Exercices d'examens III

Examen écrit - Maturité fédérale

Niveau standard

Michel Sémon

28/07/2014

Table des matières

Première partie

Exercices d'examens

Chapitre 1

Analyse

1.1 Introduction

Dans cette brochure, vous trouverez les exercices corrigés des sessions de la maturité fédérale (2008-2014) ainsi que des exercices de préparation donnés à mes élèves de l'école Moser de Nyon.

1.2 EXERCICES - Analyse - Niveau standard

Ex 1.1. (Maturité fédérale - Ete 2008)

1. Etudier la fonction f donnée par $\dfrac{x^2-4x+4}{x-1}$. La deuxième dérivée n'est pas demandée.
2. Pour quelle valeur de b le graphe de la fonction g donnée par $g(x) = \dfrac{x^2+bx+4}{x-1}$ possède-t-il une asymptote passant par l'origine ?
3. Pour quelle valeur de c le graphe de la fonction h donnée par $h(x) = \dfrac{x^2-4x+c}{x-1}$ possède-t-il un sommet d'abscisse -1 ?
   Donner alors les coordonnées du deuxième sommet.

Solution

Ex 1.2. (Maturité fédérale - Été 2009)

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2-5x+4}{x}$.

1. Étudier la fonction f en traitant les points suivants :
   (a) l'ensemble de définition, les zéros et le signe de f,
   (b) les asymptotes de f,
   (c) la dérivée f'.
   (d) le tableau de croissance de f ainsi que les coordonnées de ses extremums,
   (e) la représentation graphique de f.
2. L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier votre réponse par un calcul.
   Affirmation : *"en aucun point, la pente de la tangente au graphe de f vaut 2".*
3. Décider, à l'aide d'un calcul, si la tangente au graphe de f au point d'abscisse $x = -1$ passe par le point $P(-10; 17)$.
4. Le graphe de f coupe l'axe Ox en deux points. Calculer l'aire du domaine borné délimité par le graphe de f et l'axe Ox entre ces deux points.

Solution

Ex 1.3. (Maturité fédérale - Hiver 2009)

1. On considère la fonction donnée par $f(x) = x + 1 + \frac{4}{(x-3)^2}$.
   (a) donner son ensemble de définition,
   (b) préciser ses asymptotes,
   (c) calculer ses éventuels extrema et points d'inflexion,
   (d) dresser son tableau des variations, en déduire le nombre de zéros de f,
   (e) tracer son graphe.
2. Pour quelles valeurs de a le graphe de la fonction donnée par $g(x) = x + 1 + \frac{4}{(x-a)^2}$ passe-t-il par le point $P(1;3)$?
3. Pour quelle valeur de b le graphe de la fonction donnée par $h(x) = x + 1 + \frac{4}{(x-b)^2}$ coupe-t-il l'axe Oy avec un angle de 45° ?

Solution

Ex 1.4. (Maturité fédérale - Eté 2010)

On considère la fonction f définie par $f(x) = 1 - \dfrac{15}{(x+5)} + \dfrac{75}{(x+5)^2}$.

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Prouver que la fonction f peut s'écrire :
$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 25}{(x+5)^2}$$
3. Dresser son tableau de signes.
4. Préciser ses asymptotes.
5. Calculer ses éventuels extrema.
6. Dresser son tableau des variations.
7. Tracer son graphe.
8. La fonction :
$$g(x) = 10\left(1 - \frac{15}{(x+5)} + \frac{75}{(x+5)^2}\right)$$
modélise le niveau d'oxygène (mg/l) dans un plan d'eau x mois ($x \geq 0$) après un déversement de pétrole.
9. Déterminer le niveau d'oxygène au moment du déversement du pétrole.
10. Déterminer le niveau minimum d'oxygène. Après combien de mois, la situation va-t-elle s'améliorer ?
11. Après combien de temps, le niveau d'oxygène aura-t-il atteint les 70% du niveau avant le déversement ?

Solution

Ex 1.5. (Maturité fédérale - Hiver 2010)

On considère la fonction f définie par $f(x) = (1 - 2x)e^{2x}$.

1. Étudier la fonction f en traitant les points suivants :

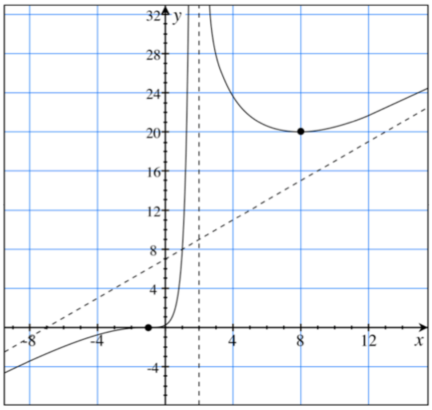


FIGURE 1.1 – Exercice 1.5

(a) l'ensemble de définition, les zéros et le signe de f ;

(b) les asymptotes de f ;

(c) la dérivée

(d) le tableau de croissance de f ainsi que les coordonnées de ses extremums ;

(e) la représentation graphique de f.

2. On donne le graphe d'une fonction g. (Voir FIGURE 1.1). Déterminer :

(a) l'ensemble de définition, la parité, le tableau de signe et les zéros de g ;

(b) l'équation de toutes les asymptotes de g ;

(c) le tableau de croissance ainsi que les coordonnées approximatives des extremums de g.

Solution

Ex 1.6. (Maturité fédérale - Été 2011)
On considère la fonction $f(x) = \frac{e^x}{1-2x}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition et le signe de f.
2. Déterminer les équations des asymptotes verticales et horizontales éventuelles de f.
3. Calculer la dérivée f'.
4. Étudier la croissance de f. Donner les coordonnées des extrema éventuels.
5. Déterminer l'équation de la tangente au graphe de f en son point d'intersection avec l'axe des ordonnées.
6. En utilisant les résultats précédents, tracer le graphe de f.
7. En utilisant une autre couleur, ajouter le graphe de la fonction g définie par : $g(x) = f(-x)$ (expliquer brièvement votre démarche)

Solution

Ex 1.7. (Préparation maturité fédérale)
Étudier la fonction suivante, préciser une primitive.

$$f(x) = \sin^2(x) - \cos(x)$$

Solution

Ex 1.8. (Préparation maturité fédérale)
Étudier la fonction suivante, préciser une primitive.

$$f(x) = \cos(x)(\sin(x) + 2)$$

Montrer que $f(x)$ peut également s'écrire :

$$f(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) + 2\cos(x)$$

Solution

Ex 1.9. (Préparation maturité fédérale)
Étudier la fonction suivante, préciser une primitive.

$$f(x) = \tan(x) + \sin(x)$$

Solution

1.3 SOLUTIONS - Analyse - Niveau standard

Solution Ex 1.1. →1.1.

1. Étude de la fonction :
   - **Domaine de définition et** $f(0)$:
     Le domaine de définition est $D_f =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$ (ou $D_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}$) et $f(0) = -4$.
   - **Parité :** Le domaine de définition étant asymétrique par rapport à l'origine, la fonction f est forcément quelconque.
   - **Asymptotes verticales. Trous** :
     Il y a une asymptote verticale d'équation $x = 1$. En effet :
     $$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-4x+4}{x-1} = \text{"}\frac{1}{0^-}\text{"} = -\infty$$
     $$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-4x+4}{x-1} = \text{"}\frac{1}{0^+}\text{"} = +\infty$$
     La fonction n'a pas de trou, car si on la factorise il n'y a pas de facteur qui se répète au numérateur et au dénominateur :
     $$f(x) = \frac{x^2-4x+4}{x-1} = \frac{(x-2)^2}{(x-1)}$$
   - **Zéros et signe de la fonction (tableau des signes)** : Les zéros des facteurs sont 1 (au dénominateur) et un double 2 (au numérateur), le tableau des signes est le suivant :

x		1		2	
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$
$x-1$	$-$	0	$+$		$+$
$f(x)$	$-$	‖	$+$	0	$+$

     La fonction s'annule lorsque le numérateur s'annule c'est-à-dire en $x = 2$.
   - **Asymptotes horizontales ou obliques** : La fonction rationnelle f est composée d'un polynôme de degré 2 au numérateur et de degré 1 au dénominateur. La division polynomiale des deux nous donnera un polynôme de degré 1 $(2-1)$ qui sera une droite. Il y a donc une asymptote oblique.
     $$N(x) : D(x) = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)} \quad \text{avec} \quad \delta(x) = \frac{R(x)}{D(x)}$$
     $$\begin{array}{l} \big(\ \ x^2 - 4x + 2\big) : \big(x-1\big) = x - 3 + \dfrac{-1}{x-1} \\ \underline{-x^2\ \ + x} \\ \qquad -3x + 2 \\ \qquad \ \ \underline{3x - 3} \\ \qquad\qquad -1 \end{array}$$
     L'asymptote oblique est la droite $Q(x) = x - 3$ et le reste de la division divisé par le dénominateur est :
     $$\delta(x) = -\frac{1}{x-1}.$$
     Le tableau des signes de la fonction $\delta(x)$ nous renseigne sur le comportement de la fonction et de son asymptote ($\delta(x)$ représente la distance entre f et Q) :

x		1	
-1	$-$		$-$
$x-1$	$-$	0	$+$
$\delta(x)$	$-$	‖	$+$

Le tableau nous apprend que la fonction f est en dessous de son asymptote jusqu'au point d'abscisse $x = 1$ puis en dessus ensuite.

- **Extremums et paliers** :
  La dérivée de f est :
  $$f'(x) = \frac{2x-4}{x-1} - \frac{x^2-4x+4}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$
  La dérivée s'annule en $x = 0$ et en $x = 2$.
- **Étude de la croissance de f (tableau des signes de la dérivée)** : Le tableau de croissance de f nous permet de déterminer la nature de ces points critiques :

x		0		1		2	
x	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$(x-1)^2$	$+$		$+$	0	$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$
comportement	↗	0	↘	||	↘	0	↗

  La fonction a un maximum en $x = 0$ et un minimum en $x = 2$.
- **Graphe** :(Voir FIGURE 1.2)

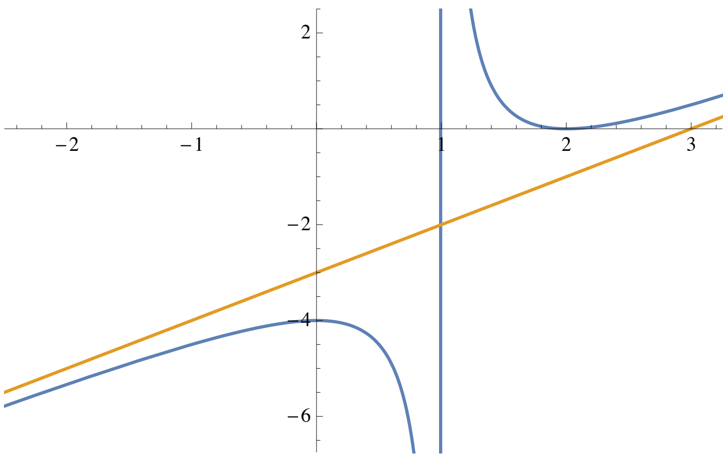


FIGURE 1.2 – Exercice 1.1

2. En effectuant la division polynomiale, on obtient :

$$\begin{array}{rrr}
\big(\quad x^2 & -\,bx & +\,2\big) : (x-1) = x + \big(1 + -1b\big) + \dfrac{\big(3 + -1b\big)}{x-1} \\
-\,x^2 & +\,x & \\
\hline
 & \big(1+-1b\big)x & +\,2 \\
 & -\,\big(1+-1b\big)x & +\,\big(1+-1b\big) \\
\hline
 & & \big(3+-1b\big)
\end{array}$$

Il faut que b soit égale à 1 afin que la parenthèse $(1 - b)$ s'annule et que le quotient soit x uniquement. La droite $Q(x) = x$ passe par l'origine.

3. Afin que la fonction $h(x) = \dfrac{x^2 - 4x + c}{x - 1}$ ait un sommet d'abscisse $x = -1$, il faut que $h'(-1) = 0$.

$$h'(x) = \frac{2x - 4}{x - 1} - \frac{c + x^2 - 4x}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x + (4 - c)}{(x-1)^2}$$

Il faut que

$$h(-1) = \frac{7 - c}{4} = 0 \quad \longrightarrow \quad c = 7$$

Il faut que c soit égale à 7, c'est-à-dire $h(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 7}{x - 1}$. On a $h(-1) = 7$. Le point est $(-1; 7)$.

Solution Ex 1.2. →1.2.

1. Étude de la fonction $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x}$.

   (a) La seule valeur de x qui pose problème est $x = 0$. Cette valeur annule le dénominateur et provoque une division par zéro, donc une valeur indéterminée.
   L'ensemble (ou domaine) de définition est $D_f =]-\infty; 0[\cup]0; \infty[$ ou plus simplement $D_f = \mathbb{R}^*$.

   La fonction se récrit ainsi

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x} = \frac{(x-1)(x-4)}{x}$$

   Son tableau des signes est :

x		0		1		4	
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-4$	$-$		$-$		$+$	0	$+$
x	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$f(x)$	$-$	‖	$+$	0	$+$	0	$+$

   La fonction s'annule en $x = 1$ et $x = 4$.

   (b) On a une asymptote verticale d'équation $x = 0$. Les valeurs vers lesquelles tendent f à gauche et à droite sont :

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x^2 - 5x + 4}{x} = \text{"}\frac{4}{0^-}\text{"} = -\infty$$
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 - 5x + 4}{x} = \text{"}\frac{4}{0^+}\text{"} = +\infty$$

   f tend vers $-\infty$ lorsque l'on s'approche $x = 0$ de la gauche et vers $+\infty$ lorsque l'on approche $x = 0$ de la droite.

   Le numérateur a un degré supérieur de un à celui du dénominateur ce qui implique une asymptote oblique qui peut être déterminée très simplement par division polynomiale.

$$\begin{array}{l} (\;\;x^2 - 5x + 4) : x = x - 5 + \dfrac{4}{x} \\ \underline{-\,x^2} \\ \quad\;\; -5x \\ \quad\;\; \underline{\;\;\;5x} \end{array}$$

   L'asymptote est $Q(x) = x - 5$ et la différence entre la fonction et cette dernière est donnée par $\delta(x) = \frac{4}{x}$. Le comportement de la fonction et de son asymptote est donné par le tableau des signes de la fonction $\delta(x)$.

x		0	
4	$+$		$+$
x	$-$	0	$+$
$\delta(x)$	$-$	‖	$+$

La fonction f est en dessous de son asymptote jusqu'à $x = 0$ puis au-dessus en suite. La fonction et son asymptote ne s'intersecte pas (pas de zéro à la dernière ligne du tableau).

(c) La dérivée de f est :

$$f'(x) = \frac{x(2x-5) - (x^2 - 5x + 4)}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{x^2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x^2}$$

La dérivée s'annule en $x = \pm 2$.

(d) Le tableau de croissance est le suivant :

x		-2		0		2	
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
x^2	$+$		$+$	0	$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$
signe	$\nearrow$	0	$\searrow$	‖	$\searrow$	0	$\nearrow$

La fonction montre un maximum au point critique $x = -2$ et un minimum en $x = 2$. Les coordonnées de ces points sont $(-2; f(-2)) = (-2; -9)$ et $(2; f(2)) = (2; -1)$.

