R}^*$. Il n'y a que l'élément $x = 0$ de l'ensemble de départ qui pose problème, en l'occurence une division par zéro.

2. *Parité :* L'ensemble de définition étant symétrique par rapport à l'origine il faut vérifier la parité.
   (a) La fonction est paire ? $f(x) = f(-x)$
   Un simple contre-exemple suffit pour démontrer que la fonction n'est pas paire :
   $$(f(3) = 0 \neq 4 = f(-3)) \Rightarrow (f \text{ n'est pas paire})$$
   (b) La fonction est impaire ? $f(x) = -f(-x)$
   La fonction ne peut pas être impaire car elle est toujours positive (numérateur et dénominateur au carré). Il ne peut donc pas y avoir de symétrie centrale par rapport à l'origine des coordonnées. Un simple contre-exemple suffit :
   $$(f(3) = 0 \neq -4 = -f(-3)) \Rightarrow (f \text{ n'est pas impaire})$$
   En résumé, f est quelconque.
3. *Asymptotes verticales. Trous :* La fonction n'a pas de trou car sa factorisation ne montre pas de facteur commun au dénominateur et au numérateur. Elle a par contre une asymptote verticale en

zéro. On détermine les valeurs des limites à gauche et à droite de cette asymptote en calculant les deux limites :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{(x-3)^2}{x^2}$$
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{(x-3)^2}{x^2}$$

On transforme les limites qui tendent vers 0 en limites qui tendent vers l'infini (elle sont plus faciles à calculer) en posant $x = \frac{1}{h}$ (quand $h \to -\infty$ alors $x \underset{x<0}{\to} 0$, et quand $h \to +\infty$ alors $x \underset{x>0}{\to} 0$) :

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{(x-3)^2}{x^2} \quad &\overset{x=\frac{1}{h}}{\longrightarrow} \quad \lim_{h\to -\infty} \frac{\left(\frac{1}{h}-3\right)^2}{\left(\frac{1}{h}\right)^2} \\
&= \quad \lim_{h\to -\infty} \left(\frac{1-3h}{1}\right)^2 = +\infty \\
\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{(x-3)^2}{x^2} \quad &\overset{x=\frac{1}{h}}{\longrightarrow} \quad \lim_{h\to \infty} \frac{\left(\frac{1}{h}-3\right)^2}{\left(\frac{1}{h}\right)^2} \\
&= \quad \lim_{h\to \infty} \left(\frac{1-3h}{1}\right)^2 = +\infty
\end{aligned}$$

f tend vers $+\infty$ à gauche et à droite de l'asymptote $x = 0$.

4. *Zéros et signe de la fonction (tableau des signes.) :* Le tableau des signe de f est :

x		0		3	
$(x-3)^2$	$+$		$+$	0	$+$
$(x)^2$	$+$	0	$+$		$+$
$f(x)$	$+$	$\Vert$	$+$	0	$+$

On remarque que la fonction est positive partout sauf en $x = 3$ où elle est nulle.

5. *Asymptotes horizontales ou obliques :* Le degré du numérateur est le même que le degré du dénominateur, nous aurons donc une asymptote horizontale. L'équation de celle-ci est déterminée par les limites lorsque x tend vers les valeurs infinies à gauche et à droite. (Il est primordial de calculer les deux limites, car les asymptotes obliques peuvent parfois être différentes à droite et à gauche.)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to +\infty} \frac{(x-3)^2}{x^2} &= \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2-6x+9}{x^2} \\
&= \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2\left(1-\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}\right)}{x^2} \\
&= \lim_{x\to +\infty} \frac{\left(1-\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}\right)}{1} = 1 \\
\lim_{x\to -\infty} \frac{(x-3)^2}{x^2} &= \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2-6x+9}{x^2} \\
&= \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2\left(1-\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}\right)}{x^2} \\
&= \lim_{x\to -\infty} \frac{\left(1-\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}\right)}{1} = 1
\end{aligned}$$

Il y a une asymptote horizontale d'équation $y = a(x) = 1$.
Nous allons chercher les intersections du graphe de f avec celui de l'asymptote a. On cherche les solutions de $f = a$.

$$\frac{(x-3)^2}{x^2} = 1 \quad \longrightarrow \quad x^2 - 6x + 9 = x^2 \quad \longrightarrow \quad x = \frac{3}{2}$$

Le graphe de f intercepte le graphe de l'asymptote en $x = 1$. Les coordonnées du point d'intersection sont $(x; f(x)) = \left(\frac{3}{2}; 1\right)$.

6. *Points critiques :* La dérivée f' de f est :

$$f'(x) = \frac{\left(2(x-3)x^2\right) - \left(2x(x-3)^2\right)}{x^4} = \frac{6(x-3)}{x^3}$$

Pour trouver les extremums ou les paliers, on égale la dérivée à zéro.

$$f'(x)\frac{6(x-3)}{x^3} = 0 \quad \longrightarrow \quad x = 3.$$

Il y a un point critique en $x = 3$. On a vu que la fonction s'annule pour $x = 3$ également et que c'est une fonction strictement positive, le point $(3; f(3) = (3; 0)$ ne peut être qu'un minimum.

7. *Graphe :* Le graphe de $f(x) = \frac{(x-3)^2}{x^2}$ se trouve à la FIGURE 1.8.

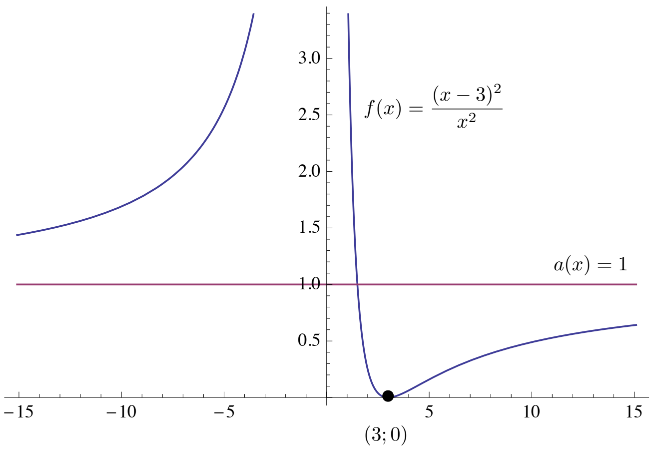

FIGURE 1.8 – Exercice 1.11

Les fonctions $h(x)$ et $i(x)$ sont les mêmes car $a\ln(b) = \ln(b^a)$, donc

$$h(x) = \ln\left(\frac{(x-3)^2}{x^2}\right) = \ln\left(\left(\frac{x-3}{x}\right)^2\right) = i(x) = 2\ln\left(\frac{(x-3)}{x}\right)$$

Graphe de $g(x)$ et $h(x) = i(x)$ (FIGURE 1.9) et (FIGURE 1.10)

Solution Ex 1.12. →1.12.

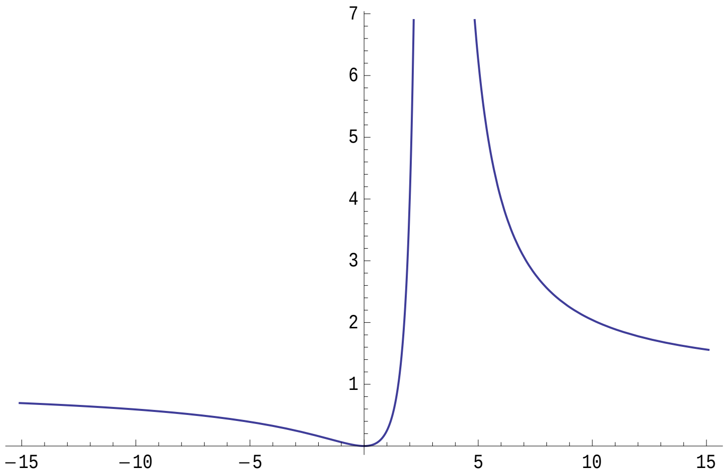

FIGURE 1.9 – Exercice 1.11 $\quad g(x) = \frac{x^2}{(x-3)^2}$

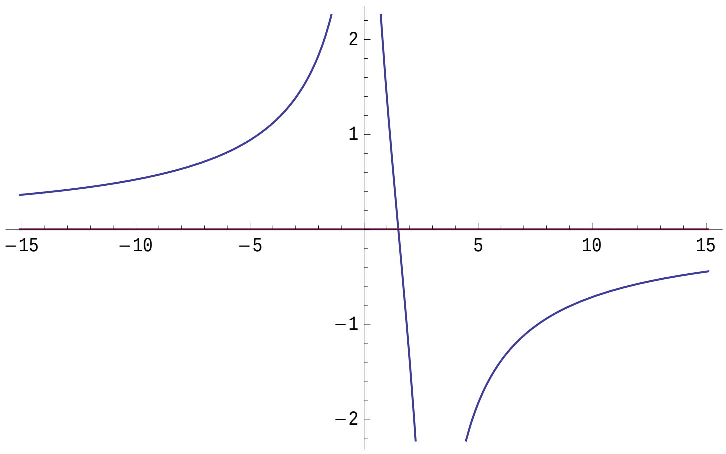

FIGURE 1.10 – Exercice 1.11 $\quad h(x) = i(x) = \ln\left(\frac{(x-3)^2}{x^2}\right)$

1. Les fonctions f et g sont les deux paires car $f(x) = f(-x)$ et $g(x) = g(-x)$:

$$f(x) = f(-x) \quad \longrightarrow \quad \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2}$$
$$g(x) = g(-x) \quad \longrightarrow \quad \frac{27}{50}x^2 + 1 = \frac{27}{50}(-x)^2 + 1$$

On va utiliser la parité dans le calcul des intégrales à bornes symétriques pour la question suivante :

$$\int_{-a}^{a} h(x)\,\mathrm{d}x = 2 \cdot \int_{0}^{a} h(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{(si } h \text{ est paire)}$$

2. En se basant sur la parité de f, le volume de la pièce est donné par l'intégrale :

$$\begin{aligned} V_f = 2 \cdot \pi \int_0^1 f(x)^2 \, \mathrm{d}x &= 2\pi \int_0^1 \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 \mathrm{d}x \\ &= 2\pi \int_0^1 \left(\frac{e^{-2x}}{4} + \frac{e^{2x}}{4} + \frac{1}{2} \right) \mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{2} \left(2x + \frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{2} \right) \Big|_0^1 \\ &\approx 8.84 \end{aligned}$$

En se basant sur la parité de g, le volume de la pièce est donné par l'intégrale :

$$\begin{aligned} V_g = 2 \cdot \pi \int_0^1 g(x)^2 \, \mathrm{d}x &= 2\pi \int_0^1 \left(\frac{27}{50} x^2 + 1 \right)^2 \mathrm{d}x \\ &= 2\pi \int_0^1 \left(\frac{729x^4}{2500} + \frac{27x^2}{25} + 1 \right) \mathrm{d}x \\ &= 2\pi \left(\frac{729x^5}{12500} + \frac{9x^3}{25} + x \right) \Big|_0^1 \\ &\approx 8.91 \end{aligned}$$

On peut remarquer que l'approximation est très bonne. La valeur est surestimée de seulement $\left(\frac{8.84-8.91}{8.84} \approx -0.008\right)$ 0.8%.

3. Si on applique un développement de Taylor d'ordre 4 à f on obtient :

$$f(x) \approx \frac{x^4}{24} + \frac{x^2}{2} + 1 = \frac{25}{50} x^2 + 1 \left(+ \frac{x^4}{24} \right)$$

On remarque que $\frac{25}{50}x^2 + 1$ est très proche de $g(x) = \frac{27}{50}x^2 + 1$.

Chapitre 2

Probabilités - Exercices d'examens

2.1 Probabilités - Exercices d'examens - Niveaux standard et renforcé

Ex 2.1. (Nyon - 2005 - Niveau standard)
Évariste s'en va faire un tout au "Luna Park" et décide de s'amuser au stand de tir. À jeun, il touche la cible avec une probabilité de 0.8. À chaque fois qu'il boit une bière, cette probabilité chute de moitié.
En supposant qu'il commence à jeun et qu'il boit une bière après chaque tir :

1. Quelle est la probabilité qu'il touche la cible trois fois de suite ?
2. Quelle est la probabilité qu'il touche la cible au moins une fois en trois tirs ?
3. Quelle est la probabilité d'avoir raté son premier tir sachant qu'il a raté son troisième tir ?

Solution

Ex 2.2. (Nyon - 2008 - Niveau standard)
Le personnel d'un hôpital est réparti en trois catégories : les médecins (M), les soignants (S) (non-médecins) et le personnel AT (AT) (administration ou technique). 12% sont des médecins et 71% sont des soignants. 67% des médecins sont des hommes (H) et 92% des soignants sont des femmes (F). On sait de plus que 80% du personnel de l'hôpital est féminin.

Un membre du personnel de cet hôpital est tiré au sort.

1. Quelle est la probabilité que le sort désigne une femme soignante ?
2. Un homme a été désigné. Quelle est la probabilité qu'il soit médecin ?
3. Quelle est la probabilité que la personne désignée soit une femme sachant qu'elle fait partie du personnel AT.

Dans cet hôpital, le service des urgences reçoit en moyenne 60 personnes par jour dont 30% doivent être hospitalisée. Les autres rentrent chez elles après la consultation d'un médecin. Parmi les malades hospitalisés on constate qu'en moyenne 12 doivent subir une radiographie (X), 8 une perfusion (P) et 5 ne subissent ni radiographie ni perfusion (R).

1. Quelle est la probabilité qu'un malade hospitalisé subisse une perfusion et une radiographie. ?
2. Quelle est la probabilité qu'un malade hospitalisé et radiographié subisse une perfusion ?

Solution

Ex 2.3. (Nyon - 2010 - Niveau renforcé)
Dans un porte-monnaie contenant des pièces d'un franc, de deux francs et de cinq francs, on dénombre en tout 30 pièces dont 6 sont des pièces de un franc. On laisse tomber deux pièces.

a) Si $\frac{4}{29}$ est la probabilité que la somme tombée à terre soit de 6 francs, combien ce porte-monnaie doit-il contenir de pièces de cinq francs ?

b) Si n est le nombre de pièces de deux francs dans ce porte-monnaie, montrer que la probabilité p que les deux pièces à terre soient de même valeur est donnée par

$$p = \frac{n^2 - 24n + 291}{435}.$$

c) Déterminer le nombre n de pièces de deux francs que doit contenir ce porte-monnaie pour que cette probabilité p soit minimale.

d) Déterminer le nombre n de pièces de deux francs que doit contenir ce porte-monnaie pour que cette probabilité p soit maximale.

Solution

Ex 2.4. (Nyon - 2010 - Niveau renforcé)
On lance un dé à 20 faces en forme d'icosaèdre régulier dont les faces sont numérotées de 1 à 20 et on s'intéresse au résultat obtenu sur la face supérieure.

a) Montrer que la probabilité d'obtenir un nombre premier est de 0.4.

b) Quelle est la probabilité, si ce résultat est un multiple de 3, qu'il soit aussi premier ?

On lance à présent 4 fois ce dé.

c) Quelle est la probabilité que ces quatre résultats soient tous des nombres premiers ?

d) Quelle est la probabilité que le produit des quatre résultats soit un nombre premier ?

e) Quelle est la probabilité qu'au moins un nombre premier figure parmi ces 4 résultats ?