(e) (Graphe FIGURE 1.3).

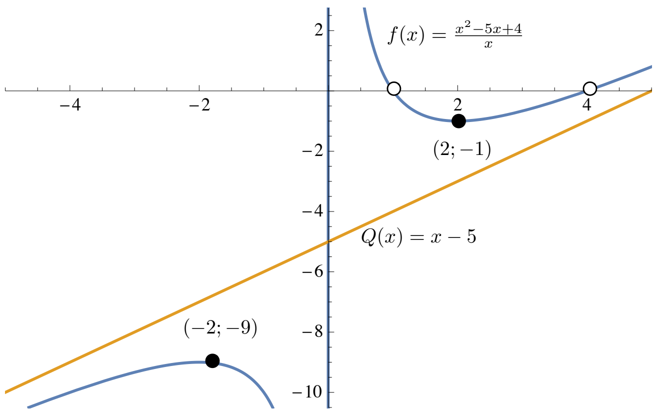


FIGURE 1.3 – Exercice 1.2

2. On cherche si $f'(x) = 2$ a une solution :

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2} = 2 \quad \longrightarrow \quad x^2 - 4 = 2x^2$$
$$\longrightarrow \quad x^2 = -4.$$

L'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$, l'affirmation est exacte.

3. L'équation de la tangente à f en un point a est donnée par :
$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$
Dans le cas présent, on a $a = -1$, $f(-1) = -10$, $f'(-1) = -3$ donc
$$y = -10 + (-3)(x - (-1)) = -13 - 3x$$
En posant $x = -10$ on voit qie $y = -13 + 30 = 17$. Le point $P(-10; 17)$ appartient à la tangente à f en $x = -1$.
4. Les deux zéros sont aux points d'abscisse 1 et 4. L'aire est donnée par l'intégrale :
$$\begin{aligned}
\int_1^4 \frac{x^2 - 5x + 4}{x}\,\mathrm{d}x &= \int_1^4 \left(x - 5 + \frac{4}{x}\right)\mathrm{d}x \\
&= \left.\frac{x^2}{2} - 5x + 4\ln|x|\right|_1^4 \\
&= [-12 + 4\ln(4)] - \left[\frac{1}{2} - \frac{10}{2}\right] \\
&= \frac{9}{2} - 12 + 4\ \ln(4) = -\frac{15}{2} + \ln(256)
\end{aligned}$$
L'aire est $-\frac{15}{2} + \ln(256) \approx -1.95$. Il s'agit de l'aire algébrique, l'aire géométrique vaut $|-1.95| = 1.95$.

Solution Ex 1.3. →1.3.

On peut également mettre f sous la forme $f(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 3x + 13}{(x-3)^2}$.

1. Étude de f.
   (a) L'ensemble de définition de f est $D_f = \mathbb{R}\backslash\{3\}$ [1].

   (b) Il y a une asymptote verticale d'équation $x - 3 = 0$. Les valeurs vers lesquelles tend f à gauche et à droite de l'asymptote sont :
$$\lim_{x\to 3^-} \frac{x^3 - 5x^2 + 3x + 13}{(x-3)^2} = {''}\frac{4}{0^+}{''} = +\infty$$
$$\lim_{x\to 3^+} \frac{x^3 - 5x^2 + 3x + 13}{(x-3)^2} = {''}\frac{4}{0^+}{''} = +\infty$$

   La fonction f tend vers $+\infty$ des deux côtés de l'asymptote.

   La fonction a une asymptote oblique d'équation $Q(x) = x + 1$ et la distance entre f et Q est donnée par la fonction $\delta(x) = \frac{4}{(x-3)^2}$. La valeur de $\delta(x)$ sera toujours positive et ne s'annulera jamais, cela signifie que la fonction f se trouve strictement en dessus de son asymptote sur tout le domaine de définition.

   (c) La dérivée de f est :
$$f'(x) = 1 - \frac{8}{(x-3)^3}$$
   La recherche de points critiques se fait en égalant la dérivée à zéro :
$$f'(x) = 1 - \frac{8}{(x-3)^3} = 0 \quad \xrightarrow{\text{ↁ}} \quad 1 = \frac{8}{(x-3)^3} \quad \xrightarrow{\text{ↁ}} \quad x = 5$$

1. on peut également le noter sous forme d'intervalle, mais c'est un peu long et ça n'apporte absolument rien de plus ($D_f =]\infty; 3[\cup]3; \infty[$)

On va utiliser le test de la dérivée seconde pour déterminer la nature du point critique, $f''(x) = (f'(x))'$:

$$f''(x) = \frac{24}{(x-3)^4}$$

L'évaluation de $f''(5)$ donne 24. L'image $f''(5)$ est positive donc f est convexe en $x = 5$. Le point critique $x = 5$ est un minimum. La dérivée seconde ne possède pas de racine et sa valeur est positive sur tout son domaine de définition. La fonction est partout convexe et n'a pas de point d'inflexion.

(d) Tableau des variations : On récrit f' :

$$f'(x) = 1 - \frac{8}{(x-3)^3} = \frac{x^3 - 9x^2 + 27x - 35}{(x-3)^3}$$

Puisque f' s'annule pour $x = 5$, on en déduit que 5 est une racine du numérateur de f'. Donc on peut factoriser ce dernier par division polynomiale

$$\begin{array}{rl}
\big(\quad x^3 - 9x^2 + 27x - 35\big) : \big(x-5\big) & = x^2 - 4x + 7 \\
\underline{-x^3 + 5x^2 \qquad\qquad\qquad} & \\
-4x^2 + 27x \qquad & \\
\underline{4x^2 - 20x \qquad} & \\
7x - 35 & \\
\underline{-7x + 35} & \\
0 &
\end{array}$$

f' peut s'écrire :

$$f'(x) = \frac{(x-5)(x^2-4x+7)}{(x-3)^3}$$

Le tableau est :

x		3		5	
$x-5$	$-$		$-$	0	$+$
x^2-4x+7	$+$		$+$		$+$
$(x-3)^3$	$-$	0	$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	‖	$-$		$+$
signe	$\nearrow$	‖	$\searrow$	0	$\nearrow$

Il est impossible de déterminer le nombre de zéro à partir du tableau des croissances. On peut simplement dire qu'il y en aura au moins 1 vu que la fonction du numérateur de f est une cubique.

(e) Graphe (voir FIGURE 1.4)

2. Il s'agit de trouver a tel que $g(1) = 3$.

$$\begin{aligned}
g(1) = 1 + 1 + \frac{4}{(1-a)^2} = 3 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{4}{(1-a)^2} = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad 4 = 1 - 2a + a^2 \\
&\Leftrightarrow \quad a^2 - 2a - 3 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (a-3)(a+1) = 0
\end{aligned}$$

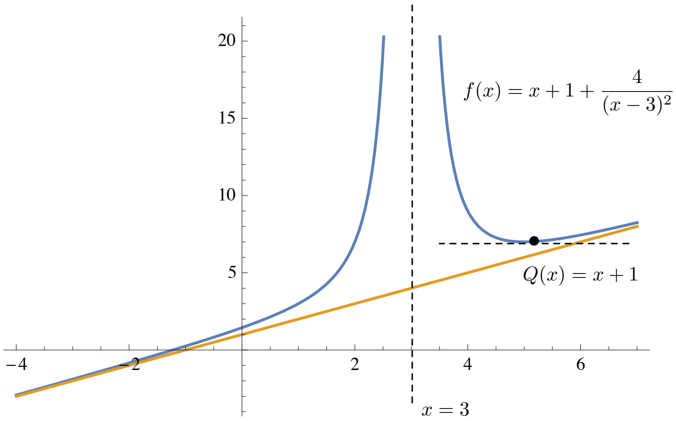


FIGURE 1.4 – Exercice 1.3

De la dernière égalité, on déduit $a = 3$ ou $a = 1$. Mais pour $a = 1$ la fonction $g(x) = x + 1 + \frac{4}{(x-1)^2}$ n'a pas d'image en $x = 1$. L'unique solution est $a = 3$. Donc $g(x) = x + 1 + \frac{4}{(x-3)^2}$. Le graphe de g passe par le point $P(1;3)$.

3. Il s'agit de trouver b tel que $h'(0) = 1$.

$$h'(x) = \frac{8}{(b-x)^3} + 1 \quad \xrightarrow{\mapsto} \quad h'(0) = 1 + \frac{8}{b^3} = 1$$

L'unique possibilité pour résoudre l'équation $\frac{8}{b^3} = 0$ est de faire tendre b vers l'infini. Il n'y a pas de solution dans $\mathbb{R}$. Cela vient du fait que l'asymptote $Q(x)$ a déjà une pente de 1 et que $h'(x) = 1 - \frac{8}{(x-b)^3}$ est plus grand que 1 jusqu'à $x = b^-$. La fonction croît plus vite que son asymptote.

Solution Ex 1.4. $\rightarrow$1.4.

1. Le domaine (ou ensemble) de définition est $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-5\}$, car c'est la seule valeur pour laquelle $f(x)$ est indéfini.

2. Il suffit de mettre au dénominateur commun.
On va plutôt s'intéresser à comment passer de la forme

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 25}{(x+5)^2} = \frac{x^2 - 5x + 25}{x^2 + 10x + 25},$$

qui est difficile à intégrer, à la forme

$$f(x) = 1 - \frac{15}{(x+5)} + \frac{75}{(x+5)^2},$$

qui elle, est facile à intégrer.

(a) On commence par effectuer une division polynomiale :

$$\begin{array}{l} \big(\quad x^2 \quad - 5x + 25\big) : \big(x^2 + 10x + 25\big) = 1 + \dfrac{-15x}{x^2 + 10x + 25} \\ \underline{-\, x^2 - 10x - 25} \\ \qquad\quad - 15x \end{array}$$

(b) $f(x)$ peut donc s'écrire :

$$f(x) = 1 + \frac{-15x}{x^2 + 10x + 25}.$$

(c) On récrit le reste de la division sous la forme

$$\frac{-15x}{x^2 + 10x + 25} = \frac{A}{(x+5)} + \frac{B}{(x+5)^2}$$

et on développe :

$$\begin{aligned} \frac{-15x}{x^2 + 10x + 25} &= \frac{A}{(x+5)} + \frac{B}{(x+5)^2} \\ &= \frac{Ax + 5A + B}{(x+5)^2} \\ &= \frac{Ax^1 + (5A + B)x^0}{(x+5)^2} \end{aligned}$$

En identifiant les coefficients de x^1 et x^0 on obtient le système :

$$\begin{cases} A + \; = -15 \\ 5A + B = 0 \end{cases}$$

d'où $A = -15$ et $B = 75$. Ce qui permet de récrire le reste sous la forme :

$$\frac{-15x}{x^2 + 10x + 25} = \frac{-15}{(x+5)} + \frac{75}{(x+5)^2}$$

La fonction $f(x)$ peut être mise sous la forme

$$f(x) = 1 - \frac{15}{(x+5)} + \frac{75}{(x+5)^2}.$$

On appelle ce procédé la décomposition en **éléments simples** ou en **fractions partielles**.

3. Avant de dresser le tableau des signes, on essaie de factoriser la fonction au maximum :

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 25}{(x+5)^2}$$

Il se trouve que le polynôme du numérateur à un discriminant négatif ($\Delta = -75$), par conséquent le polynôme $x^2 - 5x + 25$ n'est pas factorisable. Le coefficient de x^2 étant positif, la parabole est convexe et de ce fait entièrement positive. Le dénominateur est également toujours positif sauf en -5 où il s'annule. La fonction est donc entièrement positive et il est absolument inutile de faire le tableau des signes, mais comme on nous le demande, le voici :

x		-5	
$x^2 - 5x + 25$	$+$		$+$
$(x+5)^2$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+$	‖	$+$

4. La fonction montre une asymptote verticale d'équation $x = -5$. Comme la fonction est entièrement positive, ses valeurs à gauche et à droite tendent vers $+\infty$. La fonction a également une asymptote

horizontale dont l'équation est obtenue en calculant les limites pour x tendant vers $\pm\infty$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-5x+25}{x^2+10x+25} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2(1-\frac{5}{x}+\frac{25}{x^2})}{x^2(1+\frac{10}{x}+\frac{25}{x^2})}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{(1-\frac{5}{x}+\frac{25}{x^2})}{(1+\frac{10}{x}+\frac{25}{x^2})}=1\\
\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-5x+25}{x^2+10x+25} &= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2(1-\frac{5}{x}+\frac{25}{x^2})}{x^2(1+\frac{10}{x}+\frac{25}{x^2})}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{(1-\frac{5}{x}+\frac{25}{x^2})}{(1+\frac{10}{x}+\frac{25}{x^2})}=1
\end{aligned}$$

f a une asymptote horizontale d'équation $y=1$.
Si le tableau des signes était inutile dans notre cas, le tableau du reste de la division polynomiale ($\delta(x)=\frac{-15x}{x^2+10x+25}$) est quant à lui très utile, car il nous renseigne sur le comportement de la fonction et son asymptote.

x		-5		0	
$-15x$	$+$		$+$	0	$-$
$(x+5)^2$	$+$	0	$+$		$+$
$\delta(x)$	$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$

La fonction est en dessus de son asymptote jusqu'en $x=0$ où elle l'intersecte et reste ensuite en dessous.

5. La dérivée de f est :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{2x-5}{(x+5)^2}-\frac{2\left(x^2-5x+25\right)}{(x+5)^3}\\
&= \frac{15(x-5)}{(x+5)^3}
\end{aligned}$$

Lorsqu'on égale f' à zéro, on voit que le seul point critique est en $x=5$. La nature de ce point nous sera donnée lors de l'établissement du tableau des variations (ou tableau de la croissance).

6. Tableau des variations de f :

x		-5		5	
$x-5$	$-$		$-$	0	$+$
$(x+5)^3$	$-$	0	$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$
signe	$\nearrow$	$\|\|$	$\searrow$	0	$\nearrow$

Le point critique en $x=5$ est un minimu.

7. Graphe de f (voir FIGURE 1.5).

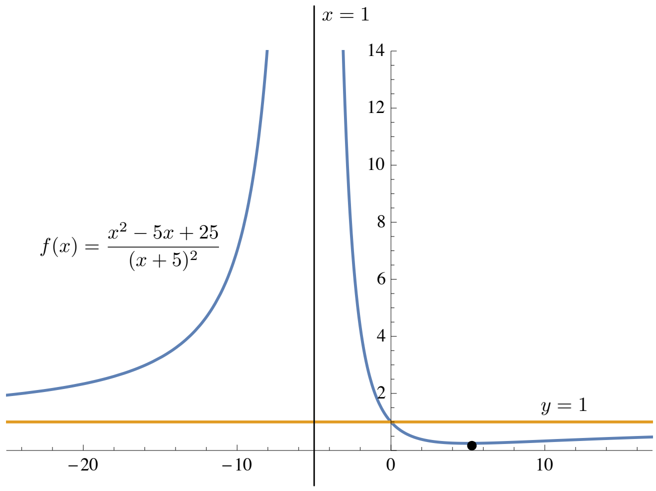


FIGURE 1.5 – Exercice 1.4

8. Soyons (éco)logique et remplaçons x par t vu que a variable indépendante est le temps dans la suite du problème :

$$g(x) = 10\left(1 - \frac{15}{(x+5)} + \frac{75}{(x+5)^2}\right) \quad \xrightarrow{x=t} \quad g(t) = 10\left(1 - \frac{15}{(t+5)} + \frac{75}{(t+5)^2}\right)$$

Le domaine de définition est à présent $D_f = \mathbb{R}^+ = [0;\infty]$. La fonction est donc définie dans tout le domaine où on l'étudie.