On lance un certain nombre de fois ce même dé.

f) Au minimum, combien de lancers sont-ils nécessaires pour que la probabilité d'obtenir au moins un nombre premier soit presque égale à 1, à 10^{-20} près.

Solution

Ex 2.5. (Burier - Juin 2009 - Niveau standard)
Une fabrique de webcams teste la qualité de ses caméras avant de les envoyer dans les différents points de vente. On prélève au hasard une caméra dans un lot de 50. Si la caméra est défectueuse, on renvoie les 50 caméras à l'atelier pour les vérifier. Si la webcam fonctionne, on en choisit une deuxième au hasard. Si elle est défectueuse, on renvoie le lot des 50 caméras à l'atelier. Sinon, on en choisit une troisième au hasard. Si elle est défectueuse, on renvoie le lot de 50 à vérifier. Dans le cas contraire, le lot a réussi le test et est envoyé dans les points de vente.
Supposons que dans un lot de caméras 2 sont défectueuses.

a) Quelle est la probabilité que le lot soit renvoyé à l'atelier lors du premier contrôle ?

b) Quelle est la probabilité que le lot soit renvoyé à l'atelier lors du deuxième contrôle ?

c) Quelle est la probabilité que le lot soit renvoyé à l'atelier ?

d) Quelle est la probabilité qu'un lot de 50 caméras contenant 10 caméras défectueuses passe le test ?

Solution

Ex 2.6. (Beaulieu - Juin 2010 - Niveau standard) Un réfrigérateur contient 5 vaccins contre une maladie X, 8 vaccins contre une maladie Y et 15 vaccins contre une maladie Z. On choisit au hasard 3 vaccins. Quelle est la probabilité que :

a) Les 3 vaccins choisis sont contre la maladie X ;

b) Les 3 vaccins choisis sont contre la même maladie ;

c) Il y a un vaccin contre chaque maladie.

Solution

Ex 2.7. (Auguste Piccard - Juin 2011 - Niveau standard)
Une pochette contient dix pièces : sept en argent et trois en or. Les pièces en argent sont parfaitement équilibrées, alors que celles en or tombent sur pile avec une probabilité de $\frac{1}{3}$.
On tire au hasard une pièce de cette pochette, on la lance et on note le résultat.
Calculer les probabilités des événements suivants :

a) Le résultat est "pile".

b) La pièce est en or sachant que le résultat est "face".

On répète 5 fois l'expérience précédente en remettant chaque fois la pièce dans la pochette.
Calculer les probabilités des événements suivants :

c) Il n'y a que des "piles".

d) Il y a exactement deux "piles".

On tire simultanément deux pièces de la pochette, on les lance. Calculer les probabilités des événements suivants :

e) Les deux pièces sont en argent et il y a deux "piles".

f) Il y a une pièce en or et une en argent, montrant toutes les deux "face".

Solution

Ex 2.8. (Nyon - Juin 2013)
Un feu tricolore traditionnel est

soit vert,

soit orange,

soit rouge,

soit “orange et rouge”.

Il passe du vert à l'orange, de l'orange au rouge, du rouge à l'“orange et rouge”, puis de l'“orange et rouge” au vert, et ainsi de suite.
Il est absolument interdit de “griller” un tel feu tricolore, c'est-à-dire le franchir lorsqu'il est rouge ou “orange et rouge”.
Un feu tricolore traditionnel placé à un carrefour est vert la moitié du temps, uniquement orange huit secondes par minute, et le reste du temps rouge ou “orange et rouge”.

a) Quelle est la probabilité qu'un automobiliste arrivant à ce carrefour n'ait pas le droit de franchir le feu ?

Un prototype d'appareil photographique, type “radar-flash” est chargé de détecter les voitures qui franchissent illégalement le feu. Comme il souffre de défauts de jeunesse, il ne se déclenche pas une fois sur vingt lorsqu'une voiture grille le feu. Mais le pire encore, il se déclenche de façon inappropriée dans 1% des cas si le feu est vert et dans 5% des cas si le feu est uniquement orange.

b) Quelle est la probabilité qu'un automobiliste respectant la signalisation se fasse “flasher” en franchissant ce carrefour ?

c) Montrer que la probabilité qu'un véhicule d'urgence (ambulance, pompier, ...) se fasse flasher en franchissant ce carrefour sans tenir compte de la couleur du feu est de 36%.

d) Si le conducteur du véhicule d'urgence remarque alors le flash du radar en franchissant ce carrefour sans tenir compte de la couleur du feu, quelle est la probabilité qu'il vienne de griller le feu ?

e) Si, lors d'une journée, le véhicule d'urgence passe dix fois sous le feu, toujours sans tenir compte de la couleur, qu'elle est la probabilité qu'il se fasse “flasher” quatre fois en tout ?

f) Si, lors d'une journée, le véhicule passe dix fois sous le feu, quelle est la probabilité qu'il se fasse “flasher” quatre fois en tout et à la suite ?

Solution

2.2 Probabilités - Solutions des exercices d'examens - Niveaux standard et renforcé

Solution Ex 2.1. (Nyon - 2005) $\rightarrow$2.1.
On adopte la notation "R=tir réussi" et "E=échec". Par exemple $P(R2|E1)$ signifie la probabilité de réussir au second tir sachant que le premier tir est un échec. On peut remarquer que les **événements sont indépendants**, en effet la probabilité de réussir (ou de rater) au n-ème tir ne dépend pas du résultat du tir $(n-1)$ ou $(n+1)$, mais uniquement de la quantité de bière ingurgitée par Évariste.

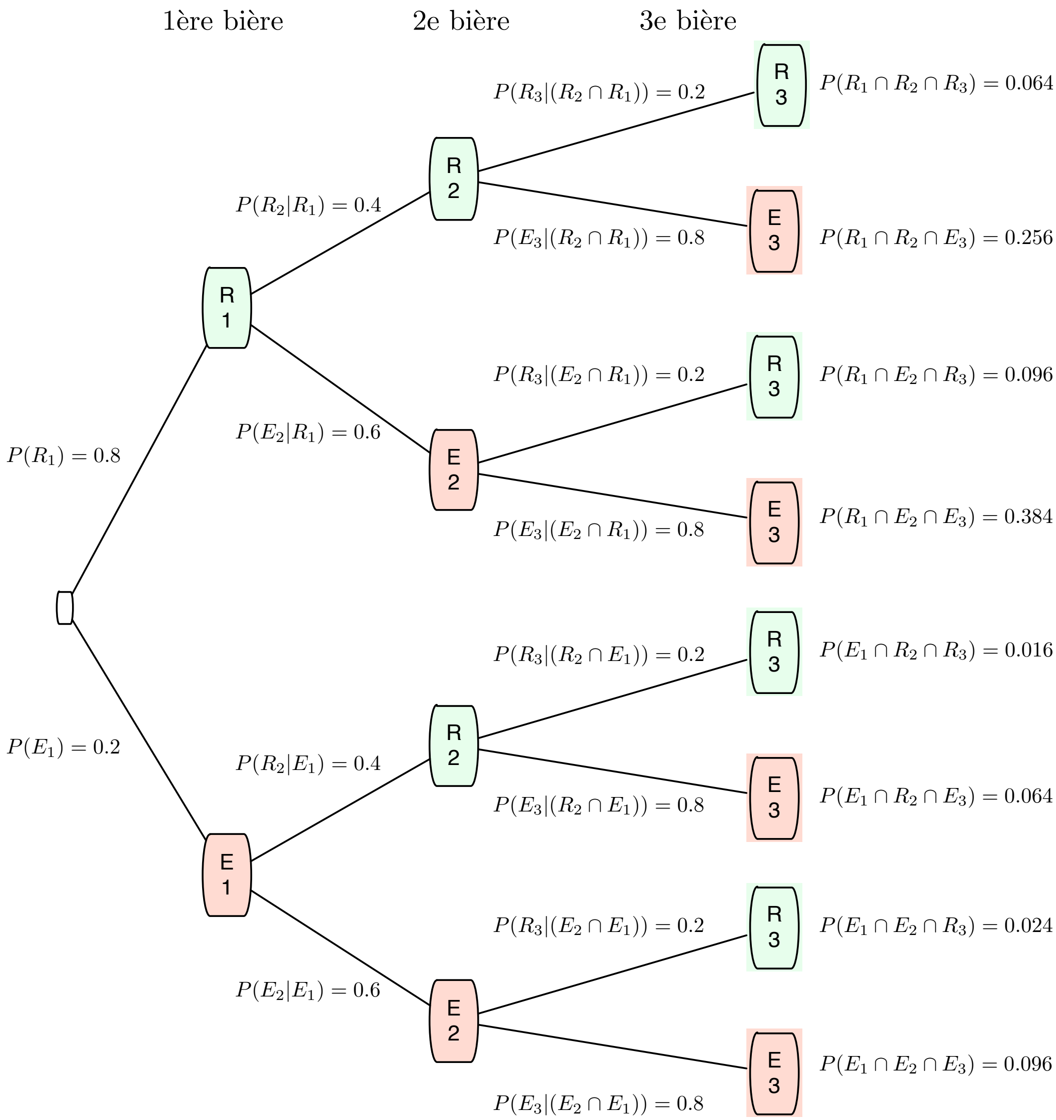

FIGURE 2.1 – Exercice 2.1. Évariste et ses bières !

1. $P(R1) = 0.8$, $P(R2) = \frac{0.8}{2} = 0.4$ et $P(R3) = \frac{0.4}{2} = 0.2$. On nous demande quelle est la probabilité qu'Évariste réussisse : son premier et son deuxième et son troisième tir donc, comme les événements sont indépendants :

$$P(R1 \cap R2 \cap R3) = P(R1)P(R2)P(R3) = 0.8 \cdot 0.4 \cdot 0.2 = 0.064$$

2. Réussir au moins un tir sur trois est l'événement complémentaire (au sens probabilistique) de n'en

réussir aucun sur trois. Ne réussir aucun tir est donné par

$$\begin{aligned} P\Big[(1-P(R1))\cap(1-P(R2))\cap(1-P(R3))\Big] &= P(E1\cap E2\cap E3) \\ &= P(E1)P(E2)P(E3) = 0.2\cdot 0.6\cdot 0.8 \\ &= 0.096. \end{aligned}$$

La probabilité de réussir au moins un tir est $1-P(E1\cap E2\cap E3)$ et vaut 0.904.

3. On s'intéresse à la probabilité

$$\frac{P(E1\cap E2\cap E3)+P(E1\cap R2\cap E3)}{P(E1\cap E2\cap E3)+P(E1\cap R2\cap E3)+P(R1\cap E2\cap E3)+P(R1\cap R2\cap E3)}$$

Les événements sont indépendants donc on peut réécrire l'expression ainsi :

$$\frac{P(E_1)P(E_2)P(E_3)+P(E_1)P(R_2)P(E_3)}{P(E_1)P(E_2)P(E_3)+P(E_1)P(R_2)P(E_3)+P(R_1)P(E_2)P(E_3)+P(R_1)P(R_2)P(E_3)}$$

$$=\frac{P(E_1)P(E_2)+P(E_1)P(R_2)}{P(E_1)P(E_2)+P(E_1)P(R_2)+P(R_1)P(E_2)+P(R_1)P(R_2)}$$

$$=\frac{P(E_1)P(E_2)+P(E_1)P(R_2)}{P(E_1)P(E_2)+P(E_1)P(R_2)+P(R_1)P(E_2)+P(R_1)P(R_2)}$$

$$=\frac{P(E_1)[P(E_2)+P(R_2)]}{P(E_1)[P(E_2)+P(R_2)]+P(R_1)[P(E_2)+P(R_2)]}$$

$$=\frac{P(E_1)}{P(E_1)+P(R_1)}=\frac{P(E_1)}{1}=P(E_1)=0.2$$

La probabilité d'échec au premier tir ne dépend pas de celle du troisième tir.

On obtient le même résultat en utilisant l'arbre de la FIGURE 2.1.

$$\frac{P(E1\cap E2\cap E3)+P(E1\cap R2\cap E3)}{P(E1\cap E2\cap E3)+P(E1\cap R2\cap E3)+P(R1\cap E2\cap E3)+P(R1\cap R2\cap E3)}$$

$$=\frac{0.096+0.064}{0.096+0.064+0.384+0.256}=\frac{0.16}{0.8}=0.2.$$

Solution Ex 2.2. (Nyon - 2008) $\rightarrow$2.2.

Première partie : Faisons d'abord un récapitulatif de ce que l'on connaît et de ce que l'on peut déduire logiquement :

$P(M) = 0.12$
$P(S) = 0.71$
$P(AT) = 1 - (P(M) + P(S)) = 0.17$
$P(H|M) = 0.67$
$P(F|M) = 0.33$
$P(F|S) = 0.92$
$P(F) = 0.80$
$P(H) = 1 - P(F) = 0.20$

1. On cherche $P(F \cap S)$.
   Des formules des probabilités conditionnelles on sait que
   $$P(F \cap S) = P(F|S)P(S) = 0.92 \cdot 0.71 = 0.6532$$
2. On cherche $P(M|H)$, on sait que
   $$P(M|H) = \frac{P(M \cap H)}{P(H)} = \frac{P(M \cap H)}{1 - P(F)} \tag{2.1}$$
   D'autre part
   $$P(M \cap H) = P(H|M)P(M)$$
   On substitue dans 2.1 et on obtient
   $$P(M|H) = \frac{P(M \cap H)}{1 - P(F)} = \frac{P(H|M)P(M)}{1 - P(F)} = \frac{0.67 \cdot 0.12}{0.20} = 0.4020$$
3. Les probabilités totales nous disent :
   $$P(F) = P(F|M)P(M) + P(F|S)P(S) + P(F|AT)P(AT) = 0.80$$
   La seule valeur inconnue est $P(F|AT)$, on peut l'isoler :
   $$P(F|AT) = \frac{P(F) - P(F|M)P(M) - P(F|S)P(S)}{P(AT)} = \frac{0.80 - 0.33 \cdot 0.12 - 0.92 \cdot 0.71}{0.17} = 0.6305$$

Remarque 4. *On peut également faire un tableau, c'est un peu plus simple et ça se prête très bien à ce genre de problèmes.*

Deuxième partie : On fait à nouveau un résumé de ce que l'on sait et de ce que l'on peut déduire par un simple calcul :

$P(H) = \frac{18}{60} = 0.30$ (prob. d'être hospitalisé)
$P(nH) = \frac{42}{60} = 0.70$ (prob. de ne pas être hospitalisé)
$P(X|H) = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$ (prob. d'être radiographié si hospitalisé)
$P(P|H) = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$ (prob. d'être perfusé si hospitalisé)
$P(R|H) = \frac{5}{18}$ (prob. de ne rien subir si hospitalisé)

1. On demande $P([X \cap P]|H)$.
   On applique la formule d'inclusion-exclusion :
   $$P([X \cup P]|H) = P(X|H) + P(P|H) - P([X \cap P]|H) \longrightarrow P([X \cap P]|H) = P(X|H) + P(P|H) - P([X \cup P]|H)$$
   La valeur de $P([X \cup P]|H)$ (radiographie ou perfusé si hospitalisé) est $\frac{18-5}{18} = \frac{13}{18}$ d'où
   $$P([X \cap P]|H) = P(X|H) + P(P|H) - P([X \cup P|H]) = \frac{12}{18} + \frac{8}{18} - \frac{13}{18} = \frac{7}{18} = 0.3889$$

2. On désire $P(P|[H \cap X])$.

$$P(P|[X \cap H]) = \frac{P(P \cap X \cap H)}{P(X \cap H)}$$

On ne connaît ni $P(P \cap X \cap H)$ ni $P(X \cap H)$. On commence par la première probabilité qui est : P(perfuser et radiographié et hospitalisé),

$$P(P \cap X \cap H) = P([X \cap P]|H)P(H) = \frac{7}{18} \cdot \frac{18}{60} = \frac{7}{60}.$$

On continue par P(perfusé et hospitalisé),

$$P(X \cap H) = P(X|H)P(H) = \frac{2}{3} \cdot \frac{18}{60} = \frac{12}{60}$$

Finalement

$$P(P|[X \cap H]) = \frac{P(P \cap X \cap H)}{P(X \cap H)} = \frac{\frac{7}{60}}{\frac{12}{60}} = 0.5833$$

Remarque 5. *On peut résoudre le problème facilement avec un diagramme de Venn.*

Solution Ex 2.3. (Nyon - 2010) →2.3.

a) Il n'existe qu'une seule manière de constituer la somme de six francs, avec une de un franc et une de cinq francs. Si l'on choisit une pièce parmi les six de un franc et une pièce parmi les N de cinq francs et que l'on obtient une probabilité de $\frac{4}{29}$ alors

$$\frac{C_1^N \cdot C_1^6}{C_2^{30}} = \frac{4}{29}$$

On développe et on résout pour N,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{C}_1^N \cdot C_1^6}{C_2^{30}} &= \frac{\frac{N!}{(N-1)!1!}\frac{6!}{(6-1)!1!}}{\frac{30!}{(30-28)!2!}} \\ &= \frac{N \cdot 6}{435} = \frac{4}{29} \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad N = 10.\end{aligned}$$

Il y a dix pièces de cinq francs dans le porte-monnaie.

1. Notons le nombre de pièces de chaque valeur en fonction de n, où n est le nombre de pièces de deux francs.
   (a) nombre de pièces de deux francs $= n$,
   (b) nombre de pièces de un franc $= 6$,
   (c) nombre de pièces de cinq francs $= 24 - n$

   La probabilité p est la chance d'avoir deux pièces de un franc <u>ou</u> deux pièces de deux francs <u>ou</u> 2 pièces de cinq francs, c.-à-d.

$$\begin{aligned}p = \frac{C_2^n + C_2^6 + C_2^{24-n}}{C_2^{30}} &= \frac{\frac{n(n-1)}{2} + 15 + \frac{(24-n)(23-n)}{2}}{435} \\ &= \frac{n^2 - 24n + 291}{435}\end{aligned}$$

2. On dérive p en fonction de n et on égale la dérivée à zéro pour trouver le(s) extremum(s).

$$p'(n) = \frac{2(n-12)}{435} = 0 \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad n = 12$$

   La probabilité minimale (la parabole est convexe) est obtenue avec douze pièces de deux francs. Ce qui est logique, car plus grande sera la disparité entre les types de pièces, plus difficile il sera de former des couples de pièces identiques. On obtient $p(12) = 0.33$.

3. En tenant compte de la dernière remarque et du fait que le second extremum ne pourra être obtenu qu'aux bornes de l'intervalle dans lequel varie n, on déduit que la probabilité maximale sera obtenue pour zéro pièce de deux francs, c.-à-d. que le porte-monnaie devra contenir 24 pièces de cinq francs et 6 pièce de un franc. On obtient $p(0) = 0.66$.

Solution Ex 2.4. (Nyon - 2010) $\rightarrow$2.4.

a) On procède par énumération, les nombres premiers de 1 à 20 sont

$$\text{np} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$$

La probabilité est donnée par

$$P(\text{X=np}) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \frac{8}{20} = 0.4$$

b) Les multiples de 3 de 1 à 20 sont au nombre de 6. La probabilité d'obtenir un multiple de 3 est de $P(m_3) = \frac{6}{20} = 0.3$. La probabilité d'obtenir un nombre premier qui soit également un multiple de 3 est de $P(np \cap m_3) = \frac{1}{20}$, (3 est l'unique valeur cumulant les deux propriétés). Donc en appliquant la théorie des probabilités conditionnelles :

$$P(np|m_3) = \frac{P(np \cap m_3)}{P(m_3)} = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{6}{20}} = \frac{1}{6}$$

c) En appliquant la loi binomiale avec les probabilités $P(\text{nombre premier}) = \text{np} = 0.4$ et $P(\text{nombre non premier}) = (1 - \text{np}) = 0.6 =$ on obtient :

$$P(\text{4 nombres premiers}) = C_4^4 \cdot \text{np}^4 \cdot (1 - \text{np})^0 = 1 \cdot 0.4^4 \cdot 1 = 0.4^4 = 0.0256$$

d) Un nombre premier ne peut être le produit que d'au maximum 2 nombres différents, 1 et lui-même. Il faut donc que le tirage donne 3 fois 1 et 1 fois une face avec un nombre déjà premier pour que le produit soit premier. On ne peut pas appliquer la loi binomiale, car on est en présence non pas de deux probabilités différentes (nombre premier ou pas), mais de trois, à savoir

i. La probabilité que la face ait la valeur 1 qui est $P(n1) = \frac{1}{20}$,
ii. la probabilité que la face montre un nombre premier $P(np) = \frac{8}{20}$,
iii. la probabilité que la face soit l'un des nombres restants $P(nbr) = \frac{11}{20}$

En appliquant cette fois la loi multinomiale on arrive au résultat qui est

$$\begin{aligned} P(\text{produit est premier}) &= \binom{N}{n1! \cdot np! \cdot nbr!} \left(\frac{1}{20}\right)^{n1} \left(\frac{8}{20}\right)^{np} \left(\frac{11}{20}\right)^{nbr} \\ &= \binom{4!}{3! \cdot 1! \cdot 0!} \left(\frac{1}{20}\right)^{3} \left(\frac{8}{20}\right)^{1} \left(\frac{11}{20}\right)^{0} \\ &= 0.0002 \end{aligned}$$

e) Au moins un nombre premier signifie 1,2,3 ou 4 nombres premiers. On peut très bien faire ce calcul, mais il est long. On utilise le fait que l'événement "au moins 1 nombre premier" est l'événement complémentaire de "aucun nombre premier" et l'axiome des probabilités qui dit que $P(A) = 1 - P(A^c)$. La probabilité de ce dernier événement est facile à calculer et vaut :

$$P(\text{aucun nombre premier}) = C_4^4 \cdot 0.6^4 \cdot 0.4^0 = 0.6^4 = 0.1296$$

Donc

$$P(\text{au moins un nombre premier}) = 1 - 0.6^4 = 1 - 0.1296 = 0.8704.$$

f) On utilise le même raisonnement qu'au point précédent, mais cette fois l'inconnue est le nombre de lancers,

$$\begin{aligned} P = 1 - 0.6^n = 1 - 10^{-20} \quad &\longrightarrow \quad 0.6^n = 10^{-20} \\ &\xrightarrow{\log} \quad n = \log_{0.6}(10^{-20}) \\ &= \quad \frac{-20}{\log_{10}(0.6)} \approx 91 \end{aligned}$$

Solution Ex 2.5. (Burier - Juin 2009 - Niveau standard) →2.5.
Attention, on prend les caméras une à une et sans remise ! Un test est fait après chaque tirage.

a) Au premier contrôle, il y a 50 caméras, dont 2 défectueuses. La probabilité de tirer une caméra défectueuse, donc de devoir renvoyer le lot, est de $P(Rv1) = \frac{2}{50} = 0.04$. ($Rv1$=renvoi au 1er contrôle).

b) Pour que le lot soit renvoyé au deuxième contrôle, il faut qu'il passe le premier test et échoue au second, il n'y a pas d'autre manière. Cela revient à calculer la probabilité $P(P1 \cap Rv2)$. ($P1$=passe le 1er contrôle). De manière naïve c'est bien sûr $\frac{48}{50}\frac{2}{49} = 0.0392$. En utilisant la règle de multiplication on a :

$$P(P1 \cap Rv2) \quad = \quad P(P1)P(Rv2|P1) = \frac{48}{50}\frac{2}{49} = 0.0392$$

Ce qui correspond tout à fait.

c) Pour le troisième test il faut, naïvement parlant, que la première caméra soit bonne, la deuxième également, mais pas la troisième, c.à.d $\frac{48}{50}\frac{47}{49}\frac{2}{48} = 0.0384$.
Mathématiquement parlant (règle de multiplication) on peut également le voir comme ça : on multiplie la probabilité que la première caméra passe le test par la probabilité que la deuxième passe si la première à passé, fois la probabilité que la troisième échoue sachant que la première et la deuxième ont passé le test. Cela se traduit par

$$\begin{aligned} P(P1)P(P2|P1)P(Rv3|(P1 \cap P2)) &= P(P1)\frac{P(P2 \cap P1)}{P(P1)}\frac{P(Rv3 \cap P1 \cap P2)}{P(P2 \cap P1)} \\ &= P(Rv3 \cap P1 \cap P2) \\ &= P(P1 \cap P2 \cap Rv3) = \frac{48}{50}\frac{47}{49}\frac{2}{48} = 0.0384 \end{aligned}$$

Et l'on retombe sur le même résultat.

La probabilité que le lot soit renvoyé lors du premier ou du deuxième ou du troisième contrôle est la somme des probabilités :

$$P(R1) + P(P1 \cap Rv2) + P(P1 \cap P2 \cap Rv3) = 0.1176$$

d) On peut reprendre la même formule que sous c) pour calculer la probabilité que le lot soit renvoyé.

$$P(R1) + P(P1 \cap Rv2) + P(P1 \cap P2 \cap Rv3) = \frac{10}{50} + \frac{40}{50}\frac{10}{49} + \frac{40}{50}\frac{39}{49}\frac{10}{48} = 0.4959$$

0.4987 est la probabilité que le lot soit renvoyé donc, la probabilité que le lot passe, est de $1 - 0.4959 = 0.5041$.

Une méthode beaucoup plus efficace est le calcul direct

$$P(P1 \cap P2 \cap P3) = \frac{40}{50}\frac{39}{49}\frac{38}{48} = 0.5041$$

Solution Ex 2.6. (Beaulieu - Juin 2010 - Niveau standard) →2.6.
Il y a en tout 28 vaccins dans le réfrigérateur, on tire de manière simultanée 3 vaccins. On commence par calculer de combien de manières différentes il est possible de prendre 3 objets parmi 28. (Le fait que certains objets sont identiques n'influence en rien le calcul). Le calcul est

$$\frac{28 \cdot 27 \cdot 26}{3 \cdot 2 \cdot 1} = C_3^{28} = 3276$$

a) On a à disposition 5 vaccins X dont on doit en choisir 3, c.à.d $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = C_3^5 = 10$. Comme on désire une probabilité, on divise le nombre de cas "favorables" par le nombre de cas possibles

$$\frac{C_3^5}{C_3^{28}} = \frac{10}{3276} = 0.0031.$$

b) On fait le même raisonnement, mais cette fois en prenant également en compte les vaccins Y et Z,

$$\frac{C_3^5 + C_3^{15} + C_3^8}{C_3^{28}} = \frac{10 + 455 + 56}{3276} = 0.1590.$$

c) Maintenant on veut savoir la probabilité d'obtenir exactement un vaccin pour chaque maladie. Il faut donc choisir un parmi 5 vaccins X, un parmi 8 vaccins Y et un parmi 15 vaccins Z.

$$\frac{C_1^5 \cdot C_1^8 \cdot C_1^{15}}{C_3^{28}} = \frac{5 \cdot 8 \cdot 15}{3276} = 0.1098.$$

Solution Ex 2.7. (Auguste Piccard - Juin 2011 - Niveau standard) $\rightarrow$2.7.
L'arbre permettant de résoudre le problème se trouve à la FIGURE 2.2.

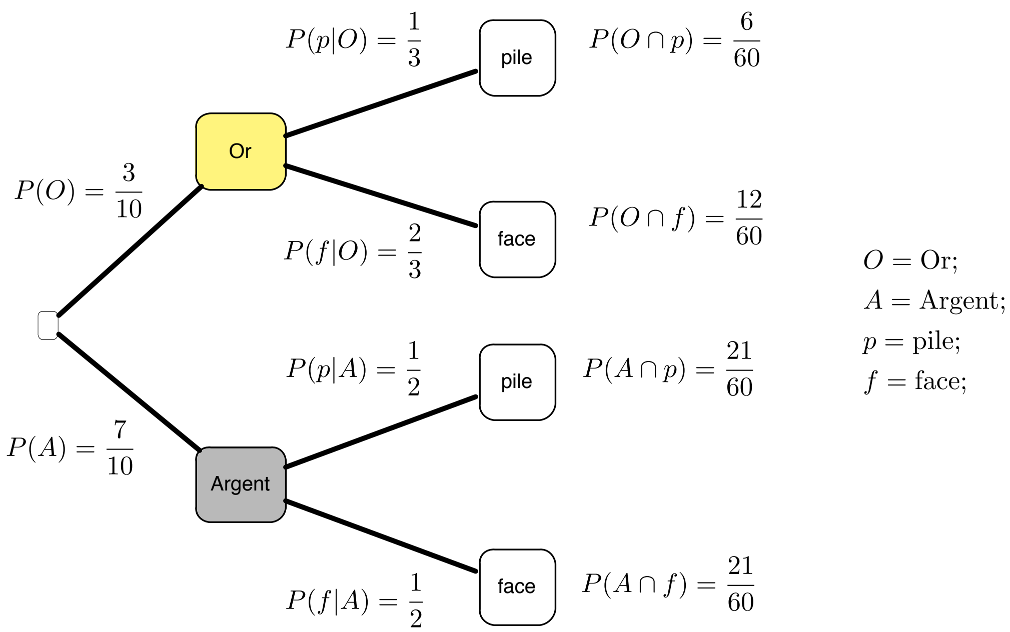

FIGURE 2.2 – Exercice 2.7

a) On applique la formule des probabilités totales

$$P(p) = P(p|O)P(O) + P(p|A)P(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{10} = \frac{27}{60} = \frac{9}{20} = 0.45$$

La probabilité que le résultat soit pile est 0.45.

b) D'après le graphique :

$$\frac{P(P(O \cap f))}{P(O \cap f) + P(A \cap f)} = \frac{\frac{12}{60}}{\frac{12}{60} + \frac{21}{60}} = \frac{4}{11} = \approx 0.3637.$$

La probabilité que la pièce soit en or sachant que le résultat est face est 0.3637.