9. On déverse le pétrole à $t = 0$ donc la quantité d'oxygène en mg/l est $g(0)$:

$$g(0) = 10\left(1 - \frac{15}{(0+5)} + \frac{75}{(0+5)^2}\right) = 10$$

Au moment où l'on déverse le pétrole, il y a 10mg/l d'oxygène.

10. Le fait de multiplier par 10 la fonction f ne change pas l'abscisse de son minimum qui reste $t = 5$. Le niveau minimum est $g(5) = \frac{5}{2}$ mg/l d'oxygène. La situation s'améliorera au bout de 5 mois.

11. Le 70% de 10mg/l est 7mg/l. Il faut chercher t tel que

$$g(t) = 10\left(1 - \frac{15}{(t+5)} + \frac{75}{(t+5)^2}\right) = \frac{10(x^2-5x+25)}{(x+5)^2} = 7$$

Résolvons

$$\begin{aligned} \frac{10(x^2-5x+25)}{(x+5)^2} = 7 \quad & \xrightarrow{\looparrowright} \quad 10x^2 - 50x + 250 = 7x^2 + 70x + 175 \\ & \xrightarrow{\looparrowright} \quad 3x^2 - 120x + 75 = 0 \\ & \xrightarrow{\looparrowright} \quad x^2 - 40x + 25 = 0 \end{aligned}$$

Les solutions sont $x \in \{5\left(4-\sqrt{15}\right), 5(4+\sqrt{(15)}\}$, les deux sont dans le domaine de définition, mais seule la deuxième nous intéresse. La première valeur est atteinte peu après le déversement. Il faut donc attendre ≈ 40 ans pour récupérer le 70% de la concentration d'oxygène. Méchants pollueurs !!

Solution Ex 1.5. $\rightarrow$1.5.
On considère la fonction f définie par $f(x) = (1 - 2x)e^{2x}$.

1. Étude de la fonction :

   (a) L'ensemble de définition est $D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$. La fonction s'annule en $x = \frac{1}{2}$ et $f(0) = 1$.

   (b) Il n'y a pas d'asymptote verticale ni oblique, par contre il y a une asymptote horizontale pour $x \rightarrow -\infty$.

   $$\lim_{x \to -\infty} (1 - 2x)e^{2x}$$

   On va faire un petit changement de variable pour faciliter la résolution. Posons $-y = x$, ce qui donne :

   $$\lim_{-y \to -\infty} (1 - 2(-y))e^{2(-y)} = \lim_{y \to +\infty} \frac{(1 + 2y)}{e^{2y}} = {''}\frac{\infty}{\infty}{''}$$

   On peut se baser sur la règle du podium pour dire que la limite est 0, mais le type d'indétermination nous permet surtout d'utiliser la règle de l'Hospital :

   $$\lim_{y \to +\infty} \frac{(1 + 2y)}{e^{2y}} = \lim_{y \to +\infty} \frac{2}{2e^{2y}} = \lim_{y \to +\infty} \frac{1}{1e^{2y}} = 0$$

   Il y a une asymptote oblique à gauche, son équation est $y = 0$

   (c) La dérivée de f est

   $$f'(x) = -2e^{2x} + 2(1 - 2x)e^{2x} = -4xe^{2x}$$

   La dérivée s'annule en $x = 0$. On déterminera au prochain point la nature du point critique.

   (d) le tableau de croissance de f est :

x		0	
$-4x$	$+$	0	$-$
e^{2x}	$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
signe	$\nearrow$	0	$\searrow$

   On observe un maximum en $x = 0$.

   (e) Représentation graphique de f. (Voir FIGURE 1.6).

2. (Voir FIGURE 1.7). Déterminer :

   (a) L'asymptote verticale en $x = 2$ nous indique que l'ensemble de définition de g est $D_g = \mathbb{R}\backslash\{\}$.
   La fonction ayant un domaine de définition asymétrique est quelconque.
   Le zéro est à $(-1; 0)$. La fonction est négative jusqu'à $x = -1$ puis positive ensuite.

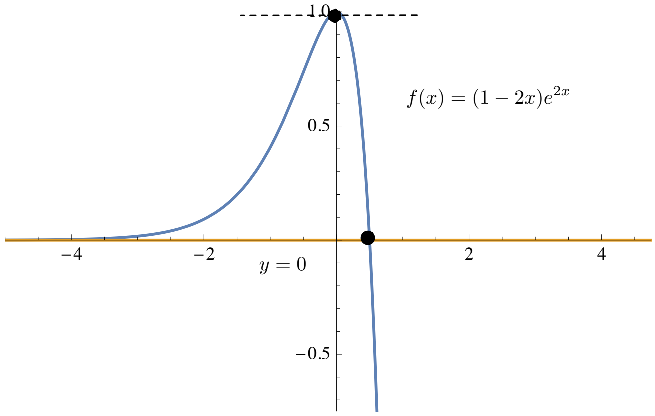


FIGURE 1.6 – Exercice 1.5

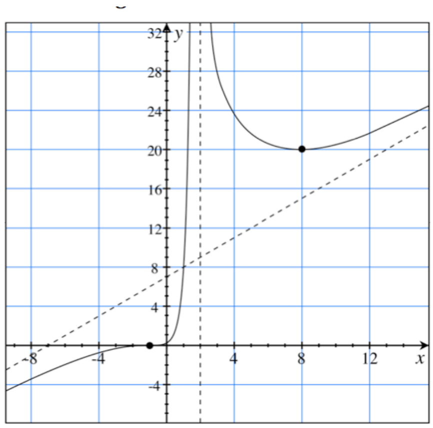


FIGURE 1.7 – Exercice 1.5

(b) L'asymptote verticale à pour équation $x = 2$. L'asymptote oblique passe par les points $(0; 7)$ et $(-7; 0)$, sa pente est $m = 1$ et son ordonnée à l'origine est 7 l'équation est $y = x + 7$;

(c) La fonction a deux points critiques, l'un est un palier en $(-1; 0)$ et l'autre un minimum en $(8; 20)$. La fonction est strictement croissante sur $]-\infty; -1[$, stationnaire en $x = -1$ et à nouveau strictement croissante sur l'intervalle $]-1; 2[$. Sur $]2; 8[$, g est strictement décroissante, elle atteint un minimum en $x = 8$ puis est strictement croissante sur $]8; \infty[$. g a un comportement asymptotique en $\pm\infty$.

Solution Ex 1.6. $\rightarrow$1.6.
On considère la fonction $f(x) = \frac{e^x}{1-2x}$.

1. Le seul point qui pose problème est $x = \frac{1}{2}$, donc l'ensemble de définition est $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$. Le tableau des signes, comme son nom l'indique, nous renseigne sur le signe de la fonction sur l'intervalle $]-\infty; +\infty[$.

x		$\frac{1}{2}$	
e^x	$+$		$+$
$(1-2x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+$	$\Vert$	$-$

La fonction est positive jusqu'au point d'abscisse $x = \frac{1}{2}$ est négative à partir de ce point.

2. Il y a une asymptote verticale d'équation $x = \frac{1}{2}$. Les valeurs de f à gauche et à droite de celle-ci sont :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{1}{2}^-} \frac{e^x}{1-2x} &= ''\frac{e^{0.5}}{0^+}'' = +\infty \\ \lim_{x\to\frac{1}{2}^+} \frac{e^x}{1-2x} &= ''\frac{e^{0.5}}{0^-}'' = -\infty\end{aligned}$$

La fonction f tend vers $+\infty$ à gauche de l'asymptote et vers $-\infty$ à droite.
Pour déterminer les éventuelles asymptotes horizontales on calcule les limites de f pour des valeurs de x tendant vers $\pm\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1-2x} = ''\frac{\infty}{-\infty}'' \xrightarrow{\text{L'Hospital}} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{-2} = -\infty$$

Pour la deuxième limite ($x \to -\infty$), on pose $-y = x$:

$$\lim_{-y\to-\infty} \frac{e^{(-y)}}{1-2(-y)} = \lim_{y\to\infty} \frac{1}{e^y(1+2y)} = 0$$

f montre une asymptote d'équation $y = 0$ à gauche.

3. La dérivée de f est :

$$f'(x) = \frac{e^x(1-2x) - (-2)e^x}{(1-2x)^2} = \frac{e^x(3-2x)}{(1-2x)^2}$$

4. Le tableau des signes de la dérivée (=tableau de croissance) est :

x		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$	
e^x	$+$		$+$		$+$
$3-2x$	$+$		$+$	0	$-$
$(1-2x)^2$	$+$	0	$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$
signe	$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$	0	$\searrow$

La fonction a un maximum en $x = \frac{3}{2}$. Ce maximum vaut $f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{e^{3/2}}{2}$. Les coordonnées du maximum sont $\left(\frac{3}{2}; -\frac{e^{3/2}}{2}\right)$

5. L'intersection avec l'axe des ordonnées est le point $(0; f(0))$ qui est $(0; 1)$. L'équation d'une droite tangente en un point $(a; f(a))$ à la fonction f est donnée par l'expression :

$$y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

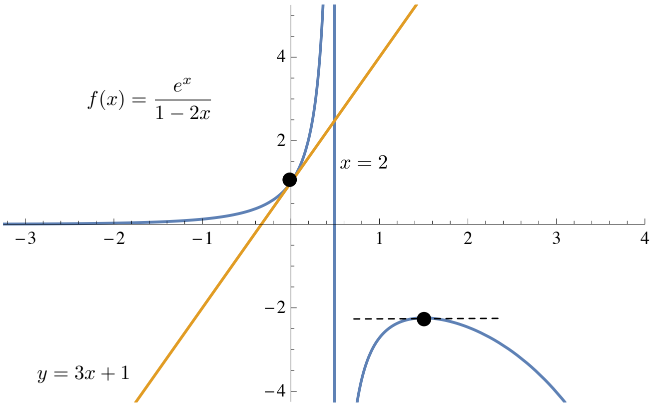


FIGURE 1.8 – Exercice 1.6

Dans le cas qui nous intéresse on a : $a = 0$, $f(0) = 1$, $f'(0) = 3$. Donc,

$$y = 1 + 3(x - 0) \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad y = 3x + 1$$

La tangente à f en $(0; 1)$ est la droite affine $y = 3x + 1$.

6. Graphe (FIGURE 1.8).
7.

$$f(x) = g(-x) \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad f(-x) = g(-(-x)) = g(x)$$

Il s'agit d'une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées Oy. (Voir FIGURE 1.9).

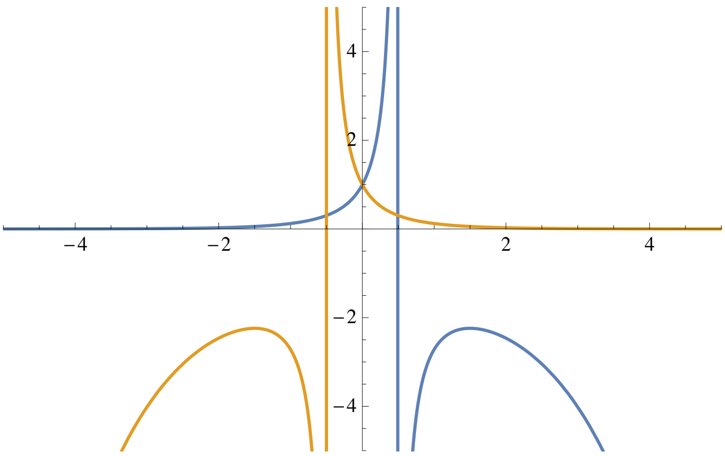


FIGURE 1.9 – Exercice 1.6

Solution Ex 1.7. $\rightarrow$1.7.
Étudier la fonction suivante, préciser une primitive.

$$f(x) = \sin^2(x) - \cos(x)$$

Rappel :

1. $\sin(x)$ est une fonction impaire car $\sin(-x) = -\sin(x)$.
2. La période élémentaire T de la fonction $\sin(x)$ est $T = 2\pi$.
3. $\cos(x)$ est une fonction paire car $\cos(-x) = \cos(x)$.
4. La période élémentaire T de $\cos(x)$ est $T = 2\pi$.
5. $\tan(x)$ est une fonction impaire car $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\text{impaire}}{\text{paire}} = \text{impaire}$.
6. La période élémentaire T de $\tan(x)$ est $T = \pi$.

- **Domaine de définition et** $f(0)$:
  Le domaine de définition est $D_f = \mathbb{R}$ et $f(0) = -1$
- **Parité, période :** Le domaine de définition étant symétrique on étudie la parité :

$$
\begin{array}{lclcl}
f \text{ paire : } \; f(-x) \stackrel{?}{=} f(x) & \xrightarrow{\looparrowright} & f(-x) & = & \sin^2(-x) - \cos(-x) \\
 & & & = & (\sin(-x))^2 - \cos(-x) \\
 & & & = & (-\sin(x))^2 - \cos(x) \\
 & & & = & \sin^2(x) - \cos(x) \\
 & & & = & f(x) \quad \checkmark
\end{array}
$$

La fonction f est paire.
Pour déterminer la période, on transforme le produit $\sin^2(x)$ en une somme.

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)) = \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2}.$$

La fonction se récrit de la manière suivante :

$$f(x) = \sin^2(x) - \cos(x) \quad = \quad \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2} - \cos(x) \tag{1.1}$$

La fonction est la somme de deux fonctions périodiques, de période $T_a = \pi$ pour $\cos(2x)$, et $T_b = 2\pi$ pour $\cos(x)$. La période de f est le PPCM de T_a et T_b qui est $T = 2\pi$.
La période de f est $T = 2k\pi, \; k \in \mathbb{Z}$.

- **Zéros et signe de la fonction (tableau des signes)** :
  On égalise la fonction à zéro pour trouver les zéros.

$$
\begin{array}{lcl}
f(x) = \sin^2(x) - \cos(x) = 0 & \xrightarrow{\looparrowright} & \sin^2(x) = \cos(x) \\
 & = & 1 - \cos^2(x) = \cos(x) \\
 & = & \cos^2(x) + \cos(x) - 1 = 0
\end{array}
$$

La résolution quadratique donne les deux solutions :

$$\cos(x) = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad = \quad \begin{cases} \cos(x) = \left(\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}\right) & (1) \\ \cos(x) = -\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) & (2) \end{cases}$$

On remarque que la solution (1) qui vaut $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \approx -1.6$ doit être éliminée, car la fonction $\cos^{-1}(x)$ ne peut prendre comme argument que des valeurs dans l'intervalle $[-1; 1]$.
La solution (2) donne les deux solutions :

$$
\begin{array}{lcl}
x_1 & = & \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}\right) + 2k\pi \\
x_2 & = & 2\pi - \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}\right) + 2k\pi \\
 & = & 2k\pi - \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}\right)
\end{array}
$$

En posant $k = 0$ on obtient les solutions dans le “premier tour” qui valent approximativement :

$$\begin{aligned} x_1 &\approx 52^\circ \text{ ou } \approx 0.9 \text{ rad} \\ x_2 &\approx 308^\circ \text{ ou } \approx 5.4 \text{ rad} \end{aligned}$$

- **Extremums et paliers** :
  La dérivée de f est :

$$f'(x) = 2\sin(x)\cos(x) + \sin(x) = \sin(x)(2\cos(x) + 1)$$

Pour trouver les points critiques, on regarde où f' s'annule :

$$f'(x) = \sin(x)(2\cos(x) + 1) = 0$$

Le premier facteur ($\sin(x) = 0$) nous donne les solutions :

$$\begin{aligned} x_a &= 0 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ x_b &= \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Le deuxième facteur ($(2\cos(x) + 1) = 0$) nous donne les solutions

$$\cos(x) = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_c = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ x_d = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Il y a 4 points critiques $x\left\{0, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}\right\}$.

La nature des points critiques peut être déterminée par le tableau des signes de la fonction dérivée :

x		0		$\frac{2\pi}{3}$		π		$\frac{4\pi}{3}$		2π
$\sin(x)$	$-$	0	$+$	$\vdots$	$+$	0	$-$	$\vdots$	$-$	0
$2\cos(x) + 1$	$+$	$\vdots$	$+$	0	$-$	$\vdots$	$-$	0	$+$	$\vdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0
croissance	$\searrow$	0	$\nearrow$	0	$\searrow$	0	$\nearrow$	0	$\searrow$	0

Il y a deux minimums, à 0 et à π et deux maximums, à $\frac{2\pi}{3}$ et à $\frac{4\pi}{3}$.

- **Graphe** : (Voir FIGURE 1.10 et FIGURE 1.11).
- **Primitive** :

$$\begin{aligned} \int^x ((\sin^2(u) - \cos(u)))\,\mathrm{d}u &= \int^x \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos(2u)}{2} - \cos(u)\right)\mathrm{d}u \quad \text{(voir 1.1)} \\ &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x) - \sin(x) + C \end{aligned}$$

On peut choisir n'importe quelle valeur constante C, donc **une** primitive est :

$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x) - \sin(x) + \pi$$

par exemple.

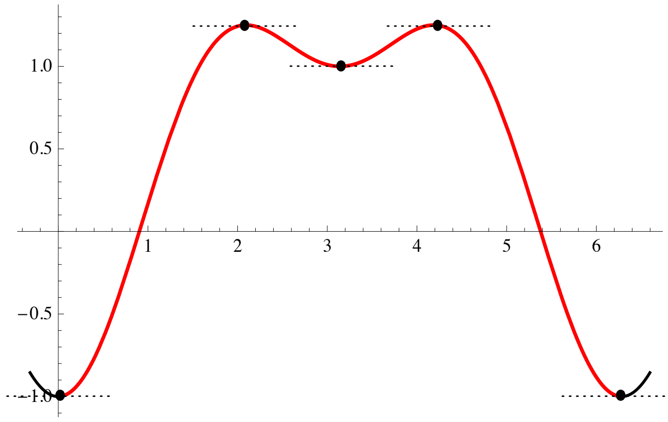


FIGURE 1.10 – Exercice 1.7. $f(x) = \sin^2(x) - \cos(x)$ sur $[0; 2\pi]$

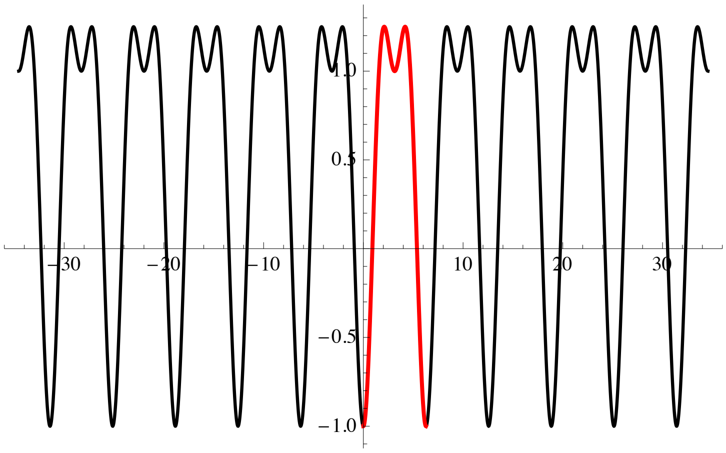


FIGURE 1.11 – Exercice 1.7. $f(x) = \sin^2(x) - \cos(x)$ sur $[-11\pi; 11\pi]$

Solution Ex 1.8. →1.8.

- **Domaine de définition et** $f(0)$: Le domaine de définition est $D_f = \mathbb{R}$ et $f(0) = 2$.
- **Parité, période :** On est obligé de tester la parité de la fonction f car son domaine de définition est symétrique pae rapport à l'origine.

$$f \text{ paire : } \quad f(-x) \stackrel{?}{=} f(x) \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} f(-x) &= \cos(-x)(\sin(-x)+2) \\ &= \cos(x)(2-\sin(x)) \\ &\neq f(x) \end{aligned}$$

La fonction n'est pas paire.

$$f \text{ impaire : } \quad -f(-x) \stackrel{?}{=} f(x) \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} -f(-x) &= -(\cos(-x)(\sin(-x)+2)) \\ &= -(\cos(x)(2-\sin(x))) \\ &= \cos(x)(\sin(x)-2) \\ &\neq f(x) \end{aligned}$$

La fonction f est quelconque.

Remarque 1. *On peut également prouver qu'une fonction est quelconque en montrant des contre-exemples.*

Pour déterminer la période T, on peut récrire la fonction ainsi :

$$\begin{aligned} f(x) = \cos(x)(\sin(x) + 2) &= \sin(x)\cos(x) + 2\cos(x) \\ &= \frac{1}{2}\sin(2x) + 2\cos(x). \end{aligned}$$

La période de $\frac{1}{2}\sin(2x)$ est $T_a = \pi$ et la période de $2\cos(x)$ est $T_b = 2\pi$. Le PPCM de T_a et T_b est $T = 2\pi$.

- **Zéros et signe de la fonction (tableau des signes)** :
  Le tableau des signes de f est :

x		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$	
$\cos(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$(\sin(x) + 2)$	$+$		$+$		$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

- **Extremums et paliers** :
  La dérivée de $f(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) + 2\cos(x)$ est :

$$f'(a) = \cos(2x) - 2\sin(x)$$

On trouve les points critiques en résolvant $f'(x) = 0$. Avant il s'agit de récrire la dérivée de manière plus adéquate :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos(2x) - 2\sin(x) \\ &= \left(\cos^2(x) - \sin^2(x)\right) - 2\sin(x) \\ &= \left((1 - \sin^2(x)) - \sin^2(x)\right) - 2\sin(x) \\ &= -2\sin^2(x) - 2\sin(x) + 1 \end{aligned}$$

On pose $f'(x) = 0$:

$$\begin{aligned} -2\sin^2(x) - 2\sin(x) + 1 &= 0 \\ -2\left(\sin^2(x) + \sin(x) - \frac{1}{2}\right) &= 0 \\ -2\left[\left(\sin(x) + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right] &= 0 \\ -2\left[\left(\sin(x) + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}\right] &= 0 \\ -2\left[\left(\sin(x) + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right] &= 0 \\ -2\left(\sin(x) + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\sin(x) + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) &= 0 \\ -2\left(\sin(x) + \left[\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right]\right)\left(\sin(x) - \left[\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right]\right) &= 0 \end{aligned}$$

La première parenthèse n'ammène pas de solution car $\frac{1+\sqrt{3}}{2} \notin [-1; 1]$. En égalant la deuxième parenthèse à zéro on obtient les deux solutions :

$$\begin{aligned} x_1 &= \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) + 2k\pi \approx 21° + k360°,\ k \in \mathbb{Z} \\ x_2 &= \pi - \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) + 2k\pi \approx 158° + k360°,\ k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Les points critiques ont les abscisses 21° et 158°.

- **Étude de la croissance de f (tableau des signes de la dérivée)** :
  Le tableau de la dérivée est :

x	$0 \qquad 21° \qquad 158° \qquad 2\pi$
$\cos(2x) - 2\sin(x)$	$+ \quad 0 \quad - \quad 0 \quad +$
$f'(x)$	$+ \quad 0 \quad - \quad 0 \quad +$
croissance	↘ ↗ 0 ↘ 0 ↗

  La fonction a un maximum en $x = 21°$ et un minimum en $x = 158°$.

- **Graphe** :(Voir FIGURE 1.12 et 1.13).

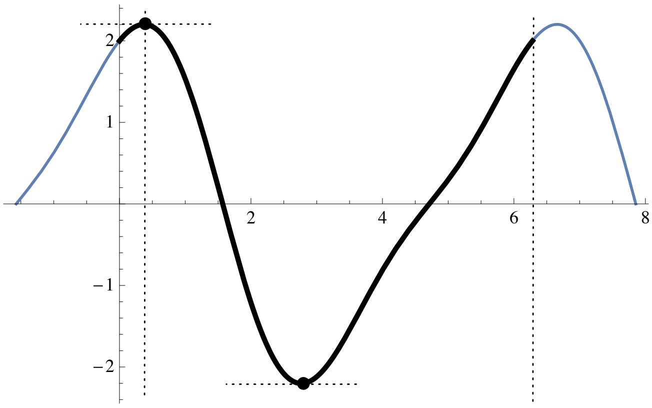


FIGURE 1.12 – Exercice 1.8. $f(x) = \cos(x)(\sin(x) + 2)$ sur $[0; 2\pi]$

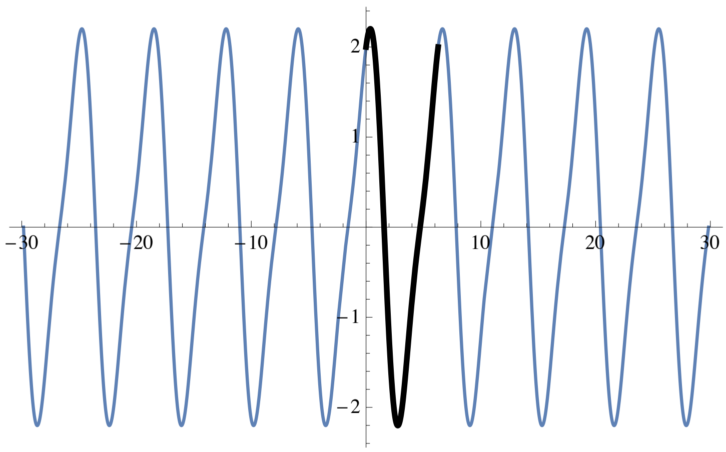


FIGURE 1.13 – Exercice 1.8. $f(x) = \cos(x)(\sin(x) + 2)$ sur $[-11\pi; 11\pi]$

- **Primitive** :

$$\int^x \left(\frac{1}{2}\sin(2u) + 2\cos(u)\right) \mathrm{d}u \quad = \quad -\frac{1}{4}\cos(2x) - 2\sin(x) + C$$

Une primitive quelconque est :

$$\frac{1}{2}\sin(2x)+2\cos(x)-1012$$

Solution Ex 1.9. →1.9.

- **Domaine de définition et** $f(0)$: Sur l'intervalle $[0;2\pi]$, le domaine de définition de $\sin(x)$ est $\mathbb{R}$ entier, mais celui de $\tan(x)$ est $\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\}$. Le domaine de définition de la fonction f est $D_f=\mathbb{R}\backslash\{k\cdot\frac{\pi}{2};k\cdot\frac{3\pi}{2}\}$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

- **Parité :** La fonction est impaire, car $-f(-x)=f(x)$.

$$\begin{aligned}-f(-x) &= -(\tan(-x)+\sin(-x))\\ &= -\tan(-x)-\sin(-x)\\ &= -(-\tan(x))-(-\sin(x))\\ &= (\tan(x)+\sin(x))\\ &= f(x) \quad \checkmark\end{aligned}$$

La période de la fonction $\tan(x)$ est $T_a=\pi$ et la période de la fonction $\sin(x)$ est $T_b=2\pi$. Le PPCM entre T_a et T_b est 2π, la fonction f est de période 2π.

- **Asymptotes verticales. Trous** : La fonction a deux asymptotes verticales, l'une d'équation $x=\frac{\pi}{2}$ et l'autre d'équation $x=\frac{3\pi}{2}$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\tan(x)+\cos(x)) &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\tan(x)+\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\cos(x)\\ &= +\infty+0=+\infty.\\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}(\tan(x)+\cos(x)) &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\tan(x)+\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\cos(x)\\ &= -\infty+0=-\infty.\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}^-}(\tan(x)+\cos(x)) &= \lim_{x\to\frac{3\pi}{2}^-}\tan(x)+\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}^-}\cos(x)\\ &= +\infty+0=+\infty.\\ \lim_{x\to\frac{3\pi}{2}^+}(\tan(x)+\cos(x)) &= \lim_{x\to\frac{3\pi}{2}^+}\tan(x)+\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}^+}\cos(x)\\ &= -\infty+0=-\infty.\end{aligned}$$

- **Zéros et signe de la fonction (tableau des signes)** : Les zéros de f sont obtenu en résolvant l'équation $f(x)=0$.

$$\begin{aligned}f(x)=0 \quad &\xrightarrow{\hookrightarrow} \quad \tan(x)+\sin(x)=0\\ &\xrightarrow{\hookrightarrow} \quad \frac{\sin(x)}{\cos(x)}+\sin(x)=0\\ &\xrightarrow{\hookrightarrow} \quad \frac{\sin(x)+\sin(x)\cos(x)}{\cos(x)}=0\\ &\xrightarrow{\hookrightarrow} \quad \sin(x)(1+\cos(x))=0\end{aligned}$$

Sur $[0; 2\pi[$, les solutions de $\sin(x) = 0$ sont $x = 0$ et $x = \pi$ et la solution de $\cos(x) = -1$ est $x = \pi$. Les zéros sont $x \in \{0; \pi\}$ avec une période de 2π. Le tableau suivant nous donne les signes de la fonction sur et autour de l'intervalle $[0; 2\pi]$. Le tableau des signes se construit avec la fonction mise sous la forme d'un produit de facteur,

$$f(x) = \frac{\sin(x)(1 + \cos(x))}{\cos(x)}$$

x		0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π	
$\sin(x)$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$(1 + \cos(x))$	$+$		$+$		$+$	0	$+$		$+$		$+$
$\cos(x)$	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$

- **Extremums et paliers** : La dérivée de f est :

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} + \cos(x) = \frac{1 + \cos^3(x)}{\cos^2(x)}$$

Pour trouver les points critiques (paliers et/ou extremums) on égale la dérivée à zéro.

$$f'(x) = \frac{1 + \cos^3(x)}{\cos^2(x)} = 0 \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad 1 + \cos^3(x) = 0$$

$$\xrightarrow{\looparrowright} \quad \cos(x) = \sqrt[3]{-1} = -1$$

L'unique solution de cette dernière équation est $x = \pi$. Pour changer un peu, on va utiliser le test de la dérivée seconde. La dérivée seconde de f est $f'' = (f')'$.

$$f''(x) = 2\frac{\sin(x)}{\cos^3(x)} - \sin(x)$$

L'image par f'' de l'abscisse du point critique donne :

$$f''(\pi) = 2\frac{\sin(\pi)}{\cos^3(\pi)} - \sin(\pi) = 0$$

La nature du point critique est un **palier**.