En n'utilisant pas le graphe :

$$P(O|f) = \frac{P(O \cap f)}{P(f)} = \frac{P(f|O)P(O)}{P(f)} = \frac{P(f|O)P(O)}{1 - P(p)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{10}}{1 - \frac{9}{20}} = \frac{4}{11} \approx 0.3637$$

c) (On répète 5 fois l'expérience avec remise.) La probabilité d'avoir un pile est $m = P(p) = \frac{9}{20}$. La probabilité d'avoir 5 piles de suite est $m^5 = 0.0184$.

d) On applique la loi binomiale :

$$B(5, 2, 0.45) = \binom{5}{2} 0.45^2 (1 - 0.45)^3 \approx 0.3369$$

e) La probabilité de tirer deux pièces en argent parmi 3 en argent et 7 en or est

$$P(\{\text{deux pièces d'argent}\}) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{3}{45} = \frac{1}{15}$$

La probabilité d'avoir deux piles si les pièces sont en argent est $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, la probabilité d'avoir les deux pièces en argent et les deux sur pile est

$$P(\{\text{deux pièces d'argent sur pile}\}) = \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{60}.$$

f) La probabilité de tirer une pièce en argent et une en or simultanément est

$$P(\{\text{une pièce d'argent et une pièce d'or}\}) = \frac{\binom{3}{1} \cdot \binom{7}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{21}{45} = \frac{7}{15}.$$

Avec une pièce d'or et une pièce d'argent, on peut avoir les combinaisons de probabilités suivantes :

$$\begin{array}{r}
P(f|O)P(f|A) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}; \\
P(p|O)P(p|A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \\
P(f|O)P(p|A) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \\
P(p|O)P(f|A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} = \frac{1}{6}
\end{array}$$

La probabilité d'avoir deux faces est de

$$\frac{P(f|O)P(f|A)}{P(f|O)P(f|A) + P(p|O)P(p|A) + P(f|O)P(p|A) + P(p|O)P(f|A)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = \frac{1}{3}$$

La probabilité de tirer une pièce d'or et une pièce d'argent puis après les avoir lancées obtenir deux faces est :

$$P(\{\text{une pièce d'argent et une pièce d'or}\}) \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{45}.$$

Solution Ex 2.8. →2.8.
Notons les événements,

$ROR = \{$le feu est rouge ou "orange et rouge"$\}$.
$V = \{$le feu est vert$\}$,
$O = \{$le feu est orange$\}$.

D'autre part, on note $F = \{$le flash se déclenche$\}$. En tenant compte des notations et de l'énoncé on peut déterminer les probabilités des événements suivants :

$P(ROR) = \frac{11}{30}$, $P(V) = \frac{15}{30}$, $P(O) = \frac{4}{30}$.
$P(F|ROR) = \frac{19}{20}$, $P(\overline{F}|ROR) = \frac{1}{20}$.
$P(F|O) = \frac{1}{20}$, $P(\overline{F}|O) = \frac{19}{20}$.
$P(F|V) = \frac{1}{100}$, $P(\overline{F}|V) = \frac{99}{100}$

La méthode la plus simple et la plus rapide pour résoudre ce problème est de faire l'arbre des événements. (FIGURE 2.3).

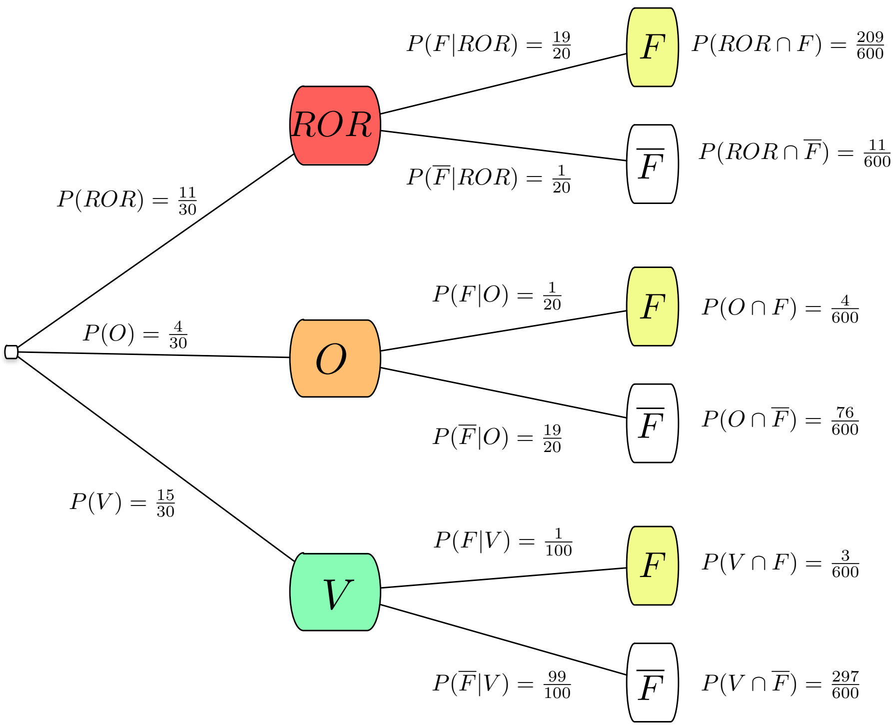

FIGURE 2.3 – Arbre des événements pour l'exercice 2.8

a) C'est la probabilité $P(ROR) = \frac{11}{30} \approx 0.3637$.

b) La réponse est :

$$\begin{aligned} \frac{P(O \cap F) + P(V \cap F)}{P(O \cap F) + P(V \cap F) + P(ROR \cap F)} &= \frac{\frac{4}{600} + \frac{3}{600}}{\frac{4}{600} + \frac{3}{600} + \frac{209}{600}} \\ &= \frac{7}{216} \approx 0.0324. \end{aligned}$$

c) La réponse est :

$$P(F\cap V)+P(F\cap O)+P(F\cap ROR) = \frac{3}{600}+\frac{4}{600}+\frac{209}{600}=\frac{216}{600}=0.36$$

d) La réponse est :

$$\begin{aligned}\frac{P(ROR\cap F)}{P(ROR\cap F)+P(O\cap F)+P(V\cap F)} &= \frac{\frac{209}{600}}{\frac{209}{216}+\frac{4}{216}+\frac{3}{216}}\\ &= \frac{209}{216}\approx 0.9676.\end{aligned}$$

e) La probabilité d'être "flasher" est $P(F)=0.36$ (voir point **c)**). On applique la loi binomiale de paramètres $B(10,4,0.36)$,

$$B(10,4,0.36)=\binom{10}{4}0.36^4(1-0.36)^6\approx 0.2423$$

f) Il y a 7 possibilités de se faire "flasher" quatre fois de suite (1-4,2-5,3-6,4-7,5-8,6-9,7-10) donc le résultat recherché est :

$$7\cdot 0.36^4(1-0.36)^6\approx 0.008.$$

Méthode plus "mathématique" (tenant moins du bricolage!!!) :
En utilisant purement et durement les théorèmes et formules des probabilités (sans faire d'arbre), on arrive aussi au résultat, mais c'est un peu plus difficile et abstrait. Attention, j'ai traité la question **b)**, **c)** et **d)** dans le désordre.

a) La somme des probabilités doit être égale à un.

$$1=P(ROR)+P(O)+P(V) \quad\longrightarrow\quad P(ROR)=1-(P(V)+P(O))=1-\left(\frac{4}{30}+\frac{15}{30}\right)=\frac{11}{30}\approx 0.3637$$

c) On cherche la probabilité qu'un conducteur qui ne tient pas compte de la signalisation se fasse "flasher", ce qui est le cas des véhicules d'urgence. On connait les probabilités $P(O)$, $P(V)$ et $P(ROR)$, de même que les probabilités $P(F|ROR)$, $P(F|V)$ et $P(F|O)$. On peut appliquer la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}P(F) &= P(F|V)P(V)+P(F|O)P(O)+P(F|ROR)P(ROR)\\ &= \frac{1}{100}\cdot\frac{15}{30}+\frac{1}{20}\cdot\frac{4}{30}+\frac{19}{20}\cdot\frac{11}{30}\\ &= \frac{9}{25}=0.36.\end{aligned}$$

La probabilité qu'un véhicule circulant "à l'aveugle" se fasse "flasher" est de 0.36.

d) On demande la probabilité conditionnelle $P(ROR|F)$. On applique la formule de Bayes :

$$P(ROR|F)=\frac{P(ROR\cap F)}{P(F)}=\frac{P(F|ROR)P(ROR)}{P(F)}=\frac{\frac{19}{20}\cdot\frac{11}{30}}{0.36}\approx 0.9676.$$

c) La probabilité demandée est la probabilité de "passer au vert et se faire flasher" plus celle de "passer à l'orange et se faire flasher" divisé par la probabilité de se faire flasher. On peut remarquer que c'est la probabilité complémentaire de "passer au rouge et se faire flasher" divisée par la probabilité de se faire flasher.

$$1-P(ROR\cap F)\frac{P(ROR\cap F)}{P(F)}=1-\frac{P(F|ROR)P(ROR)}{P(F)}=1-\frac{\frac{19}{20}\frac{11}{30}}{\frac{9}{25}}=\frac{7}{216}\approx 0.0324.$$

e) La probabilité de se faire "flasher" quatre fois et de ne pas se faire "flasher" six fois exactement en dix passages est, en posant $p = P(F)$,

$$p^4(1-p^6) = 0.36^4(1-0.36)^6 \approx 0.008$$

Il y a cependant plusieurs combinaisons possibles de se faire flasher quatre fois. Imaginons le mot formé de quatre F pour "se faire flasher" et de six P pour "passer sans se faire flasher".

$$FFFFPPPPPP$$

. Le nombre de mots de dix lettres que l'on peut former est $\frac{10!}{4!6!}$, le probabilité recherchée est donc

$$\left(\frac{10!}{4!6!}\right)p^4(1-p^6) \approx 0.2423$$

f) On peut regrouper les quatre passages successifs en un seul "gros" passage et choisir de placer celui-ci dans les six places inoccupées ($\sqcup = pppp$), avant, après et entre les passages restants :

$$\sqcup p \sqcup p \sqcup p \sqcup p \sqcup p \sqcup p \sqcup$$

Ayant dénombré le nombre de configurations on multiplie par la probabilité de chacune d'elle qui est $0.36^4(1-0.36)^6$ donc :

$$7 \cdot 0.36^4(1-0.36)^6 \approx 0.008.$$

Il y a une probabilité de 0.008 de se faire "flasher" quatre fois de suite.

Chapitre 3

Optimisation - Exercices d'examens

3.1 Introduction

3.2 Optimisation - Exercices d'examens - Niveau standard

Ex 3.1. (Nyon - Préparation 2013) Soit γ la parabole d'équation $y = -x^2 + 10x$.

1. Soit $P(x_0; y_0)$ un point de γ situé dans le premier quadrant. Soient P', P'' ses projections orthogonales sur les axes des coordonnées. Déterminer pa position de P pour laquelle l'aire du triangle $PP'P''$ est maximale.
2. Calculer l'aire du domaine borné limité par la parabole γ et la droite reliant le point P trouvé.

Solution

3.3 Optimisation - Solutions des exercices d'examens - Niveau standard

Solution Ex 3.1. →3.1.

1. Comme on le voit à la FIGURE 3.1, l'aire du triangle est donnée par

$$A(x) = \frac{x(10x - x^2)}{2} = \frac{10x^2 - x^3}{2}$$

La parabole coupe l'axe des abscisses en $x = 0$ et $x = 10$, le domaine de variation de x est $[0; 10]$. Pour trouver l'aire maximale du triangle on dérive la formule donnant son aire

$$A'(x) = \frac{20x - 3x^2}{2} = \frac{x(20 - 3x)}{2}$$

et on égale celle-ci à zéro.

$$A'(x) = \frac{x(20 - 3x)}{2} = 0 \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad x = 0 \text{ et } x = \frac{20}{3}.$$

Les solutions sont acceptables car on travaille dans le premier quadrant dans l'intervalle $[0; 10]$. Il s'agit maintenant de déterminer la nature des point stationnaires (minimum, maximu, palier). On fait le tableau des signes de la dérivée.

x		0		$\frac{20}{3}$	
x	$-$	0	$+$		$+$
$20 - 3x$	$+$		$+$	0	$-$
$A'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

On a un minimum en $x = 0$ et un maximum en $x = \frac{20}{3}$. La valeur maximum de l'aire est $A\left(\frac{20}{3}\right) = \frac{4\,000}{27} \approx 148$ et le point sur γ est $P(\frac{20}{3}; \frac{200}{9})$

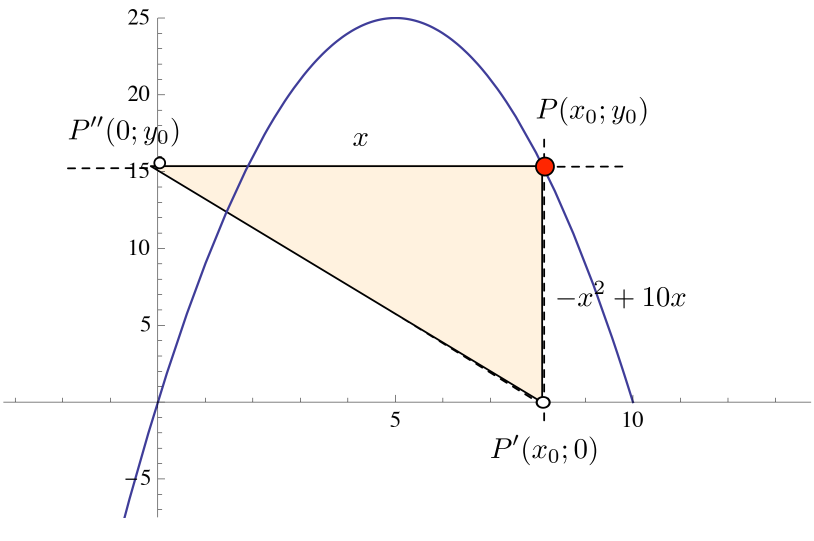

FIGURE 3.1 – Exercice 3.1

2. La droite qui relie l'origine au point P est une application linéaire de pente $\frac{\frac{200}{9}}{\frac{20}{3}} = \frac{10}{3}$. Son équation est $y = \frac{10}{3}x$. Pour calculer l'aire on va intégrer de 0 à $\frac{20}{3}$, la différence entre la parabole et la droite linéaire.
$$\int_0^{\frac{20}{3}} 10x - x^2 - \frac{10}{3}x \, \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{20}{3}} \frac{20}{3}x - x^2 \, \mathrm{d}x$$
La résolution donne
$$\left. \frac{10}{3}x^2 - \frac{x^3}{3} \right|_0^{\frac{20}{3}} = \frac{4000}{81} \approx 49.38.$$
L'aire cherchée est 49.38.(Voir FIGURE reffig-opti1b).