- **Étude de la croissance de f (tableau des signes de la dérivée)** : Le tableau de croissance de $f'(x) = \frac{1+\cos^3(x)}{\cos^2(x)}$ est

x		0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π	
$1 + \cos^3(x)$	$+$		$+$		$+$	0	$+$		$+$		$+$
$\cos^2(x)$	$+$		$+$	0	$+$		$+$	0	$+$		$+$
$f'(x)$	$+$		$+$	$\Vert$	$+$	0	$+$	$\Vert$	$+$		$+$

La fonction est croissante sur tout son domaine de définition, on remarque le palier en $x = \pi$.

- **Graphe** : (Voir FIGURE 1.14 et 1.15).

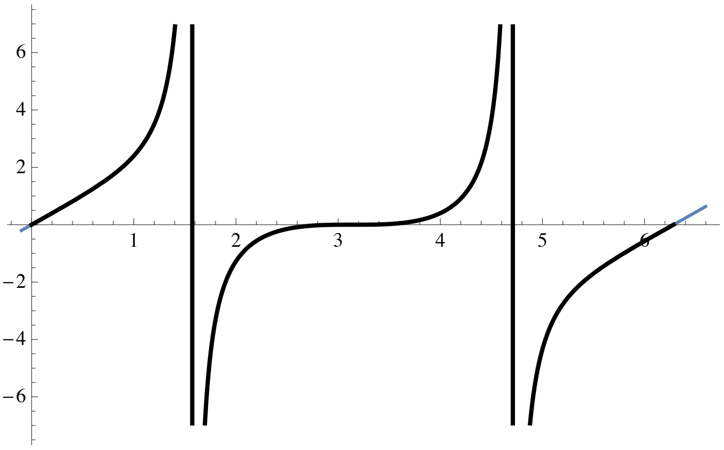


FIGURE 1.14 – Exercice 1.9. $f(x) = \tan(x) + \sin(x)$ sur $[0; 2\pi]$

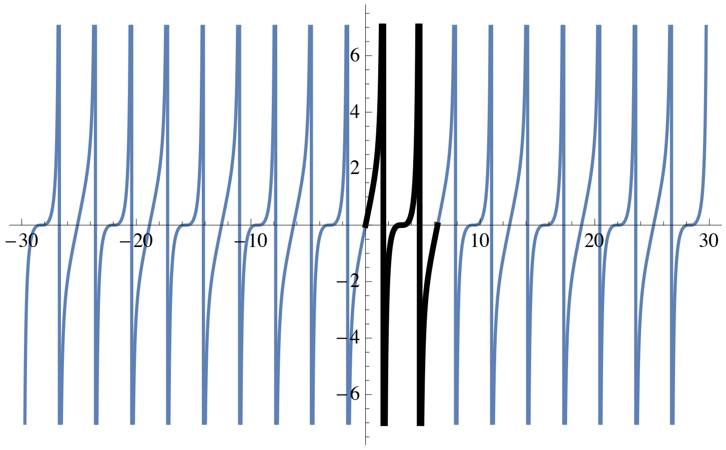


FIGURE 1.15 – Exercice 1.9. $f(x) = \tan(x) + \sin(x)$ sur $[-9\pi; 9\pi]$

Chapitre 2

Probabilités

2.1 EXERCICES - Probabilités - Niveau standard

Ex 2.1. (Collège Claparède - 1997) Une urne contient 10 boules dont 6 blanches et 4 noires. On en tire successivement cinq sans remise. Quelle est la probabilité d'obtenir :

1. 0 boule noire ?
2. au moins une boule noire ?
3. une boule blanche suivie de 4 noires ?
4. une seule boule blanche ?
5. 2 boules blanches et 3 boules noires ?

Solution

Ex 2.2. (Maturité fédérale - Ete 2008) Une pièce de monnaie est truquée de telle sorte qu'elle montre le côté "pile" 60 fois sur 100. On la jette plusieurs fois de suite, au plus quatre fois. On gagne un point chaque fois qu'on obtient "pile". On perd un point chaque fois qu'on obtient "face". Après chaque jet, on fait le total des points. La partie est gagnée dès que le total des points vaut $+2$. Elle est perdue dès qu'il vaut -2. Elle est nulle si, la pièce ayant été jetée quatre fois, le nombre de "pile" égale celui de "face".

1. Quelle est la probabilité de gagner la partie ?
2. Quelle est la probabilité que la partie soit nulle ?

Solution

Ex 2.3. (Maturité - printemps 1990 - Fribourg) On jette un dé jusqu'à ce que la face 6 apparaisse. On compte le nombre n de jets et on note $P(n)$ la probabilité correspondante.

1. Calculer $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(4)$ et $P(n)$.
2. Pour quelles valeurs de n a-t-on $P(n) < 0,01$?
3. Calculer la probabilité que le nombre de lancers soit supérieur ou égale à 3.
4. Sachant que l'expérience s'est terminée en moins de 5 lancers, quelle est la probabilité quelle se soit terminée en moins de 3 lancers.

Solution

Ex 2.4. (Maturité fédérale - Eté 2009)
Un pion est posé au centre A d'un tablier de jeu formé de sept cases, ayant la forme représentée ci-dessous (FIGURE 2.1). À chaque coup, le pion se déplace d'une case à une case voisine, adjacente par un côté. Le déplacement se fait au hasard, avec la même probabilité, parmi tous les déplacements possibles.

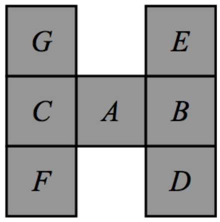


FIGURE 2.1 – Exercice 2.4

1. Quelle est la probabilité qu'au 1er coup le pion soit posé sur la case B ?
2. Quelle est la probabilité qu'au 2e coup le pion soit posé sur la case A ?
3. Quelle est la probabilité qu'au 2e coup le pion soit posé sur la case E ?
4. Quelle est la probabilité qu'au 3e coup le pion soit posé sur la case B ?
5. Sachant qu'au 3e coup le pion est posé sur la case B, quelle est la probabilité qu'il soit passé par la case C ?

Solution

Ex 2.5. (Maturité fédérale - Hiver 2009)
On choisit une partie d'une population pour tester l'efficacité d'un vaccin contre un virus.

90% des personnes qui ont été vaccinées ne sont pas infestées par le virus.

80% des personnes qui n'ont pas été vaccinées sont infestées par le virus.

70% de la population a été vaccinée contre ce virus.

On tire au hasard une personne parmi cette population.

1. Décrire la situation donnée par un arbre.
2. Calculer la probabilité que cette personne ait été infectée par le virus.
3. Sachant que cette personne n'a pas été vaccinée, calculer la probabilité qu'elle n'ait pas été infectée par le virus.
4. Sachant que cette personne n'a pas été infectée par le virus, calculer la probabilité qu'elle ait été vaccinée.

Solution

Ex 2.6. (Maturité fédérale - Eté 2010)
Dans une fête foraine, Julie décide de jouer à un jeu dont chaque partie se déroule de la façon suivante :

Elle tire un jeton dans une urne contenant 7 jetons rouges et 2 bleus.

S'il est bleu elle gagne, sinon, sans remettre le premier jeton tiré, elle en tire un deuxième.

Si le deuxième jeton est bleu elle gagne, sinon, sans remettre les deux précédents, elle en tire un troisième.

Si le troisième jeton est bleu elle gagne, sinon elle a perdu la partie.

1. Montrer que la probabilité que Julie gagne à ce jeu est de $\frac{7}{12}$.
2. Sachant qu'elle a gagné à ce jeu, déterminer la probabilité qu'elle n'ait pas eu besoin d'un troisième tirage.

A chaque partie gagnée, Julie gagne 1 ticket. Elle a remarqué un joli petit ourson en peluche qu'elle peut obtenir avec au moins 3 tickets. Elle décide donc d'effectuer quatre parties consécutives.

1. Déterminer la probabilité pour que Julie reparte avec l'ourson à l'issue des quatre parties.
2. Déterminer la probabilité pour que Julie reparte avec l'ourson et un ticket à l'issue des quatre parties.

Solution

Ex 2.7. (Maturité fédérale - Hiver 2010)
Une boîte de chocolats contient 3 boules blanches (en chocolat blanc) et 3 boules noires (en chocolat noir). Elles sont indiscernables au toucher et donc chaque boule a la même probabilité d'être tirée.

Marie prend au hasard une boule dans cette boîte et, comme elle adore le chocolat noir, si la boule est noire elle la mange. Mais elle n'apprécie pas particulièrement le chocolat blanc. Si la boule tirée est blanche, elle la remet dans la boîte. Elle effectue ainsi trois tirages successifs.

1. Calculer la probabilité que la deuxième boule tirée soit blanche ;
2. Calculer la probabilité que seules les deux dernières boules tirées soient blanches ;
3. Calculer la probabilité qu'après 2 tirages, elle ait mangé au moins un chocolat ;
4. Calculer la probabilité que la deuxième boule tirée soit blanche, sachant qu'elle a finalement mangé 2 chocolats ;
5. Calculer la probabilité qu'il ne reste plus de boule de chocolat noir dans la boîte après ces 3 tirages.

Solution

Ex 2.8. (Maturité fédérale - Été 2011)
Pour une tombola, on prépare 1 000 billets. Parmi ces 1 000 billets, l'un désigne le gros lot, 10 désignent un petit lot et 2 billets permettent de retirer immédiatement un nouveau billet.
Lors de l'ouverture de la tombola, une personne achète le premier billet qu'elle choisit au hasard parmi les 1 000 billets disponibles.

1. Quelle est la probabilité qu'elle gagne un lot sans retirer de billet ?
2. Quelle est la probabilité qu'elle ne puisse pas retirer un nouveau billet ?
3. Quelle est la probabilité qu'elle gagne le gros lot ?
4. Quelle est la probabilité qu'elle ne gagne rien ?
5. Sachant qu'elle a gagné un lot, quelle est la probabilité qu'elle n'ait pas retiré de billets ?

Solution

2.2 SOLUTIONS - Probabilités - Niveaux standard

Solution Ex 2.1. →2.1.
Il y a peu de boules dans l'urne et le tirage se fait sans remise. Cela implique que le tirage de chacune des boules influencera le calcul des probabilités pour le tirage suivant.

1. Il faut tirer successivement cinq boules blanches. Le résultat est le produit des cinq probabilités suivantes :
$$\frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{42} \approx 0.0238$$
P("aucune boule noire") $= 0.0238$.
2. L'événement "au moins une boule noire" est l'événement complémentaire de "que des boules blanches", donc de l'événement étudié à la question précédente, donc
$$1 - \frac{1}{42} = \frac{41}{42} \approx 0.976$$
3. La boule blanche vient en premier puis est suivie de 4 boules noires :
$$\frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{210} \approx 0.0048.$$
P("1 boule blanche suivie de 4 noires") $= 0.0048$.
4. On peut reprendre le résultat précédent et remarquer que si l'on avait mis la boule blanche à n'importe laquelle des cinq positions possibles, la probabilité aurait été identique. Il suffit donc d'additionner 5 fois le résultat précédent :
$$5 \cdot \frac{1}{210} = \frac{1}{42} \approx 0.0238$$
P("1 boule blanche et 4 noires") $= 0.0238$.
5. Commençons par supposer que l'on désire dans l'ordre 2 blanches et 3 noires, on a alors :
$$\frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot = \frac{1}{42}$$
On voit bien que l'ordre des nombres du numérateur peut être changé sans pour autant changer le résultat. Il s'agit de trouver de combien de manières discernables on peut d'ordonner 3 boules blanches et 2 noires. Le résultat est obtenu en utilisant la formule des arrangements avec répétitions qui donne $\frac{5!}{3!2!} = 10$. Le résultat cherché est
$$P((\text{“3 boules blanche et 2 noires”})) = 10 \cdot \frac{1}{42} = \frac{5}{21} = 0.2380$$

Solution Ex 2.2. →2.2.
On notera p pour pile et f pour face. Pour simplifier les calculs, on considérera que le joueur continue le jeu (résultats mis entre crochets) même si il a d'ores et déjà gagné ou perdu.
Les combinaisons gagnantes sont :
$$(pp[pp]); (pp[fp]); (pp[pf]); (pp[ff]); (fppp); (pfpp).$$
Les combinaisons nulles sont :
$$(pffp); (fppf); (pfpf); (fpfp).$$
Les combinaisons perdantes sont :
$$(ff[ff]); (ff[pf]); (ff[fp]); (ff[pp]); (pfff); (fpff);$$
La pièce étant truquée, le problème n'est pas symétrique et il faut calculer chaque probabilité.

1. Probabilité de gagner, (on pose $p = 0.6$ et $f = 0.4$).

$$(pp[pp]); (pp[fp]); (pp[pf]); (pp[ff]); (fppp); (pfpp) \quad \xrightarrow{\hookrightarrow} \quad f^2p^2 + 3fp^3 + p^4 = 0.5328$$

2. Probabilité de partie nulle, (on pose $p = 0.6$ et $f = 0.4$).

$$(pffp); (fppf); (pfpf); (fpfp) \quad \xrightarrow{\hookrightarrow} \quad p^2f^2 + p^2f^2 + p^2f^2 + p^2f^2 = 4p^2f^2 = 0.2308$$

Mais le calcul effectué est-il permis ? Est-ce que la somme des 16 termes ci-dessus donne 1 ? La réponse est oui, car les 16 termes peuvent être obtenus avec le binôme de Newton, à savoir

$$(p+f)^4 = \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} f^{4-k}p^k = f^4 + 4f^3p + 6f^2p^2 + 4fp^3 + p^4,$$

et comme $(p + f)^4 = (0.6 + 0.4)^4 = 1$, le calcul effectué est justifié.

Solution Ex 2.3. →2.3.
La probabilité d'un événement est donnée par le quotient du nombre de cas favorables par le nombre de cas possibles.

1. Pour $P(1)$, il y a six événements possibles dans l'ensemble fondamental $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Il y a un cas favorable parmi six possibles. La probabilité est $P(1) = \frac{1}{6} \approx= 0.17$.

   Pour $P(2)$, l'ensemble fondamental est $E \times E$, c'est-à-dire tous les couples $(x; y)$ avec x et $y \in \{1..6\}$. Le cardinal de $E \times E$ est $6 \times 6 = 36$ et le nombre de cas favorables est l'ensemble des couples dont le premier élément est différent de 6 et le deuxième égale à 6, ce qui donne 5 éléments favorables pour 36 possibles. La probabilité est $P(2) = \frac{5}{36} \approx 0.138$. Mais stop, si l'on continue ainsi ça risque de devenir un peu fastidieux si l'on veut par exemple $P(34)$! La solution au problème est donnée par le fait que l'on a une densité de probabilité uniforme, chaque événement a la même probabilité d'apparaitre à chaque épreuve (lancer). Cela permet d'appliquer le principe fondamental du dénombrement qui est la règle de multiplication. On effectue ainsi le lien entre le langage ensembliste et le langage des probabilités.

   Pour $P(3)$ on aura la probabilité $\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{25}{216} \approx 0.115$ qui décrit le rapport entre les cas favorables (pas de six aux premier et deuxième lancers, et un six au troisième) divisé par $6 \times 6 \times 6 = 216$.