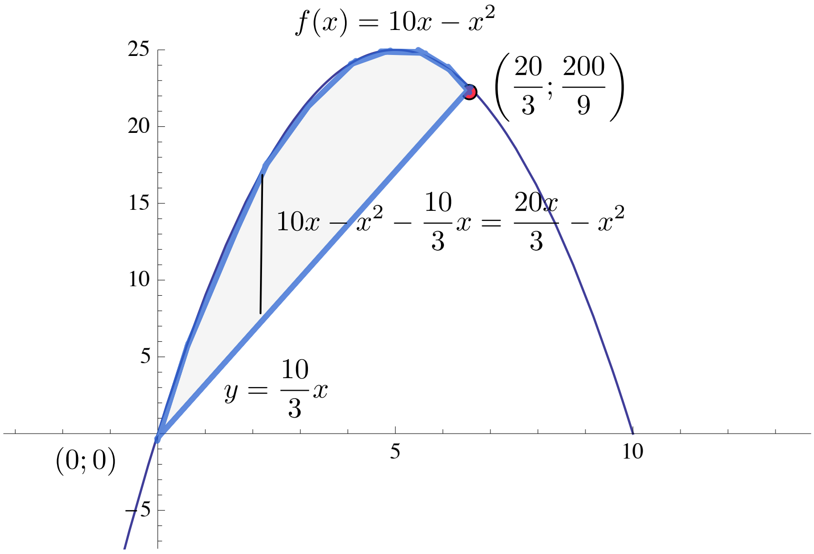

FIGURE 3.2 – Exercice 3.1

3.4 Optimisation - Exercices d'examens - Niveau renforcé

3.5 Optimisation - Solutions des exercices d'examens - Niveau renforcé

Chapitre 4

Trigonométrie - Logarithme - Analyse - Divers

4.1 Divers - Analyse - Niveau standard

Ex 4.1. (Nyon - Juin 2013) Soit la fonction donnée par $f(x) = \sin(x)\cos(x)$. Déterminer une équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

Solution

Ex 4.2. (Nyon - Juin 2013) Déterminer l'ensemble de définition, les zéros et la dérivée de la fonction g donnée par

$$g(x) = \ln\left(\frac{1+x}{2-x}\right)$$

Solution

Ex 4.3. (Nyon - Juin 2013) Soit i la fonction donnée par

$$i(x) = \sqrt{3-x}$$

i) Calculer l'aire du domaine borné limité par le graphe de i, l'axe des x et la droite d'équation $x = -6$.
ii) Calculer le volume du solide obtenu par rotation de ce domaine autour de l'axe x.

Solution

Ex 4.4. (Nyon - Juin 2011) Soit la fonction f donnée par $f(x) = e^{2x+1}$.

a) Montrer que la droite t tangente au graphe de f au point $P(\frac{1}{2}; f(\frac{1}{2}))$ a pour équation $y = 2e^2x$.
b) Calculer l'aire du domaine défini par le graphe de f, la droite t et l'axe Oy.

Solution

Ex 4.5. (Nyon - Juin 2010)

On appelle S_1 la surface limitée par la courbe d'équation $y = \dfrac{3}{x-3}$ et les droites d'équation $y = 0$, $x = 4$ et $x = 6$.

a) Calculer l'aire de S_1.
b) Trouver un nombre a entre 4 et 6 de façon à ce que la droite d'équation $x = a$ coupe S_1 en deux morceaux de même aire.

c) Calculer le volume du solide obtenu en faisant tourner S_1 autour de la droite d'équation $y = 0$.

On appelle S_2 la surface limitée par la même courbe d'équation $y = \dfrac{3}{x-3}$ et les droites d'équations $y = 1$, $x = 4$ et $x = 6$.

d) Déterminer l'aire de S_2.

e) Déterminer, sans faire de long calcul, le volume du solide obtenu en faisant tourner S_2 autour de la droite d'équation $y = 0$.

f) Calculer le volume du solide obtenu en faisant tourner S_2 autour de la droite d'équation $y = 1$.

Solution

Ex 4.6. (Morges - Juin 2010)
Calculer

$$\lim_{x \to 1} \frac{1-x^2}{x^2+x-2}$$

Solution

Ex 4.7. (Morges - Juin 2010)
Déterminer

$$\int^x (t^3 - 2t + 1)\,\mathrm{d}t$$

Solution

Ex 4.8. (Morges - Juin 2010)
Un capital de 1 000 francs a été déposé sur un compte bancaire au taux de 2,5% à la naissance de Tom. Aujourd'hui sa valeur est de 1 560 francs. Quel est l'âge de Tom ?

Solution

Ex 4.9. (Morges - Juin 2010)
Déterminer le centre et le rayon du cercle d'équation $x^2 + y^2 - 6x + 14y + 42 = 0$

Solution

4.2 Divers - Trigonométrie - Niveau standard

Ex 4.10. (Nyon - Juin 2013) Soit la fonction h donnée par

$$h(x) = \frac{1}{2} - \sin(x + \pi).$$

Déterminer les coordonnées du point d'intersection du graphe h avec les deux axes de coordonnées.

Solution

Ex 4.11. (Nyon - Juin 2013)
Résoudre l'équation :

$$3\cos(3x) = 2\sin^2(3x)$$

1. Dans $\mathbb{R}$,
2. dans l'intervalle $[0; 2\pi]$.

Solution

Ex 4.12. () Calculer l'aire du triangle déterminé par les tangente à la courbe d'équation $y = \sin(x)$ en ses points d'abscisses 0, $\frac{\pi}{2}$ et π.

Solution

Ex 4.13. () Résoudre l'équation $\cos^3(2x) = \frac{3}{4}\cos(2x)$.

Solution

4.3 Divers - Logarithme - Niveau standard

Ex 4.14. (Nyon - Préparation 2013)
En mettant de l'ordre dans le galetas, je suis tombé sur des vieux papiers de mon illustre pépé qui était biologiste et qui étudiait le développement des bactéries. Voici le tableau où il notait les résultats, mais certains de ceux-ci ont été effacés. Va falloir les retrouver !

temps	population
0	...
0.5	24
1	72
1.5	216
2	648
2.5	...
3	5832
3.5	...

1. En partant du principe que la progression est régulière, complétez le tableau ci-dessus.
2. À combien s'élèverait la population après deux jours ?
3. Combien de temps pépé aurait-il dû attendre pour avoir une population de dix millions d'individus.

Solution

Ex 4.15. (Nyon - Préparation 2013) Résoudre :

1. $\log_x(27) = 4$
2. $4 \cdot 2^{2x} + 11 \cdot 2^x = 3$
3. $x^8 = 16$
4. $16^x - 2 \cdot 4^{x+1} = -15$
5. $\log_4(x) = \frac{5}{2}$

Solution

Ex 4.16. (Nyon - Préparation 2013)
Ecrire sous la forme 3^p avec $p \in \mathbb{Q}$:

$$\frac{\sqrt[3]{9\sqrt[5]{81}}\sqrt{3}}{\sqrt[10]{729\sqrt[3]{\frac{1}{9}}}}$$

Solution

4.4 Solutions - Divers - Analyse - Niveau standard

Solution Ex 4.1. →4.1.
Notons $(x_0; f(x_0))$ le point du graphe de f par lequel va passer la tangente dont on veut déterminer l'équation. Soit le point (x, y) un point de la droite tangente. La pente de la droite tangente est égale à la valeur de la dérivée de f au point x_0. La dérivée de f est

$$f'(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos(2x),$$

et sa valeur en $x_0 = \frac{\pi}{2}$ est $f'(\frac{\pi}{2}) = -1$. Les coordonnées du point tangent sont $(x_0; f(x_0)) = (\frac{\pi}{2}; 0)$. L'équation d'une droite de pente -1 passant par le point $(\frac{\pi}{2}; 0)$ est :

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x_0 - x) \quad \xrightarrow{\leftrightsquigarrow} \quad y = -1(x - \frac{\pi}{2}) \quad \xrightarrow{\leftrightsquigarrow} \quad y = -x + \frac{\pi}{2}$$

Voir solution FIGURE 4.1.

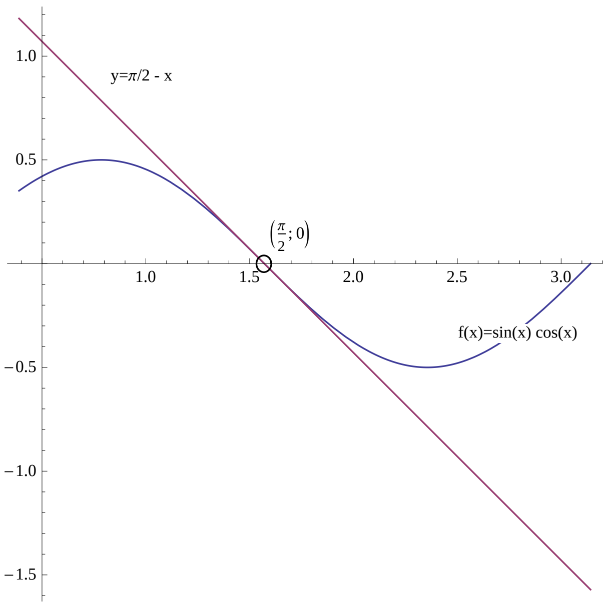

FIGURE 4.1 – Exercice 4.1

Solution Ex 4.2. →4.2.
La fonction logarithme naturel ne peut recevoir d'argument nul ou négatif. Il est donc nécessaire que

$$\frac{1+x}{2-x} > 0$$

On fait le tableau des signes

x		-1		2	
$1+x$	$-$	0	$+$		$+$
$2-x$	$+$		$+$	0	$-$
$f(x)$	$-$	0	$+$	‖	$-$

L'ensemble de définition de g est $D_g =]-1;2[$.
Les zéros sont donnés lorsque l'argument vaut 1,

$$\frac{1+x}{2-x} = 1 \quad \longrightarrow \quad 1+x = 2-x \quad \longrightarrow \quad x = \frac{1}{2}$$

La fonction s'annulle pour $x = \frac{1}{2}$.
La dérivée est

$$f'(x) = \frac{2-x}{1+x} \cdot \frac{3}{(x-2)^2} = \frac{3}{-x^2+x+2}$$

Solution Ex 4.3. $\rightarrow$4.3.
La fonction est $i(x) = \sqrt{3-x}$

1. On commence par calculer l'intersection de i avec l'axe des x afin d'avoir la borne supérieure d'intégration.

$$i(x) = 0 \quad \longrightarrow \quad \sqrt{3-x} = 0 \quad \longrightarrow \quad x = 3.$$

L'aire à calculer est

$$\begin{aligned} A &= \int_{-6}^{3} \sqrt{3-x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-6}^{3} (3-x)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{(3-x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_{-6}^{3} \\ &= -\frac{2(3-x)^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_{-6}^{3} \\ &= 0 - \left(-\frac{2(9)^{\frac{3}{2}}}{3}\right) \\ &= 18 \end{aligned}$$

La valeur de l'aire est 18.

2. L'expression générale pour le volume est donné par $V = \pi \int f(x)^2\,\mathrm{d}x$. Dans le cas qui nous intéresse,

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-6}^{3} \left(\sqrt{3-x}\right)^2 \mathrm{d}x \\ &= \pi \int_{-6}^{3} (3-x)\,\mathrm{d}x \\ &= \pi \left(3x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-6}^{3} \\ &= \pi\left(\left(9 - \frac{9}{2}\right) - \left(-18 - \frac{36}{2}\right)\right) \\ &= \pi \frac{81}{2} \end{aligned}$$

La valeur du volume est $\frac{81}{2}\pi$.

Solution Ex 4.4. $\rightarrow$4.4.

1. La droite tangente $t(x)$ au graphe d'une fonction en un point x_0 est donnée par
$$t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{4.1}$$
La dérivée de f est
$$f'(x) = 2e^{2x+1}$$
Donc
$$\begin{aligned} t(x) &= f\left(\frac{1}{2}\right) + f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) \\ &= e^2 + 2e^2\left(x - \frac{1}{2}\right) \\ &= 2e^2x \end{aligned}$$

2. A ce point il est bon de faire une esquisse du graphe, c'est assez facile car la fonction exponentielle est simple à dessiner et la tangente $t(x)$ passe par l'origine. L'intégrale à calculer est :
$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(e^{2x+1} - 2e^2x\right) \mathrm{d}x \\ &= \left.\frac{1}{2}e^{2x+1} - e^2x^2\right|_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{4}(e-2)e \end{aligned}$$
La valeur de l'aire est $\frac{1}{4}(e-2)e$.

Solution Ex 4.5. →4.5.

Solution Ex 4.6. →4.6.
On commence par factoriser la limite
$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1} \frac{1-x^2}{x^2+x-2} &= \lim_{x\to 1} \frac{(1-x)(1+x)}{(x+2)(x-1)} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{-(x-1)(1+x)}{(x+2)(x-1)} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{-(1+x)}{(x+2)} \\ &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Solution Ex 4.7. →4.7.
$$\begin{aligned} &\int^x (t^3 - 2t + 1)\,\mathrm{d}t \\ &\left.\frac{t^4}{4} - t^2 + t\right|^x \\ &\frac{x^4}{4} - x^2 + x \end{aligned}$$

Solution Ex 4.8. →4.8.

On commence par construire la formule nécessaire

à $t = 0$, on a $C_0 = 1\,000$

à $t = 1$, on a $C_1 = C_0 + C_0 \cdot 0.025 = C_0(1 + 0.025) = C_0 \cdot 1.025$

à $t = 2$, on a $C_2 = C_1 \cdot 1.025 = C_0 \cdot 1.025 \cdot 1.025$

à $t = n$, on a $C_n = C_0 \cdot 1.025^n$

Il s'agit mainteant de résoudre l'équation suivante pour n

$$\begin{aligned}
1\,560 = 1\,000 \cdot 1.025^n \quad &\longrightarrow \quad \frac{1\,560}{1\,000} = 1.025^n \\
&\longrightarrow \quad \frac{3}{2} = 1.025^n \\
&\longrightarrow \quad \log_{10}\left(\frac{3}{2}\right) = n \cdot \log_{10}(1.025) \\
&\longrightarrow \quad n = \frac{\log_{10}(3) - \log_{10}(2)}{\log_{10}(1.025)} \\
&\longrightarrow \quad n = 16.42
\end{aligned}$$

Tom a environ 16 ans.

Solution Ex 4.9. →4.9.

L'équation générale d'un cercle centré en $C = (a; b)$ et de rayon r donné sous forme cartésienne est

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 - 6x + 14y + 42 = 0 \quad &\longrightarrow \quad x^2 - 6x + y^2 + 14y = -42 \\
&\longrightarrow \quad (x - 3)^2 - 9 + (y + 7)^2 - 49 = -42 \\
&\longrightarrow \quad (x - 3)^2 + (y + 7)^2 = 16
\end{aligned}$$

Par identification on déduit que le cercle est de centre $(3; -7)$ et de rayon $r = 4$.