   Pour $P(4)$ on fait le même raisonnement qui peut se traduire mathématiquement par :

$$P(4) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{125}{1296} \approx 0.096.$$

   Pour $P(n)$ on a finalement :

$$P(n) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{6}$$

2. On désire savoir combien de fois il faut lancer le dé pour que le 6 apparaisse avec une probabilité plus petite que $\frac{1}{100}$ au $n^{\text{ème}}$ lancer. Ou plus intuitivement, combien de fois faut-il lancer le dé pour que la probabilité que le 6 apparaisse soit de 0.99, c'est-à-dire pour être "sûr à 99%" que le 6 apparaisse $(1 - P(n) \geq 0.99)$.

$$1 - P(n) \geq 0.99 \quad \xrightarrow{\hookrightarrow} \quad P(n) < 0.01$$

donc,

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{6} < 0.01 \quad & \xrightarrow{\looparrowright} \quad \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} < 0.06 \\
& \xrightarrow{\looparrowright} \quad (n-1)\ln\left(\frac{5}{6}\right) < \ln(0.06) \\
& \xrightarrow{\looparrowright} \quad (n-1) < \frac{\ln(0.06)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)} \\
& \xrightarrow{\looparrowright} \quad n < 15.4 + 1 = 16.4
\end{aligned}
$$

Il faut 17 lancers.

3. Avant de pouvoir répondre il faut être sûr que la probabilité que le 6 apparaisse en lancant un nombre infini de fois le dé soit de 1. (Probabilité que le 6 sorte au premier ou au deuxième ou au troisième ... ou au n-ième lancer, avec $n \to \infty$).

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} = 1$$

On nous demande la valeur de $1-(P(1)+P(2))$:

$$
\begin{aligned}
1-(P(1)+P(2)) &= \frac{36}{36}-\left(\frac{1}{6}+\frac{5}{36}\right) \\
&= \frac{36}{36}-\frac{11}{36}=\frac{25}{36}
\end{aligned}
$$

La probabilité que le 6 ne sorte pas dans les deux premiers lancers est de $\frac{25}{36} = 0.69$

4. Il s'agit de calculer $P(\text{moins de } 3|\text{moins de } 5)$. C'est une probabilité conditionnelle qui peut s'écrire :

$$P(\text{moins de } 3|\text{moins de } 5) = \frac{P(\text{moins de } 3 \cap \text{moins de } 5)}{P(\text{moins de } 5)}$$

La valeur $P(\text{moins de } 3 \cap \text{moins de } 5)$ signifie "probabilité que l'expérience se termine en moins de 3 lancers et en moins de 5" qui est clairement $P(\text{moins de } 3)$. Avec $P(\text{moins de } 3) = P(1)+P(2)$ et $P(\text{moins de } 5) = P(1)+P(2)+P(3)+P(4)$, on a

$$P(\text{moins de } 3|\text{moins de } 5) = \frac{P(1)+P(2)}{P(1)+P(2)+P(3)+P(4)} = \frac{\frac{11}{36}}{\frac{671}{1296}} = \frac{36}{61} \approx 0.59.$$

Solution Ex 2.4. $\to$2.4.

Soit l'arbre de la situation (FIGURE 2.2). La méthode la plus efficace pour résoudre ce problème type de probabilités conditionnelles est l'arbre (voir FIGURE 2.2). La probabilité que le pion soit sur A au départ est $P(A_0) = 1$.

1. La probabilité que le pion se trouve sur la case B après un coup est $P(B_1) = \frac{1}{2}$. On pourrait également désigner cet événement par $P(B_1|A_0) = \frac{P(A_0\cap B_1)}{P(A_0)} = \frac{1\cdot\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$, mais ce serait compliquer le problème pour rien.
2. On demande $P(A_2)$. Un simple coup d'oeil sur le graphe nous permet d'affirmer que la probabilité est $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Mathématiquement, on a :

$$
\begin{aligned}
P(A_2) &= P(B_1\cap A_2) + P(C_1\cap A_2) \\
&= P(A_2|B_1)P(B_1) + P(A_2|C_1)P(C_1) \\
&= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

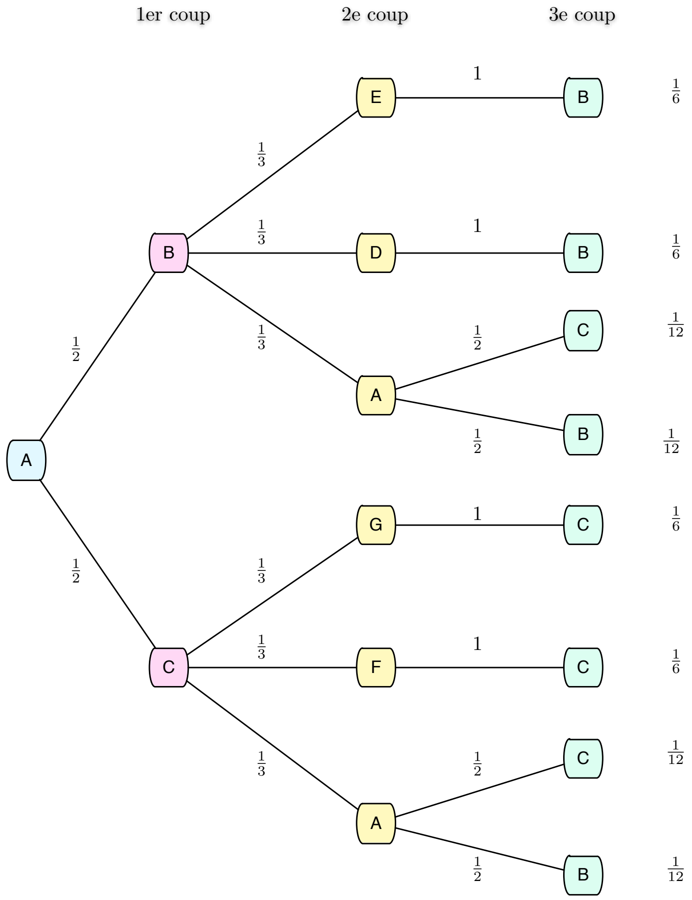


FIGURE 2.2 – Exercice 2.4

3. L'arbre nous apprend qu'il n'y a qu'une seule occurrence sur six que le pion se trouve sur la case E au deuxième coup, donc $P(E) = \frac{1}{6}$.

$$P(E_2) = P(B_1 \cap E_2) = P(E_2|B_1)P(B_1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

4. Attention ! On ne peut pas répondre en comptant le nombre de cases favorables (4) divisé par le nombre de cases possibles (8), car les probabilités ne sont plus identiques pour chaque case comme avant. La probabilité que le pion soit sur la case B au troisième coup est donnée par le tableau et le calcul suivant :

$$\begin{aligned} P(B_3) &= P(B_1 \cap E_2 \cap B_3) + P(B_1 \cap D_2 \cap B_3) + P(B_1 \cap A_2 \cap B_3) + P(C_1 \cap A_2 \cap B_3) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

5. La réponse est

$$\begin{aligned} P(B_3|C_1) &= \frac{P(C_1 \cap A_2 \cap B_3)}{P(B_1 \cap E_2 \cap B_3) + P(B_1 \cap D_2 \cap B_3) + P(B_1 \cap A_2 \cap B_3)} \\ &= \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Solution Ex 2.5. →2.5.
On définit les événements suivants :

$$\begin{aligned} I &= \text{“la personne est infectée”}, \\ nI &= \text{“la personne n'est pas infectée”}, \\ V &= \text{“la personne est vaccinée”}, \\ nV &= \text{“la personne n'est pas vaccinée”}. \end{aligned}$$

On nous donne ou on peut déduire facilement les probabilités suivantes :

$$\begin{aligned} P(V) &= 0.7 \\ P(nV) &= 0.3 \\ P(nI|V) &= 0.9 \\ P(I|V) &= 0.1 \\ P(I|nV) &= 0.8 \\ P(nI|nV) &= 0.2 \end{aligned}$$

1. On utilise la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(I) &= P(I|nV)P(nV) + P(I|V)P(V) \\ &= 0.8 \cdot 0.3 + 0.1 \cdot 0.7 = 0.24 + 0.07 = 0.31 \end{aligned}$$

La probabilité que la personne choisie au hasard soit infectée est de 0.31.

2. On nous demande $P(nI|nV)$:

$$P(nI|nV) = 1 - P(I|nV) = 1 - 0.8 = 0.2$$

La probabilité que la personne n'ait pas été infectée par le virus si elle n'a pas été vaccinée est 0.2.

3. On nous demande de calculer $P(V|nI)$. On utilise la formule de Bayes.

$$\begin{aligned} P(V|nI) &= \frac{P(V \cap nI)}{P(nI)} \\ &= \frac{P(nI|V)P(V)}{1 - P(I)} \\ &= \frac{0.9 \cdot 0.7}{1 - 0.31} = \frac{0.63}{0.69} = 0.913. \end{aligned}$$

La probabilité que la personne ait été vaccinée sachant qu'elle n'est pas infectée est 0.913.

L'arbre est à la (FIGURE 2.3)

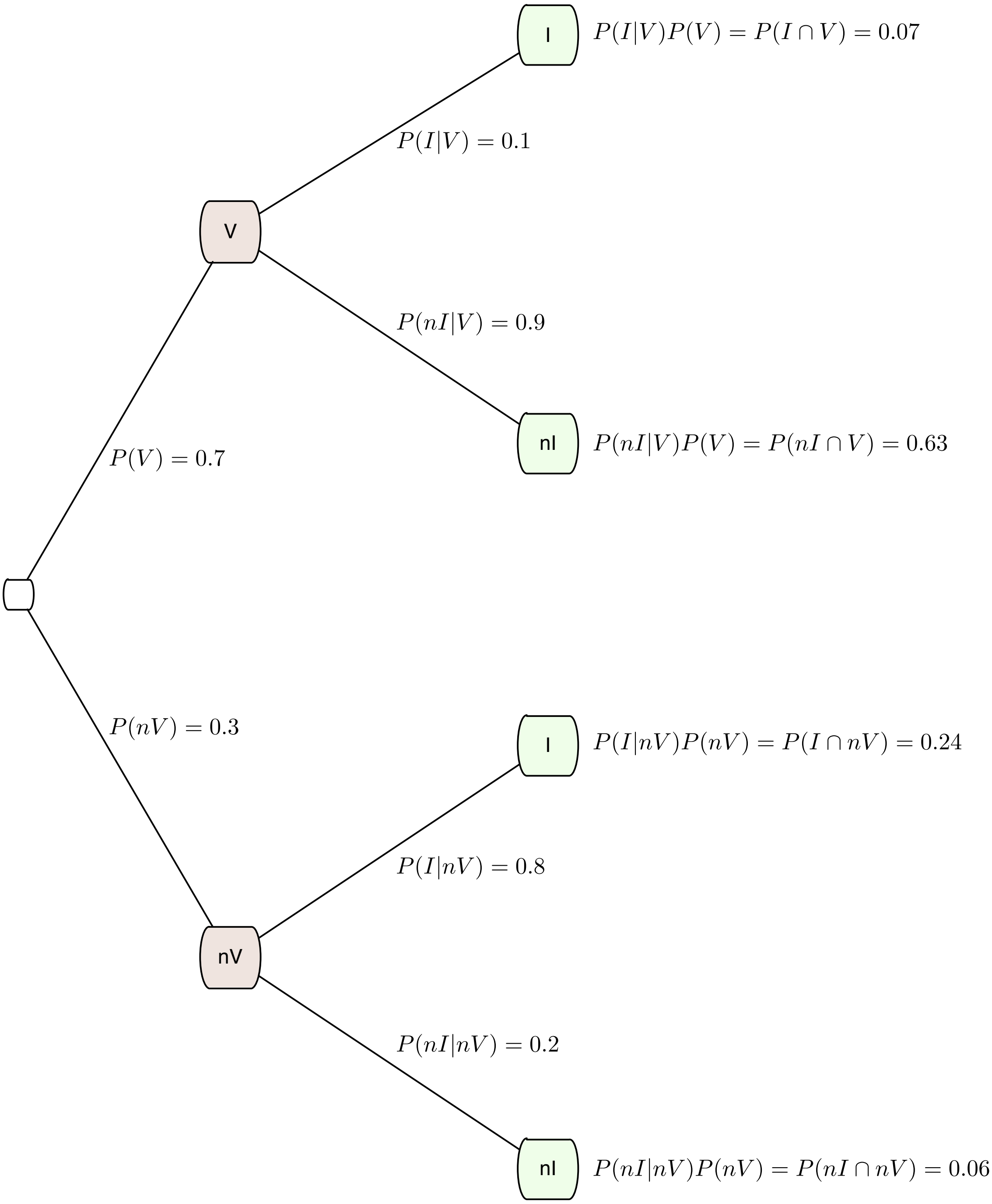


FIGURE 2.3 – Exercice 2.5

Solution Ex 2.6. →2.6.

1. Notons $P(n)$ la probabilité que Julie a de gagner au $n$ème tirage. Il y a 9 boules en tout dont 2 permettent de gagner. Le tirage se fait sans remise. On peut calculer :

$$\begin{aligned} P(1) &= \frac{2}{9} \\ P(2) &= \frac{7}{9}\cdot\frac{2}{8} = \frac{7}{36} \\ P(3) &= \frac{7}{9}\cdot\frac{6}{8}\cdot\frac{2}{7} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

La probabilité que Julie a de gagner est $P(G) = P(1) + P(2) + P(3)$ (l'addition traduit le fait qu'elle peut gagner au premier <u>ou</u> au deuxième <u>ou</u> au troisième tirage).

$$P(G) = P(G) = P(1) + P(2) + P(3) = \frac{7}{12}.$$

2. On nous demande $P(1|G) + P(2|G)$, ce qui se traduit mathématiquement par :

$$\begin{aligned} P(1|G) = \frac{P(1\cap G)}{P(G)} &\overset{\text{Bayes}}{\longrightarrow} \frac{P(G|1)P(1)}{P(G)} = \frac{1\cdot\frac{2}{9}}{\frac{7}{12}} = \frac{8}{21} \\ P(2|G) = \frac{P(2\cap G)}{P(G)} &\overset{\text{Bayes}}{\longrightarrow} \frac{P(G|2)P(2)}{P(G)} = \frac{1\cdot\frac{7}{36}}{\frac{7}{12}} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Le résultat est $P(1|G) + P(2|G) = \frac{5}{7}$.

Julie joue maintenant 4 fois de suite avec la probabilité de gagner $P(G) = \frac{7}{12}$ et $P(\overline{G}) = \frac{5}{12}$ ($P(\overline{G})$= probabilité de perdre). C'est une suite d'épreuves de Bernouilli, on utilise la loi binomiale. Notons $p = P(G) = \frac{7}{12}$.

1. Elle doit gagner trois parties sur quatre <u>ou</u> quatre parties sur quatre :

$$P(\text{“3 sur 4”}) = \binom{4}{3}p^3(1-p)^1 = 4\cdot\left(\frac{7}{12}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{12}\right)^1 = \frac{1715}{5184} \approx 0.33$$

$$P(\text{“4 sur 4”}) = \binom{4}{4}p^4(1-p)^0 = \left(\frac{7}{12}\right)^4 = \frac{2401}{20736} \approx 0.11$$

La somme des deux probabilités est 0.44.