4.5 Solutions - Divers - Trigonométrie - Niveau standard

Solution Ex 4.10. →4.10.
L'intersection avec l'axe y est la solution de $h(0)$.

$$h(0) = \frac{1}{2} - \sin(0+\pi) = \frac{1}{2}$$

L'intersection avec l'axe des x est la solution de $h(x) = 0$.

$$h(x) = \frac{1}{2} - \sin(x+\pi) = 0$$

Résolution :

$$\sin(x+\pi) = \frac{1}{2} \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad \sin(x+\pi) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

Par identification (ou en composant avec arcsin() ou $= \sin^{-1}()$ de chaque côté de l'égalité),

$$\begin{aligned} x+\pi &= \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad x = -\pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ x+\pi &= \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{aligned}$$

Il est plus élégant de donner les résultats d'une équation trigonométrique dans le 1er tour, c'est-à-dire dans l'intervalle $[0; 2\pi]$. Dans ce cas, il suffit d'ajouter 2π aux résultats, cela donne finalement

$$\begin{aligned} x &= -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi = 2\pi - \frac{5\pi}{6} + 2k\pi = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi = 3.665 + 2k\pi \\ x &= -\frac{\pi}{6} + 2k\pi = 2\pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi = 5.759 + 2k\pi \end{aligned}$$

(voir FIGURE 4.2 et FIGURE 4.3)

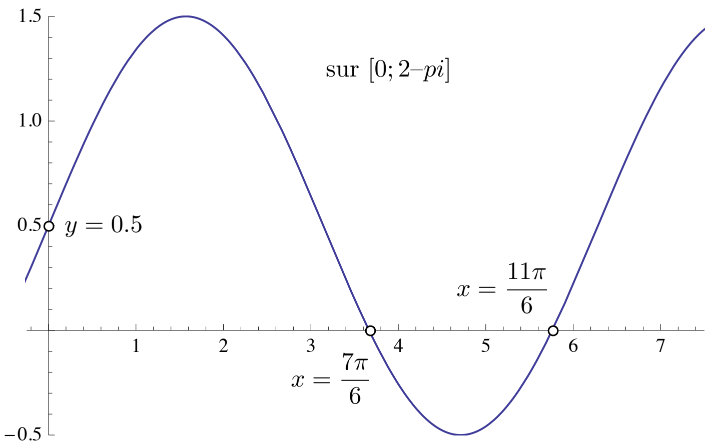

FIGURE 4.2 – Exercice 4.10

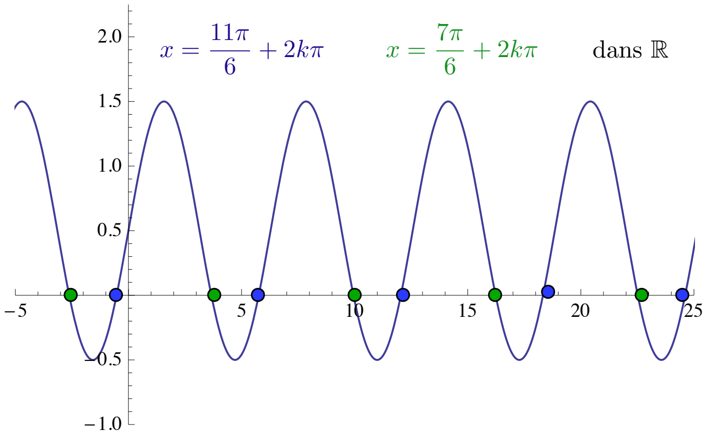

FIGURE 4.3 – Exercice 4.10

Solution Ex 4.11. →4.11.
On commence par récrire l'équation de manière à n'avoir que des $\cos(3x)$ et on passe tous les termes à gauche,

$$\begin{aligned} 3\cos(3x) = 2\sin^2(3x) \quad &\xrightarrow{\looparrowright} \quad 3\cos(3x) = 2(1-\cos^2(3x)) \\ &\xrightarrow{\looparrowright} \quad 2\cos^2(3x) + 3\cos(3x) - 2 = 0 \end{aligned}$$

On effectue la substitution $y = \cos(3x)$ et on obtient l'équation quadratique

$$2y^2 + 3y - 2 = 0$$

Le discriminant ($\Delta = b^2 - 4ac$) vaut 25. Les solutions de l'équation sont

$$\begin{aligned} y_1 &= \tfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \tfrac{-3+5}{4} = \tfrac{1}{2} \\ y_2 &= \tfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \tfrac{-3-5}{4} = -2 \end{aligned}$$

On fait la substitution en retour pour chacune des solutions

$$\begin{aligned} y_1 = \tfrac{1}{2} \quad &\xrightarrow{\looparrowright} \quad \cos(3x) = \tfrac{1}{2} \\ y_2 = -2 \quad &\xrightarrow{\looparrowright} \quad \cos(3x) = -2. \end{aligned}$$

La deuxième solution est éliminée, car l'ensemble des images de la fonction $\cos(x)$ est l'intervalle $[-1;1]$ uniquement. Il reste à résoudre $\cos(3x) = \frac{1}{2}$.

Les angles dont le cosinus vaut $\frac{1}{2}$ sont $\frac{\pi}{3}$ et $2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$, donc

$$\begin{aligned} \cos(3x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \quad &\xrightarrow{\cos^{-1}} \quad 3x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ &\xrightarrow{\looparrowright} \quad x = \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \\ \cos(3x) = \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) \quad &\xrightarrow{\cos^{-1}} \quad 3x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \\ &\xrightarrow{\looparrowright} \quad x = \frac{5\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \end{aligned}$$

Les solutions dans $\mathbb{R}$ sont :

$$x = \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \quad \text{et} \quad x = \frac{5\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

Pour trouver les solutions dans l'intervalle $[0;2\pi]$, il faut faire varier la valeur de k de $\frac{2k\pi}{3}$ jusqu'à ce que l'angle dépasse 2π. Dans les deux cas, les valeurs permises pour k sont $0, 1, 2$. Ce qui donne pour la première équation :

$$x \in S_1 = \left\{\frac{\pi}{9}, \frac{7\pi}{9}, \frac{13\pi}{9}\right\}$$

et pour la deuxième :

$$x \in S_2 = \left\{\frac{5\pi}{9}, \frac{11\pi}{9}, \frac{17\pi}{9}\right\}$$

L'intégralité des solutions est la réunion des deux ensembles $S_1 \cup S_2$.

Solution Ex 4.12. $\rightarrow$4.12.

L'équation de la droite tangente en un point d'abscisse x_0 du graphe de la fonction $f(x)$ est donnée par

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

La dérivée de $f(x) = \sin(x)$ est la fonction $f'(x) = \cos(x)$. Pour chacune des valeurs d'abscisses 0, $\frac{\pi}{2}$ et π on a les droites

1. Pour $x_0 = 0$:
   $f(x_0) = \sin(0) = 0$,
   $f'(x_0) = \cos(0) = 1$ d'où

   $$d_1 : y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad d_1 :\ y - 0 = 1(x - 0) \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad d_1 :\ y = x.$$

2. Pour $x_0 = \frac{\pi}{2}$:
   $f(x_0) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$,
   $f'(x_0) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ d'où

   $$d_2 : y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad d_2 :\ y - 1 = 0(x - \frac{\pi}{2}) \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad d_2 : y = 1.$$

3. Pour $x_0 = \pi$:
   $f(x_0) = \sin(\pi) = 0$,
   $f'(x_0) = \cos(\pi) = -1$ d'où

   $$d_3 : y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad d_3 :\ y - 0 = -1(x - \pi) \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad d_3 : y = -x + \pi.$$

Calcul des points A, B, C (voir FIGURE4.4).

1. $A = d_1 \cap d_2$

   $$\begin{cases} x - y = 0 \\ y = 1 \end{cases} \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad A = (1;1).$$

2. $B = d_2 \cap d_3$

   $$\begin{cases} y = 1 \\ x + y = \pi \end{cases} \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad B = (\pi - 1;1).$$

3. $B = d_1 \cap d_3$

   $$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = \pi \end{cases} \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad C = \left(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right).$$

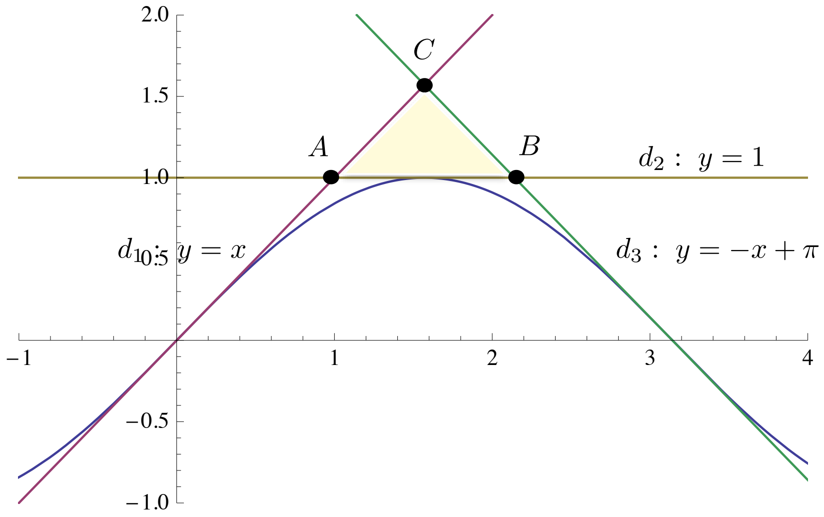

FIGURE 4.4 – Exercice 4.12

La base du triangle ABC est AB et vaut $|\overline{OB} - \overline{OA}| = \pi - 2$.
La hauteur du triangle ABC est la distance entre le point C est la droite $d_2 : \; y - 1 = 0$:

$$\delta(C; d_2) = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|\frac{\pi}{2} - 1|}{1} = \frac{\pi}{2} - 1$$

Finalement l'aire du triangle ABC est :

$$\frac{(\pi - 2)(\frac{\pi}{2} - 1)}{2} = 1 - \pi + \frac{\pi^2}{4} \approx 0.326$$

Solution Ex 4.13. $\rightarrow$4.13.
On commence par tout ramenr du même côté,

$$\cos^3(2x) = \frac{3}{4}\cos(2x) \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad \cos^3(2x) - \frac{3}{4}\cos(2x) = 0 \quad \xrightarrow{\looparrowright}$$

On pose $y = \cos(2x)$ et on substitue :

$$\cos^3(2x) - \frac{3}{4}\cos(2x) = 0 \quad \xrightarrow{\cos(2x) = y} \quad y^3 - \frac{3}{4}y = 0 \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad y(y^2 - \frac{3}{4}) = 0.$$

Les solutions de la dernière équation sont :

$$\begin{array}{rlcl} \textbf{i)} & y = 0 & \xrightarrow{y = \cos(2x)} & \cos(2x) = 0 \\ \textbf{ii)} & y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} & \xrightarrow{y = \cos(2x)} & \cos(2x) = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}$$

Solutions :

i) Les angles dont le cosinus est nul sont $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$. Il y a deux équations à résoudre :

$$\begin{array}{rcll} \cos(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & \xrightarrow{\looparrowright} & 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi & \\ & \xrightarrow{\looparrowright} & x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} & \text{(1ère solution)} \\ \cos(2x) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) & \xrightarrow{\looparrowright} & 2x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi & \\ & \xrightarrow{\looparrowright} & x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} & \text{(2e solution)} \end{array}$$

iia) Les angles dont le cosinus est $\frac{\sqrt{3}}{2}$ sont $\frac{\pi}{6}$ et $(2\pi - \frac{\pi}{6}) = \frac{11\pi}{6}$. Il y a deux équations à résoudre :

$$\begin{aligned}
\cos(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \quad & \xrightarrow{\looparrowright} \quad 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\
& \xrightarrow{\looparrowright} \quad x = \frac{\pi}{12} + k\pi \qquad \text{(3e solution)} \\
\cos(2x) = \cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) \quad & \xrightarrow{\looparrowright} \quad 2x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \\
& \xrightarrow{\looparrowright} \quad x = \frac{11\pi}{12} + k\pi \qquad \text{(4e solution)}
\end{aligned}$$

iia) Les angles dont le cosinus est $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ sont $\frac{5\pi}{6}$ et $(2\pi - \frac{5\pi}{6}) = \frac{7\pi}{6}$. Il y a deux équations à résoudre :

$$\begin{aligned}
\cos(2x) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) \quad & \xrightarrow{\looparrowright} \quad 2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \\
& \xrightarrow{\looparrowright} \quad x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \qquad \text{(5e solution)} \\
\cos(2x) = \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) \quad & \xrightarrow{\looparrowright} \quad 2x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \\
& \xrightarrow{\looparrowright} \quad x = \frac{7\pi}{24} + k\pi \qquad \text{(6e solution)}
\end{aligned}$$

4.6 Solutions - Divers - Logarithme - Niveau standard

Solution Ex 4.14. →4.14.
La progression semble être logarithmique, on va donc chercher une fonction de forme générale

$$y = C \cdot b^{a \cdot t}$$

avec

$y =$ la population à l'instant t,
$C =$ la population initiale,
$b =$ la base du logarithme,
$a =$ une constante,
et finalement t qui représente le temps.

Il y a trois inconnues donc il nous faut trois équations. en prenant les résultats correspondant aux temps $t = 1, 2, 3$ heures, on peut former le système de trois équations à trois inconnues suivant :

$$\begin{cases} C \cdot b^{a \cdot 1} = 72 & (1) \\ C \cdot b^{a \cdot 2} = 648 & (2) \\ C \cdot b^{a \cdot 3} = 5832 & (3) \end{cases}$$

La division de (2) par (1) donne :

$$\frac{(2)}{(1)} = \frac{C \cdot b^{a \cdot 2}}{C \cdot b^{a \cdot 1}} = \frac{648}{72} \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad b^a = 9$$

En substituant $b^a = 9$ dans (1) on a que $C = 8$.
Il suffit de choisir b et a de manière telle que b^a soit égal à 9. On peut par exemple choisir $b = 3$ et $a = 2$.
La fonction qui va nous permettre de reconstituer les données de pépé est :

$$f(x) = y = 8 \cdot 3^{(2 \cdot t)}$$

1.

temps	population
0	$8 \cdot 3^0 = 8$
0.5	24
1	72
1.5	216
2	648
2.5	$8 \cdot 3^{2 \cdot 2.5} = 1\,944$
3	5832
3.5	$8 \cdot 3^{2 \cdot 3.5} = 17\,496$

2. Deux jours sont $2 \times 24 = 48$ heures, en calculant $f(48)$ on obtient :

$$f(48) = 8 \cdot 3^{2 \cdot 48} = 5.09 \cdot 10^{46} \text{ bactéries!!!.}$$

3. Il s'agit de résoudre l'équation suivante pour t :

$$10^7 = 8 \cdot 3^{2 \cdot t}$$

$$\begin{aligned} 10^7 = 8 \cdot 3^{2 \cdot t} \quad &\xrightarrow{\log_{10}} \quad \log_{10}(10^7) = \log_{10}(8) + 2t \log_{10}(3) \\ &\xrightarrow{\looparrowright} \quad t = \frac{\log_{10}(10^7) - \log_{10}(8)}{2 \log_{10}(3)} \approx 6.40 \end{aligned}$$

Il faudra un peu moins de 6 heures et demi pour atteindre une population de 10^7 bactéries.

Solution Ex 4.15. $\rightarrow$4.15.

Rappels :

Les expressions suivantes sont valables dans n'importe quelle base.

a) $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$

b) $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$

c) $\log\left(\frac{1}{a}\right) = -\log(a)$

d) $\log(a^n) = n\log(a)$

e) $\log(1) = 0$

ou encore

i) $\log_b(a) = c \Leftrightarrow b^c = a$

ii) $\log_b(a) = \dfrac{\ln(a)}{\ln(b)} = \dfrac{\log_{10}(a)}{\log_{10}(b)} = \dfrac{\log_x(a)}{\log_x(b)}$

Résolution de l'exercice :

1. On peut récrire l'expression :

$$\log_x(27) = 4 \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad x^4 = 27 \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad x^4 = 3^3 \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad x = 3^{\frac{3}{4}} = 2.27951$$

2. On effectue la substitution $2^x = y$ après avoir un peu arranger l'équation

$$\begin{aligned} 4 \cdot 2^{2x} + 11 \cdot 2^x = 3 \quad &\xrightarrow{\looparrowright} \quad 4(2^x)^2 + 11 \cdot 2^x - 3 = 0 \\ &\xrightarrow{y = 2^x} \quad 4y^2 + 11y - 3 = 0 \end{aligned}$$

Les solutions de cette dernière équation sont $y = -3$ et $y = \frac{1}{4}$. Il faut à présent effectuer la substitution en retour $y = 2^x$.

$$\begin{aligned} &y = -3 \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad 2^x = -3 \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad \text{Pas de solution, } 2^x > 0 \text{ pour n'importe quelle valeur de } x. \\ &y = 2^x = \frac{1}{4} \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad 2^x = 2^{-2} \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad x = -2. \end{aligned}$$

3.

$$x^8 = 16 \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad (x^2)^4 = 2^4 \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad x^2 = 2 \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad x = \sqrt{2}$$

4.

$$\begin{aligned} 16^x - 2 \cdot 4^{x+1} = -15 \quad &\xrightarrow{\looparrowright} \quad (4^2)^x - 2 \cdot 4^x \cdot 4^1 + 15 = 0 \\ &\xrightarrow{\looparrowright} \quad (4^x)^2 - 8 \cdot 4^x + 15 = 0 \end{aligned}$$

En posant $4^x = y$ et en substituant on obtient l'équation quadratique

$$y^2 - 8y + 15 = (x-3)(x-5) = 0$$

dont les solutions sont $y = 3$ et $y = 4$. On effecteur à présent la substitution en retour sur ces deux équations

$$\begin{aligned} &y = 3 \quad \xrightarrow{y = 4^x} \quad 4^x = 3 \quad \xrightarrow{\log_4} \quad \log_4(4^x) = \log_4(3) \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad x = \log_4(3) = \frac{\ln(3)}{\ln(4)} \\ &y = 4 \quad \xrightarrow{y = 4^x} \quad 4^x = 4^1 \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad x = 1 \end{aligned}$$

5.

$$\log_4(x) = \frac{5}{2} \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad 4^{\frac{5}{2}} = x \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^5 = x \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad x = 32$$

Solution Ex 4.16. $\rightarrow$4.16.

$$\frac{\sqrt[3]{9\sqrt[5]{81}\sqrt{3}}}{\sqrt[10]{729\sqrt[3]{\frac{1}{9}}}} = \frac{\sqrt[3]{3^2\sqrt[5]{3^4}3^{\frac{1}{2}}}}{\sqrt[10]{3^6\sqrt[3]{3^{-2}}}} = \frac{\left(3^2 \cdot 3^{\frac{4}{5}}\right)^{\frac{1}{3}} 3^{\frac{1}{2}}}{\left(3^6 \cdot 3^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{10}}} = \frac{3^{\frac{14}{15}} 3^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{16}{30}}} = \frac{3^{\frac{43}{30}}}{3^{\frac{16}{30}}} = 3^{\frac{27}{30}} = 3^{\frac{9}{10}}$$

Chapitre 5

Géométrie - Exercices d'examens

5.1 Géométrie - Exercices d'examens - Niveau standard

Ex 5.1. (Nyon - Préparation 2013)
Soient les point $A(-8;11)$, $B(2;-9)$ et $G(\frac{2}{3};\frac{5}{3})$.

1. Calculer les coordonnées de B sachant que G est le centre de gravité du triangle ABC.
2. Montrer que le triangle ABC est rectangle puis en déduire l'équation du cercle circonscrit.
3. Montrer que le point $D(2;1)$ est le centre du cercle inscrit du triangle ABC.

Solution

Ex 5.2. (Nyon - Juin 2010)
Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on donne les deux points $C(-4;-17)$ et $T(4;2)$, ainsi que les deux droites d'équations $a:\ x+4=0$ et $b:\ 4x-3y-35=0$.

1. Montrer que C est le point commun aux deux droites a et b.
2. Déterminer les équations des bissectrices des droites a et b.
3. On donne le cercle d'équation
$$\gamma:\ x^2+y^2-2x+4y-20=0.$$
Déterminer les coordonnées du centre P de γ. Montrer que γ passe par T et qu'il admet a et b comme tangentes.
4. Calculer les coordonnées du point A sur a et du point B sur b, afin que le cercle γ soit inscrit dans le triangle ABC et tangent au côté AB en T.
5. Montrer que le triangle ABC est rectangle en B et déterminer une équation de son cercle circonscrit.

Solution

Ex 5.3. () Relativement à un repère orthonormé $(O;E_1;E_2)$, on donne le cercle γ d'équation
$$\gamma:\ x^2+y^2-12x+16y=0,$$
la droite t d'équation
$$t:\ 4x+3y-50=0,$$
ainsi que les points $P(-4;2)$ et $T(14;-2)$.

1. Déterminer les coordonnées du centre de γ et son rayon r.
2. Montrer que t est tangente à γ en T.
3. Montrer que γ passe par l'origine et que la tangente t' à γ en O est perpendiculaire à t.
4. Soit d la droite passant par O et P. Elle recoupre γ en un point R et coupe t en un point S. Calculer les coordonnées de R et de S.
5. Montrer que le carré de la distance de S à T est égal au produit des distances de S à R et de S à O.
6. Déterminer les coordonnées du centre du cercle γ' tangent à t en T et passant par P.

Solution

5.2 Géométrie - Solutions des exercices d'examens - Niveau standard

Solution Ex 5.1. →5.1.

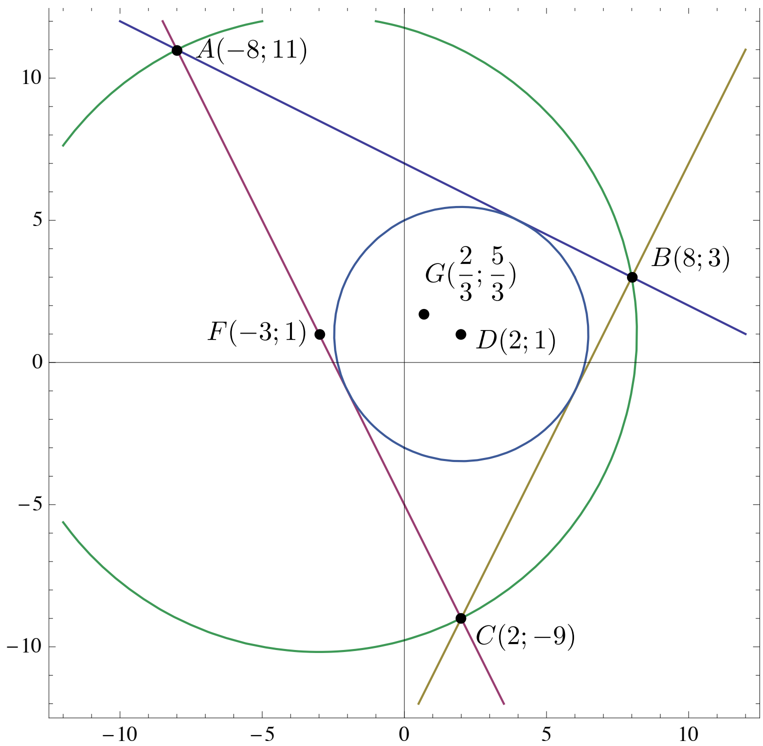

FIGURE 5.1 – Exercice 5.1

1. Le vecteur lieu du centre de gravité d'un triangle est obtenu en multipliant par $\frac{1}{3}$ le vecteur lieu résultant de l'addition des vecteurs joignants l'origine à chacun des sommets.

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$$

De cette équation on isole le vecteur $\overrightarrow{OB}$,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OB} &= 3 \cdot \overrightarrow{OG} - \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}\right) \\ &= 3\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} -8 \\ 11 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -9 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Le point B a pour coordonnées les composantes du vecteur $\overrightarrow{OB}$ donc $B = (8; 3)$.

2. On commence par calculer les vecteurs directeurs des droites contenant les segments $[AB]$, $[AC]$ et

$[BC]$, autrement dit les côtés du triangle :

$$\vec{d}_1 = \overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 16 \\ -8 \end{bmatrix}$$
$$\vec{d}_2 = \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 10 \\ -20 \end{bmatrix}$$
$$\vec{d}_3 = \overrightarrow{BC} = \begin{bmatrix} -6 \\ -12 \end{bmatrix}$$

Par simple inspection on voit que :

$$\vec{d}_1 \circ \vec{d}_3 = \begin{bmatrix} 16 \\ -8 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} -6 \\ -12 \end{bmatrix} = -96 + 96 = 0.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux, car leur produit scalaire est nul, on en déduit que le triangle est rectangle en B. Le triangle étant rectangle en B, le segment AC est la diagonale d'un rectangle, donc son point milieu est le centre du cercle qui circonscrit le rectangle qui contient notre triangle. Le centre F du cercle circonscrit est :

$$\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} -8 \\ 11 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -9 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Le centre du cercle circonscrit est $F(-3; 1)$.
Le rayon r du cercle est donné par la distance du centre F à l'un des sommets du triangle ABC.

$$\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OF} = \begin{bmatrix} -8 \\ 11 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Le rayon r est la norme de $\overrightarrow{FA}$:

$$r = ||\overrightarrow{FA}|| = \sqrt{(-5)^2 + 10^2} = 5\sqrt{5}.$$

Le rayon du cercle vaut $r = 5\sqrt{5}$ et son équation est :

$$(x+3)^2 + (y-1)^2 = 125.$$

3. Pour prouver que $D(2; 1)$ est le centre du cercle inscrit, il suffit de montrer que la distance de ce point à chacun des côtés du triangle est la même. On commence par trouver l'équation des droites portant les segments $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$.

$$\begin{array}{lclcclcl}
d_{AB} & : & \mathbf{d}_1 = \begin{bmatrix} 16 \\ -8 \end{bmatrix} & \xrightarrow{\hookrightarrow} & \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} x+8 \\ y-11 \end{bmatrix} = 0 & \xrightarrow{\hookrightarrow} & x + 2y - 14 = 0 \\
d_{AC} & : & \mathbf{d}_2 = \begin{bmatrix} 10 \\ -20 \end{bmatrix} & \xrightarrow{\hookrightarrow} & \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} x+8 \\ y-11 \end{bmatrix} = 0 & \xrightarrow{\hookrightarrow} & 2x + y + 5 = 0 \\
d_{BC} & : & \mathbf{d}_3 = \begin{bmatrix} -6 \\ -12 \end{bmatrix} & \xrightarrow{\hookrightarrow} & \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} x-8 \\ y-3 \end{bmatrix} = 0 & \xrightarrow{\hookrightarrow} & -2x + y + 13 = 0
\end{array}$$

La distance du point $D(x; y)$ aux droites formants le triangle se calcule à l'aide de la formule

$$\delta(F; d) = \frac{|ax + bx + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

En adaptant aux circonstances, on obtient :

$$\begin{aligned}
\delta(D; d_{AB}) &= \frac{|x + 2y - 14|}{\sqrt{5}} = \frac{|(2) + 2(1) - 14|}{\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}} \\
\delta(D; d_{AC}) &= \frac{|2x + y + 5|}{\sqrt{5}} = \frac{|2(2) + (1) + 5|}{\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}} \\
\delta(D; d_{BC}) &= \frac{|-2x + y + 13|}{\sqrt{5}} = \frac{|-2(2) + (1) + 13|}{\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

On a ainsi prouvé que le point $D(2;1)$ est le centre du cercle inscrit et que son équation est :

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 20.$$

(Voir FIGURE 5.1).

Solution Ex 5.2. $\to$5.2.
(Voir FIGURE 5.2)

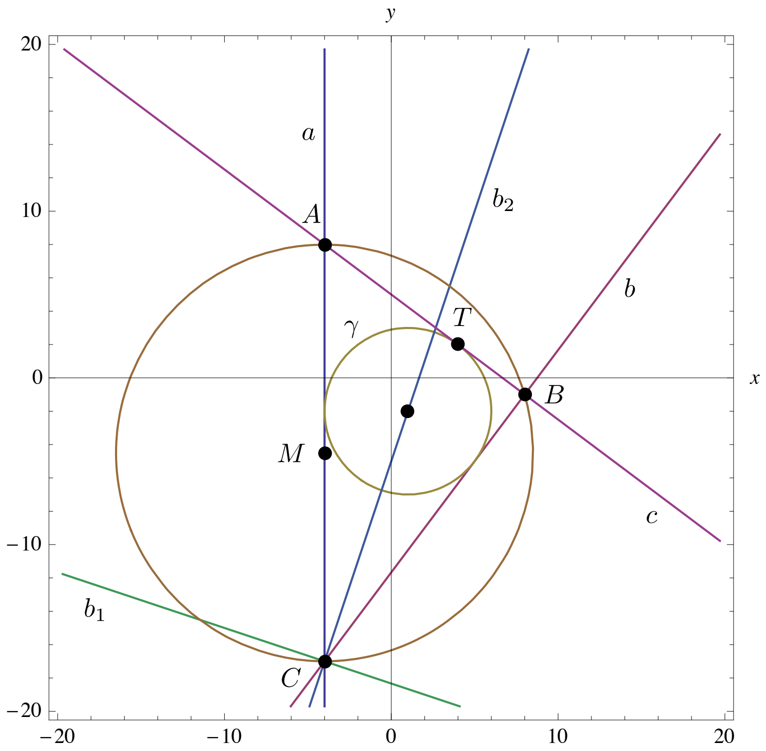

FIGURE 5.2 – Exercice 5.2

1. Le point C fait partie des deux droites a et b car il satisfait leurs équations :

$$\begin{aligned} a:\ x+4=0 &\xrightarrow{\to C(-4;17)} (-4)+4=0 \\ b:\ 4x-3y-35=0 &\xrightarrow{\to C(-4;-17)} 4(-4)-3(-17)-35=0 \end{aligned}$$

   Le point C ne peut être que l'intersection de a et de b.