2. Si elle veut repartir avec l'ourson et un ticket elle doit gagner les quatre parties, la probabilité est celle déjà calculée qui est $P(\text{“4 sur 4”}) = 0.11$.

Solution Ex 2.7. →2.7.
La manière la plus efficace dans ce genre de problème cas est de faire un arbre, car c'est un problème de probabilités conditionnelles, c'est-à-dire que le tirage suivant dépend du (ou des) précédent(s). L'arbre se trouve à la FIGURE (2.4).
On se rappelle que Marie mange les boules noires et remet les blanches dans la boîte avant d'effectuer le tirage suivant. Elle effectue 3 tirages.

1. En se basant sur l'arbre, on a :

$$\begin{aligned} P(\text{“2e boule est blanche”}) &= P(B_2|N_1)P(N_1) + P(B_2|B_1)P(B_1) \\ &= P(N_1 \cap B_2) + P(B_1 \cap B_2) \\ &= \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} \\ &= \frac{11}{20} = 0.55 \end{aligned}$$

   La probabilité de l'événement "la deuxième boule tirée est blanche" est 0.55.

2. Il y un événement correspondant à l'énoncé :

$$\begin{aligned} P(\text{“1ère noire et deux dernières blanches”}) &= P(N_1 \cap B_2 \cap B_3) \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5} \\ &= \frac{9}{50} = 0.18 \end{aligned}$$

   La probabilité que seules les deux dernières boules tirées soient blanches est 0.18.

3. Il y a 1 événement complémentaire qui rentre en ligne de compte :

$$\begin{aligned} P(\text{“au moins un chocolat”}) &= 1 - P(\text{“aucun chocolat”}) \\ &= 1 - P(B_1 \cap B_2) \\ &= 1 - \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{3}{4} = 0.75 \end{aligned}$$

   La probabilité qu'après 2 tirages, elle ait mangé au moins un chocolat est de 0.75.

4. On fait le quotient des probabilités des événements "manger exactement deux chocolats <u>et</u> la 2e boule est blanche" par "manger exactement 2 chocolats dans 3 tirages".

$$\begin{aligned} P(\text{2ème blanche } \underline{\text{si}} \text{ 2 noires}) &= \frac{P(\text{“2ème blanche et deux noires”})}{P(\text{“tirer 2 noires et une blanche”})} \\ &= \frac{P(N_1 \cap B_2 \cap N_3)}{P(N_1 \cap B_2 \cap N_3) + P(N_1 \cap N_2 \cap B_3) + P(B_1 \cap N_2 \cap N_3)} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}} \\ &= \frac{12}{37} \approx 0.33 \end{aligned}$$

   La probabilité que la deuxième boule tirée soit blanche, sachant qu'elle a finalement mangé 2 chocolats est 0.33.

5. Elle ne doit avoir tiré que des boules noires :

$$\begin{aligned} P(\text{“3 noires”}) &= P(N_1 \cap N_2 \cap N_3) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{20} = 0.05 \end{aligned}$$

La probabilité qu'il ne reste plus de boule de chocolat noir dans la boîte après 3 tirages est 0.05.

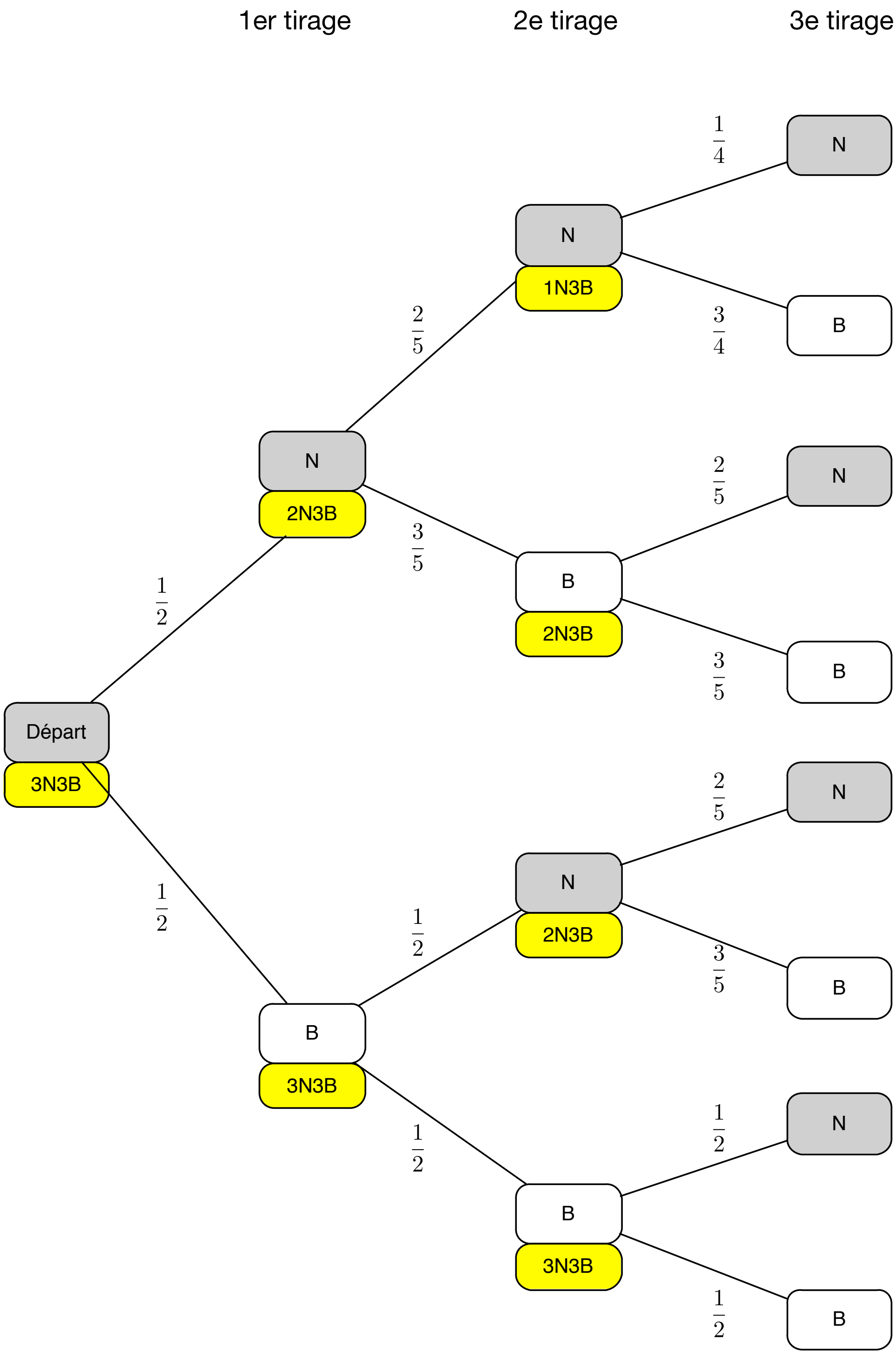


Figure 2.4 – Exercice 2.7

Solution Ex 2.8. →2.8.
Soit l'arbre de la situation à la FIGURE 2.5.

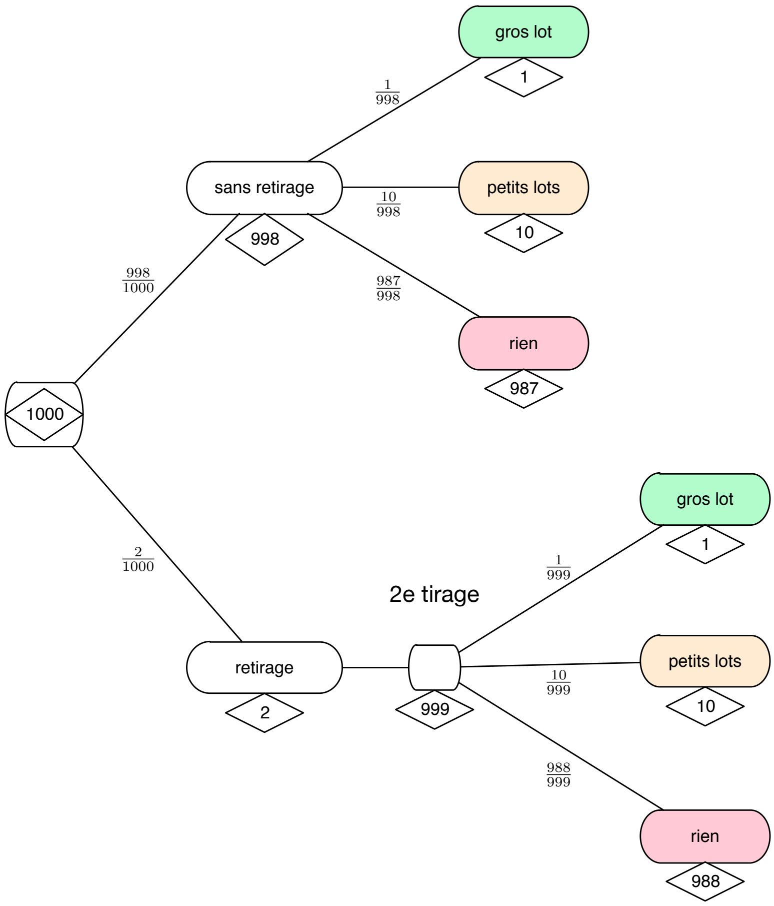


FIGURE 2.5 – Exercice 2.8

1. La probabilité qu'elle gagne un lot sans retirer de billet est
$$\frac{998}{1000}\cdot\frac{1}{998}+\frac{998}{1000}\cdot\frac{10}{998}=\frac{11}{1000}$$
2. La probabilité qu'elle ne puisse pas retirer un nouveau billet est
$$1-\frac{2}{1000}=\frac{998}{1000}$$
3. La probabilité qu'elle gagne le gros lot est :
$$\frac{998}{1000}\cdot\frac{1}{998}+\frac{2}{1000}\frac{1}{999}=\frac{1001}{999000}=0.001002$$
4. La probabilité qu'elle ne gagne rien est
$$\frac{998}{1000}\cdot\frac{987}{998}+\frac{2}{1000}\cdot\frac{988}{999}=\frac{987989}{999000}=0.988977$$
5. La probabilité qu'elle n'ait pas retiré de billets sachant qu'elle a gagné quelquechose est :
$$\frac{\frac{998}{1000}(\frac{1}{998}+\frac{10}{998})}{\frac{998}{1000}(\frac{1}{998}+\frac{10}{998})+\frac{2}{1000}(\frac{1}{999}+\frac{10}{999})}=\frac{999}{1001}=0.998002$$

Chapitre 3

Optimisation

3.1 Introduction

Les problèmes d'optimisation vus dans cette section sont, en général, des problèmes de deux variables à une seule contrainte. La résolution se fait par substitution d'une des deux variable, puis par recherche des extrema de la fonction à optimiser.

3.2 EXERCICES - Optimisation - Niveau standard

Ex 3.1. (Maturité fédérale - Préparation 2013) Soit un cône de rayon 5 et de hauteur 7. Inscrire dans ce cône un cylindre de volume maximal. (FIGURE 3.1).

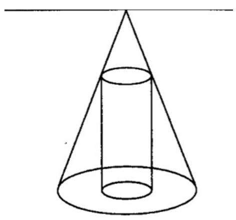


FIGURE 3.1 – Exercice 3.1

Solution

Ex 3.2. (Maturité fédérale - Préparation 2013) On se propose d'envoyer un colis de volume égal à 12dm3, dont la forme est un parallélépipède rectangle à base carrée. Son emballage est maintenu à l'aide d'une ficelle comme le montre la FIGURE 3.2. Trouver les dimensions du colis permettant d'utiliser le moins de ficelle possible.

Solution

Ex 3.3. (Maturité fédérale - Préparation 2013) On veut construire un enclos en forme de trapèze isocèle le long d'un mur rectiligne, au moyen de trois barrières AB, BC et CD de $2m$ de longueur. (Voir FIGURE 3.3) Soit α l'angle que font les deux barrières latérales avec le mur. Calculer α pour que l'aire de l'enclos soit maximale.

Solution

Ex 3.4. (Maturité fédérale - Préparation 2013) Soit la courbe Γ représentative de la fonction f donnée par $f(x) = \frac{1}{x}$ et soit A le point d'abscisse a de cette courbe $(a > 0)$.

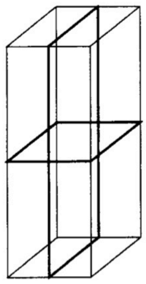


FIGURE 3.2 – Exercice 3.2

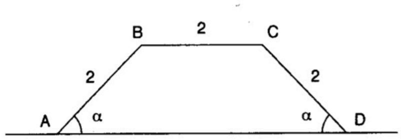


FIGURE 3.3 – Exercice 3.3

1. Ecrire l'équation de la tangente en A à Γ et calculer les coordonnées de B et C, points où cette tangente coupe les axes de coordonnées Ox et Oy.
2. Déterminer a de telle sorte que la longueur du segment BC soit minimale.

Solution

Ex 3.5. (Maturité fédérale - Préparation 2013) Un avion de 90 places (15 en business class et 75 en économique) assure la liaison Amsterdam-Barcelone. Le vol à vide coûte $36'000$ francs à la compagnie. De plus chaque passager coûte, toutes classes confondues, 50 francs à la compagnie. Il y a toujours 15 passagers prêts à payer 900 francs leur billet de business class.

1. Combien faut-il vendre le billet de classe économique pour qu'un vol plein soit juste rentabilisé ?
2. Pour chaque augmentation de 10 francs du billet de classe économique, la compagnie perd 1 passager. Si x est le nombre d'augmentations de 10 francs du prix du billet trouvé en 1., montrer que le bénéfice est donné par $f(x) = -10x^2 + 440x$.
3. Quel doit être le prix du billet de la classe économique pour que le bénéfice soit maximal ?

Solution

Ex 3.6. (Maturité fédérale - Ete 2009)
Comme le montre le schéma ci-dessous (FIGURE 3.4), un photographe désire fabriquer un cadre pour une photo rectangulaire à partir d'une planche de 24 cm de long et 1 cm de large. Comment devra-t-il couper cette planche pour que l'aire intérieure du cadre soit maximale ?

Solution

Ex 3.7. (Maturité fédérale - Eté 2010)
Déterminer la valeur de x pour laquelle l'aire du triangle grisé du dessin (FIGURE 3.5) est minimale, puis calculer la valeur de l'aire minimale. (Information : le triangle grisé n'est pas forcément rectangle.)

Solution

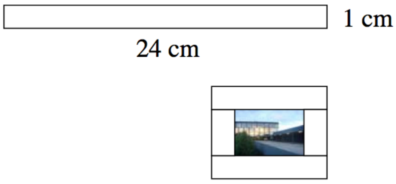


FIGURE 3.4 – Exercice 3.6

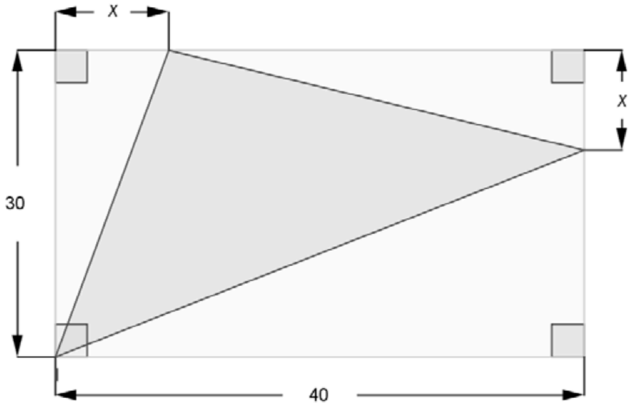


FIGURE 3.5 – Exercice 3.7

Ex 3.8. (Maturité fédérale - Eté 2011)
On considère la parabole d'équation $y = 2x^2$ et le point $P(0;4)$.
Déterminer l'ensemble des points $Q(x;y)$ de la parabole qui sont à une distance minimale du point P.