2. Les bissectrices de a et de b peuvent être obtenue à l'aide de la formule :

$$\frac{gx+hy+c}{\sqrt{g^2+h^2}} = \pm\frac{dx+ey+d}{\sqrt{d^2+e^2}}$$

   En substituant dans cette formule les équations des droites a et b on obtient les deux bissectrices b_1 et b_2 désirées.

$$\begin{aligned} b_1:\ \frac{x+4}{\sqrt{1^2+0^2}} &= +\left(\frac{4x-3y-35}{\sqrt{3^2+4^2}}\right) \xrightarrow{\looparrowright} x+3y+55=0 \\ b_2:\ \frac{x+4}{\sqrt{1^2+0^2}} &= -\left(\frac{4x-3y-35}{\sqrt{3^2+4^2}}\right) \xrightarrow{\looparrowright} 3x-y-5=0 \end{aligned}$$

Une manière un peu plus artisanale d'arriver au même résultat est celle d'utiliser la somme et la différence des vecteurs directeurs unitaires des deux droites. Les vecteurs directeurs unitaires de a et b sont respectivement

$$x+4=0 \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad \widehat{\mathbf{d}}_a = \frac{\mathbf{d}_a}{||\mathbf{d}_a||} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$$4x-3y-35=0 \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad \widehat{\mathbf{d}}_b = \frac{\mathbf{d}_b}{||\mathbf{d}_b||} = \frac{1}{\sqrt{(-3)^2+4^2}}\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{3}{5}\\\frac{4}{5}\end{bmatrix}.$$

La somme et la différence de $\widehat{\mathbf{d}}_a$ et $\widehat{\mathbf{d}}_b$ sont :

$$\widehat{\mathbf{d}}_a + \widehat{\mathbf{d}}_b = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\frac{3}{5}\\\frac{4}{5}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{3}{5}\\\frac{9}{5}\end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$$

$$\widehat{\mathbf{d}}_a - \widehat{\mathbf{d}}_b = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\frac{3}{5}\\\frac{4}{5}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{3}{5}\\\frac{1}{5}\end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix}-3\\1\end{bmatrix}$$

Les droites de vecteurs directeurs $\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix}-3\\1\end{bmatrix}$ passant par le point $C(-4;-17)$ ont pour équations :

$$b_1: \begin{bmatrix}x+4\\y+17\end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} = (x+4)+3(y+17) = 0 \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad x+3y+55=0$$

$$b_2: \begin{bmatrix}x+4\\y+17\end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix} = 3(x+4)-(y-17) = 0 \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad 3x-y-5=0$$

3. On met l'équation du cercle γ sous sa forme générale :

$$(x-1)^2-1+(y+2)^2-4-20=0 \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad (x-1)^2+(y+2)^2=25$$

Le centre est en $P(1;-2)$ et le rayon r du cercle est 5.

γ contient le point T car si l'on substitue les coordonnées de T dans l'équation de γ on obtient une égalité.

$$(x-1)^2+(y+2)^2=25 \quad \xrightarrow{T(4;2)} \quad (4-1)^2+(2+2)^2=25 \quad \square$$

Si γ a les droites a et b comme tangentes alors la distance du centre du cercle P à ces droites est égale au rayon du cercle $r=5$. Les distances de P à a et b sont :

$$\delta(P;a) = \frac{|x+4|}{1} \quad \xrightarrow{T(1;-2)} \quad \frac{|1+4|}{1} = 5$$

$$\delta(P;b) = \frac{|4x-3y-35|}{1} \quad \xrightarrow{T(1;-2)} \quad \frac{|4+6-35|}{5} = 5$$

Les droites a et b sont tangentes au cercle γ.

4. Afin que le côté AB soit tangent au cercle il faut que son vecteur normal soit de même direction que le vecteur joignant les points T et P :

$$\mathbf{n}_{AB} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OT} = \begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3\\-4\end{bmatrix}.$$

L'équation de la droite c de vecteur normal $\mathbf{n}_{AB}$ passant par le point T est :

$$c: \mathbf{n}_{AB} \circ \overrightarrow{TX} = 0 \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad \begin{bmatrix}-3\\-4\end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix}x-4\\y-2\end{bmatrix} = 0 \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad 3x+4y-20=0.$$

Les coordonnées des points A et B sont données par les intersections $a \cap c$ et $b \cap c$.

$$A: a \cap c: \left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & 0 & = & -4 \\ 3x & + & 4y & = & 20 \end{array}\right. \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad A=(-4;8)$$

$$B: b \cap c: \left\{\begin{array}{rcrcr} 4x & - & 3y & = & 35 \\ 3x & + & 4y & = & 20 \end{array}\right. \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad B=(8;-1)$$

5. Si ABC est rectangle en B alors les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux.

$$\overrightarrow{BA} = \begin{bmatrix} -12 \\ 9 \end{bmatrix}$$
$$\overrightarrow{BC} = \begin{bmatrix} -12 \\ 16 \end{bmatrix}$$
$$\overrightarrow{BA} \circ \overrightarrow{BC} = \begin{bmatrix} -12 \\ 9 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} -12 \\ 16 \end{bmatrix} = 144 - 144 = 0$$

Le produit scalaire étant nul, le triangle est rectangle en B. Si le triangle est rectangle en B alors le centre du cercle dans lequel il est inscrit est le milieu du côté opposé, c'est-à-dire de AC qui est l'hypoténuse du triangle rectangle. Le milieu (M) du segment AC est donné par le vecteur :

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} -4 \\ 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ -17 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -4 \\ -\frac{9}{2} \end{bmatrix}$$

Le centre du cercle circonscrit du triangle ABC est le point $M = (-4; -\frac{9}{2})$. Le rayon du cercle est la distance entre le centre et l'un des sommets du triangle :

$$r = ||\overrightarrow{MA}|| = ||\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}|| = \sqrt{(-4-(-4))^2 + (-9/2-8)^2} = \frac{25}{2}$$

L'équation du cercle est

$$(x+4)^2 + \left(y + \frac{9}{2}\right) = \frac{625}{4}$$

Solution Ex 5.3. →5.3.

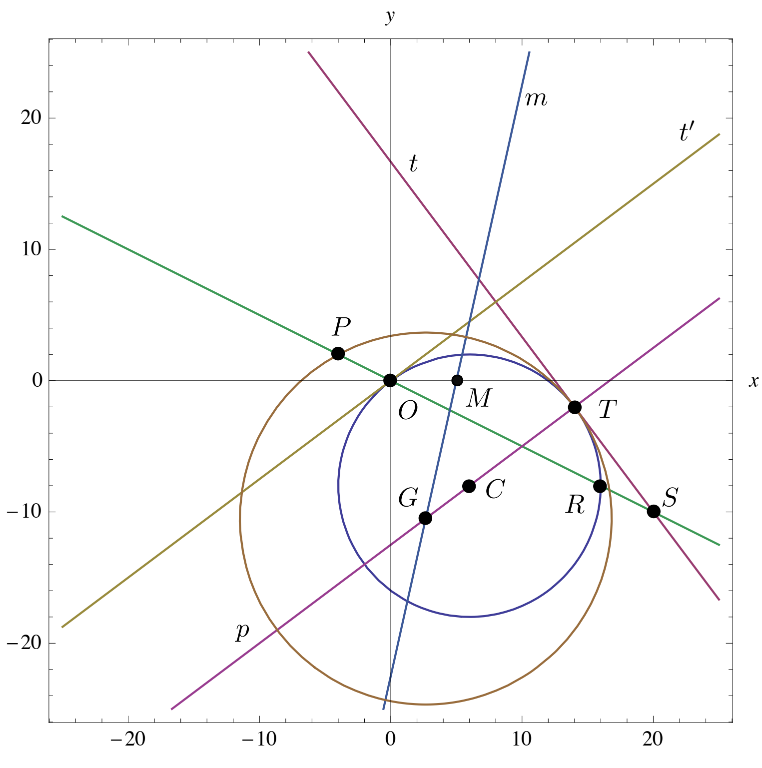

FIGURE 5.3 – Exercice 5.3

1. On utilise la méthode du début du carré pour récrire l'équation du cercle sous une forme qui nous permet de lire son centre et son rayon :

$$\gamma:\ x^2+y^2-12x+16y=0 \quad\longrightarrow\quad (x-6)^2-36+(y+8)^2-64=0 \quad\longrightarrow\quad (x-6)^2+(y+8)^2=100.$$

Le centre du cercle est le point $C=(6;-8)$ et son rayon est $r=10$.

2. Pour qu'une droite soit tangente à un cercle, il faut et il suffit que la distance de celle-ci au centre du cercle soit égale au rayon. La distance d'un point $P(p_1;p_2)$ à une droite $d:\ ax+by+c=0$ est donnée par l'expression

$$\delta(P;d)=\frac{|a\cdot p_1+b\cdot p_2+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Dans notre cas on a :

$$\delta(C;t)=\frac{|4(6)+3(-8)-50|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{50}{5}=10=r_\gamma.$$

La droite t est tangente au cercle γ.

3. Le cercle γ passe par l'origine, car le point $O(0;0)$ satisfait l'équation du cercle :

$$\gamma:\ \ x^2+y^2-12x+16y=0 \quad\xrightarrow{O(0;0)}\quad 0^2+0^2-12(0)+16(0)=0$$

La tangente t' au cercle γ passant par l'origine est la droite dont la normale est le vecteur reliant l'origine au centre du cercle. La normale de t' vaut :

$$\mathbf{n}_{t'}=\overrightarrow{OC}-\mathbf{0}=\begin{bmatrix}6\\-8\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}3\\-4\end{bmatrix}.$$

L'équation de t' est :

$$\begin{aligned} t':\ \overrightarrow{n_{t'}}\circ\overrightarrow{OX}=0 \quad&\longrightarrow\quad \begin{bmatrix}3\\-4\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}x-0\\y-0\end{bmatrix}=0\\ &\longrightarrow\quad t':\ \ 3x-4y=0.\end{aligned}$$

Les droites t et t' ont pour vecteurs normaux le vecteur $\mathbf{n}_t=\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$ et $\mathbf{n}_{t'}=\begin{bmatrix}3\\-4\end{bmatrix}$. Le produit scalaire de ces deux vecteurs est nul donc les vecteurs sont orthogonaux :

$$\mathbf{n}_t\circ\mathbf{n}_{t'}=\begin{bmatrix}3\\-4\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}=12-12=0\Rightarrow\mathbf{n}_t\perp\mathbf{n}_{t'}$$

Les vecteurs normaux des droites t et t' étant perpendiculaires, celles-ci le sont aussi.

4. La droite d passe par $P(-4;2)$ et l'origine $O(0;0)$, sa pente est de $m=\frac{2}{-4}=-\frac{1}{2}$, passant par $(0;0)$ son ordonnée à l'origine est nulle donc

$$d:\ y=-\frac{x}{2} \quad\longrightarrow\quad 2y+x=0$$

L'intersection de d et de γ est solution du système :

$$\begin{aligned}\left\{\begin{array}{ccccc}(x-6)^2&+&(y+8)^2&=&100\\x&+&2y&=&0\end{array}\right. \quad&\xrightarrow{x=-2y}\quad (-2y-6)^2+(y+8)^2=100\\ &\longrightarrow\quad 5y^2+40y=0\\ &\longrightarrow\quad 5y(y+8)=0 \quad\longrightarrow\quad y=0 \text{ et } y=-8.\end{aligned}$$

Les points d'intersection entre γ et d sont l'origine des coordonnées et le point $R = (16; -8)$. Le point S est l'intersection de t et de d et vaut :

$$t \cap d : \left\{ \begin{array}{rcrcrl} 4x & + & 3y & = & 50 & L_1 \\ x & + & 2y & = & 0 & L_2 \end{array} \right. \quad \xrightarrow{L_1 - 4L_2} \quad 3y - 8y = 50$$
$$\xrightarrow{\looparrowright} \quad y = -10 \text{ et } x = 20$$

Le point S est le point $(20; -10)$.

5.

$$||\overrightarrow{ST}||^2 = \overrightarrow{ST} \circ \overrightarrow{ST} = \begin{bmatrix} 6 \\ -8 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 6 \\ -8 \end{bmatrix} = 100$$
$$||\overrightarrow{SR}|| = \sqrt{\overrightarrow{SR} \circ \overrightarrow{SR}} = \sqrt{\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}} = \sqrt{20}$$
$$||\overrightarrow{SO}|| = \sqrt{\overrightarrow{SO} \circ \overrightarrow{SO}} = \sqrt{\begin{bmatrix} -20 \\ 10 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} -20 \\ 10 \end{bmatrix}} = \sqrt{500}$$

En effet :

$$100 = ||\overrightarrow{ST}||^2 = ||\overrightarrow{SR}|| \cdot ||\overrightarrow{SO}|| = \sqrt{500} \cdot \sqrt{20} = 100 \quad \square.$$

6. Le cercle γ' passant par P et tangent au point T est un cercle qui à son centre sur la droite CT (car γ est également tangent à T en ce point). L'intersection de la médiatrice du segment $[TP]$ et de la droite CT donne le centre de γ'. La médiatrice de TP est la droite de vecteur normal $\overrightarrow{TP}$ passant par le point M milieu de $[TP]$.

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OT} + \overrightarrow{OP}) = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 14 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Par conséquent le point M est le point $(5; 0)$. La médiatrice m est donnée par

$$m : \ \overrightarrow{TP} \circ \overrightarrow{mX} = 0 \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad \begin{bmatrix} -18 \\ 4 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} x-5 \\ y-0 \end{bmatrix} = 0$$
$$\xrightarrow{\looparrowright} \quad -18(x-5) + 4y = 0$$
$$\xrightarrow{\looparrowright} \quad m : \ -9x + 2y + 45 = 0$$

La droite p passant par les points C et T est parallèle à t' donc,

$$p : \ \mathbf{n}_{t'} \circ \overrightarrow{CX} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} x-6 \\ y+8 \end{bmatrix} = 0$$
$$\xrightarrow{\looparrowright} \quad 3(x-6) - 4(y+8) = 0$$
$$\xrightarrow{\looparrowright} \quad p : \ 3x - 4y - 50 = 0$$

L'intersection de p et de m donne le centre G de γ'.

$$m \cap p : \left\{ \begin{array}{rcrcrl} 3x & - & 4y & = & 50 & L_1 \\ -9x & + & 2y & = & -45 & L_2 \end{array} \right. \quad \xrightarrow{L_1 + 2L_2} \quad x = \frac{8}{3} \text{ et } y = -\frac{21}{2}$$

Le centre de γ' est $G(\frac{8}{3}; -\frac{21}{2})$. Le rayon de γ' est la distance GT.

$$\overrightarrow{GT} = \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OT} = \begin{bmatrix} -34/3 \\ -17/2 \end{bmatrix}$$
$$||\overrightarrow{GT}|| = \frac{85}{6}$$

Le cercle γ' a pour équation :

$$\left(x - \frac{8}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{21}{2}\right)^2 = \frac{7225}{36}.$$

5.3 Géométrie - Exercices d'examens - Niveau renforcé

Ex 5.4. (Nyon - Juin 2011)
Relativement à un repère orthonormé, on donne :

La sphère Σ_1 d'équation $(x-6)^2 + (y+8)^2 + z^2 = 100$,

la sphère Σ_2 d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 20x + 12y - 8z + 136 = 0$,

la droite d'équation $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$, ainsi que

le point $T = (6; -2; 8)$.

1. Déterminer les coordonnées du centre C_2 et le rayon de Σ_2.
2. Montrer que les sphères Σ_1 et Σ_2 sont tangentes.
3. Montrer que la droite t est tangente à Σ_1 en T.
4. Trouver une équation de la droite d tangente à Σ_1 en T perpendiculaire à la droite t.
5. Déterminer les coordonnées des points de tangence A_1 et A_2 des plans normaux à t et tangents à Σ_1. Donner une équation de chacun de ses plans.
6. Montrer que le plan α d'équation $2x + y + 2z = 22$ intersecte la sphère Σ_1 en un cercle γ. Déterminer les coordonnées du centre et le rayon de γ.

Solution

5.4 Géométrie - Solutions des exercices d'examens - Niveau renforcé

Solution Ex 5.4. →5.4.