Solution

3.3 SOLUTIONS - Optimisation - Niveau standard

Solution Ex 3.1. →3.1.
La fonction à optimiser est celle donnant le volume du cylindre. En appelant h et r respectivement, la hauteur et le rayon, du petit cylindre, la foncton à optimiser se définit ainsi :

$$V(r;h) = \pi r^2 h.$$

C'est une fonction des deux variables r et h. Le cône qui renferme le cylindre a des dimensions fixées qui sont appelées les contraintes du problème. Ces dernières sont $H = 7$ et $R = 5$. Il faut à présent trouver une expression qui relie les grandeurs H et L (constantes) avec les grandeurs h et r (variables) afin de pouvoir exprimer $h(r)$ ou $r(h)$. L'expression cherchée est (voir FIGURE 3.6) :

$$\frac{H-h}{r} = \frac{H}{R} \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad h(r) = H - \frac{Hr}{R} = 7 - \frac{7r}{5} = \frac{7}{5}(5-r)$$

en substituant $h(r)$ dans $V(r;h)$ on obtient :

$$V(r;h) = V(r;h(r)) = V(r) = 7\left(\pi r^2 - \frac{\pi r^3}{5}\right)$$

Avant de continuer il faut définir les domaines de variation des variables h et r. Il est clair que r ne pourra

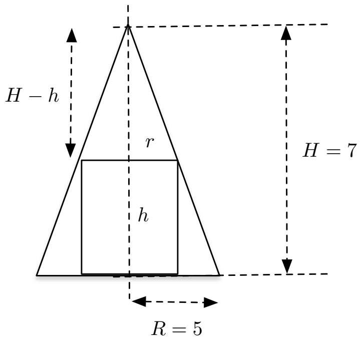


FIGURE 3.6 – Exercice 3.1

varier que dans l'intervalle $[0;5]$. La variation de h est liée à celle de r par la relation

$$h = \frac{7}{5}(5-r) \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad ((r=0 \Rightarrow h=7) \text{ et } (r=5 \Rightarrow h=0))$$

On va à présent dériver $V(r)$ et égaler sa dérivée à zéro pour trouver les points critiques (points où la dérivée s'annule).

$$V'(r) = \frac{7}{5}\pi(10-3r)r \quad \xrightarrow{V'=0} \quad \frac{7}{5}\pi(10-3r)r = 0 \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad r \in \left\{0; \frac{10}{3}\right\}$$

On va s'intéresser aux points $r = 0$ et $r = \frac{10}{3}$ mais également aux bornes de l'intervalle, c'est-à-dire en plus au point $r = 5$. Il faut faire un tableau de croissance de V' pour décider des valeurs minimums et maximums. Sur $[0;5]$ on a :

r	0		$\frac{10}{3}$		5
$10-3r$		$+$	0	$-$	
r	0	$+$		$+$	
$V'(r)$	0	$+$	0	$-$	
$V(r)$	0	↗	$\frac{700\pi}{27}$	↘	0

Il y a un maximum à $x = \frac{10}{3}$ et à ce point le volume du cylindre est $V\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{700\pi}{27}$

Solution Ex 3.2. →3.2.
La fonction à optimiser sera la fonction qui donne la longueur de la ficelle. On note x les côtés de la base carrée du parallélépipède et y sa hauteur. La longueur de la ficelle est :

$$L(x; y) = 6x + 2y.$$

Le volume x^2y du parallélépipède vaut 12, donc on peut en déduire une valeur pour y en fonction de x :

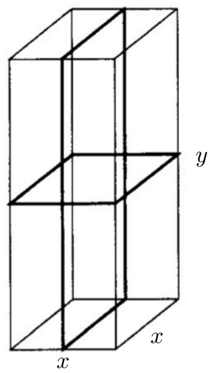


Figure 3.7 – Exercice 3.2

$$12 = x^2y \quad \longrightarrow \quad y(x) = \frac{12}{x^2}$$

et substituer celle-ci dans la fonction $L(x; y)$:

$$\begin{aligned} L(x; y) = 6x + 2y \quad & \longrightarrow \quad L(x; y(x)) = L(x) = 6x + \frac{24}{x^2} \\ & = \quad L(x) = 6\left(x + \frac{4}{x^2}\right) = \frac{6\left(x^3+4\right)}{x^2} \end{aligned}$$

Le domaine de validité de x dans ce problème est $]0; \infty[$, c'est l'intervalle sur lequel on va étudier L et L'. On dérive L est on égale sa dérivée à zéro pour trouver les points critiques :

$$L'(x) = 6\left(1 - \frac{8}{x^3}\right) = \frac{6\left(x^3 - 8\right)}{x^3} \quad \longrightarrow \quad x = 2.$$

Les points qui nous intéressent sont les bornes de l'intervalle de validité de x et le point critique, autrement dit l'ensemble $\{0, 2, +\infty\}$. On fait le tableau des signes de la dérivée avec ces trois points :

x	0		2		$+\infty$
$x^3 - 8$		$-$	0	$+$	
x^3		$+$		$+$	
$L'(x)$		$-$	0	$+$	
$L(x)$	$+\infty$	↘	18	↗	$+\infty$

On a bien un minimum de L en $x = 2$. Si $x = 2$ alors $y = \frac{12}{x^2} = 3$ et la longueur minimum de la ficelle est $L(x; y) = L(2; 3) = 18$.

Solution Ex 3.3. →3.3.
L'aire d'un trapèze est donnée par $\left[\frac{(B=\text{grande base})+(b=\text{petite base})}{2} \cdot (h = \text{hauteur})\right]$ avec dans notre cas :

$$\begin{aligned} B &= 2 + 2\cos(\alpha) + 2\cos(\alpha) = 2 + 4\cos(\alpha); \\ b &= 2; \\ h &= 2 \cdot \sin(\alpha) \end{aligned}$$

La fonction $A(\alpha)$ donne l'aire du trapèze en fonction de α :

$$\begin{aligned} A(\alpha) = \frac{4 + 4\cos(\alpha)}{2} \cdot 2 \cdot \sin(\alpha) &= (4 + 4\cos(\alpha))\sin(\alpha) \\ &= 4\sin(\alpha) + 4\cos(\alpha)\sin(\alpha) \end{aligned}$$

En appliquant l'identité : $\cos(\alpha)\sin(\alpha) = \frac{1}{2}\sin(2\alpha)$, on obtient pour l'aire du trapèze :

$$A(\alpha) = 4\sin(\alpha) + 2\sin(2\alpha)$$

Le domaine de validité de la variable α est $\left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$ comme le montre la FIGURE 3.8.

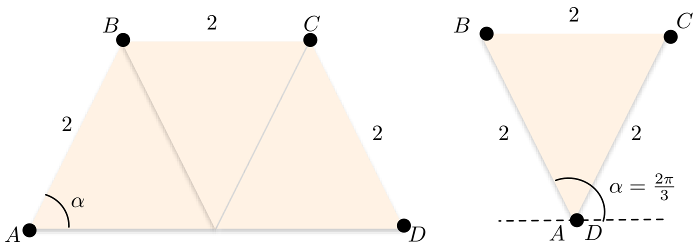


FIGURE 3.8 – Exercice 3.3

On dérive A et in égale sa dérivée A' à zéro afin de trouver un point critique :

$$\begin{aligned} A'(\alpha) = 4\cos(\alpha) + 4\cos(2\alpha) \quad &\longrightarrow \quad \cos(\alpha) = -\cos(2\alpha) \\ &\longrightarrow \quad \cos(\alpha) = -\left(\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)\right) \\ &\longrightarrow \quad \cos(\alpha) + \cos^2(\alpha) = \sin^2(\alpha) \\ &\longrightarrow \quad \cos(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1 - \cos^2(\alpha) \\ &\longrightarrow \quad 2\cos^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) - 1 = 0 \\ &\longrightarrow \quad 2(\cos(\alpha) + 1)\left(\cos(\alpha) - \frac{1}{2}\right) = 0 \end{aligned}$$

Cette dernière équation a trois solutions sur $[0; 2\pi]$ qui sont $x \in \left\{\frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{3}; -1\right\}$. De ces trois valeurs seules $\alpha = \frac{\pi}{3}$ se trouve dans le domaine de validité.
Reste à montrer que le valeur de l'aire du trapèze en pour cette valeur est maximum. Soit le tableau de la dérivée sur l'intervalle de validité :

α	0		$\frac{\pi}{3}$		$2\frac{\pi}{3}$
$\cos(\alpha)+1$		$+$		$+$	
$\cos(\alpha)-\frac{1}{2}$		$+$	0	$-$	
$A'(\alpha)$		$+$	0	$-$	
$A(\alpha)$	0	$\nearrow$	$3\sqrt{3}$	$\searrow$	$\sqrt{3}$

L'aire de l'enclos est maximale pour $\alpha = \frac{\pi}{3}$

Solution Ex 3.4. $\rightarrow$3.4.
Graphiquement on a : (FIGURE 3.9).

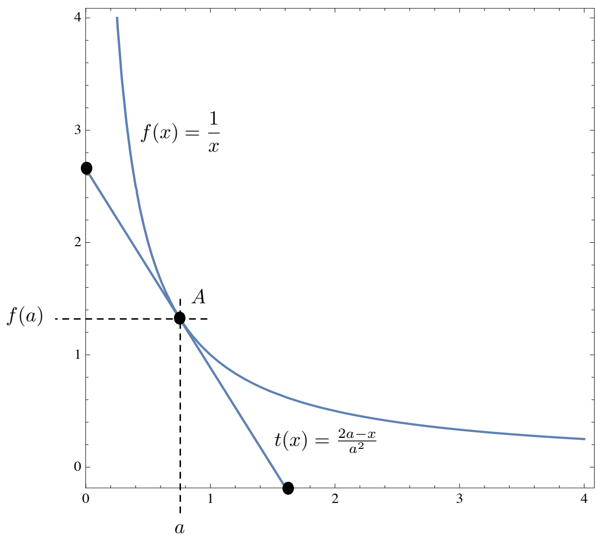


FIGURE 3.9 – Exercice 3.4

1. L'équation d'une tangente t au graphe d'une fonction f en $(a; f(a))$ est donnée par

$$t(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

Dans le cas présent, cela donne :

$$t(x) = \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2}(x-a) = \frac{2a-x}{a^2}$$

Le point B est le point où $t(x) = 0$:

$$t(x) = \frac{2a-x}{a^2} = 0 \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad x = 2a.$$

Le point C est le point $t(0)$:

$$t(0) = \frac{2}{a}.$$

2. La longueur ℓ du segment $\overline{BC}$ est donnée par :

$$\ell = \sqrt{(2a)^2 + \left(\frac{2}{a}\right)^2} = \sqrt{4a^2 + \frac{4}{a^2}}$$

Le domaine de validité de la variable a est $]0;+\infty[$. On dérive l'équation obtenue et on l'égale à zéro.

$$\ell' = \frac{1}{2\sqrt{4a^2 + \frac{4}{a^2}}}\left(8a - \frac{8}{a^3}\right) = \frac{2\left(a^4 - 1\right)}{a^3\sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}}} = 0$$

L'unique solution dans notre cas est $a = 1$. Il n'est pas nécessaire de faire un tableau pour déterminer qu'en ce point ℓ passe par un minimum. En effet, on peut récrire la dérivée ainsi,

$$\frac{2}{a^3\sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}}}(a^4 - 1) = c \cdot (a^4 - 1)$$

c est une constante positive, car $a > 0$. La dérivée seconde $\ell'' = 4ca^3$ est positive en $a = 1$. La fonction est convexe en ce point, donc le point critique est forcément un minimum. La longueur du segment $\overline{BC}$ est $2\sqrt{2}$. La réponse n'est pas surprenante vu la symétrie du problème.

Solution Ex 3.5. →3.5.

1. On commence par calculer le prix du billet pour qu'un vol plein soit rentabilisé. Les coûts sont :

$$36\,000 + (90 \cdot 50) = 40\,500$$

Les recettes sont : (pB= prix du billet)

$$(15 \cdot 900) + 75 \cdot pB = 13\,500 + 75pB$$

Coûts=recette

$$40\,500 = 13\,500 + 75pB \quad \xrightarrow{\text{↬}} \quad pB = 360.$$

Le prix du billet est 360 francs.

2. Calcul du bénéfice $B(x)$ où x est le nombre d'augmentations, chacune de 10 francs, du prix du billet.
   (a) Les coûts sont :

   $$36\,000 + 15 \cdot 50 + (75 - x)50$$

   (b) Les recettes sont :

   $$(15 \cdot 900) + (75 - x)(360 + 10x)$$

   Bénéfice : $B(x)$ = recettes-coûts

   $$\begin{aligned} B(x) &= [(15 \cdot 900) + (75 - x)(360 + 10x)] - [36\,000 + 15 \cdot 50 + (75 - x)50] \\ &= -10x^2 + 440x = -10x(x - 44) \end{aligned}$$

3. Le bénéfice est donné par la fonction $B(x) = -10x^2 + 440x$. Le domaine de validité de x est $[0;75]$. On égale la dérivée de $B(x)$ à zéro pour trouver un point critique

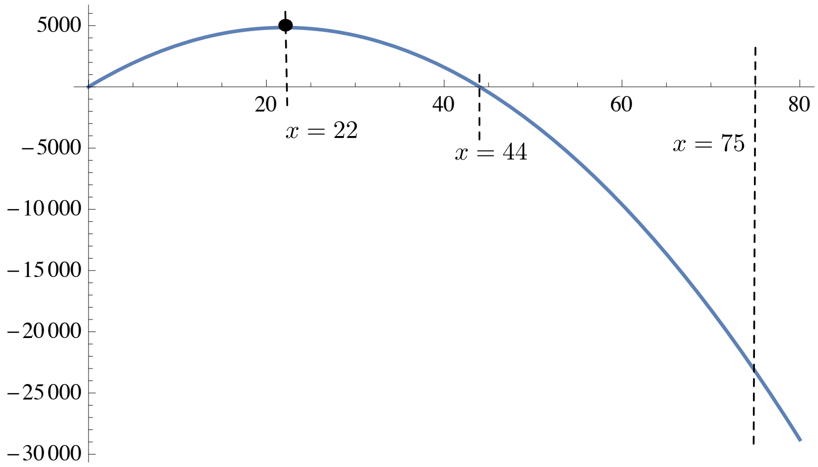
$$B'(x) = -20x + 440 = 0 \quad \xrightarrow{\text{↬}} \quad x = 22$$

Le tableau des signes est :

x	0		22		75
-20		$-$		$-$	
$x - 22$		$-$	0	$+$	
$B'(x)$		$+$	0	$-$	
$B(x)$	0	$\nearrow$	4840	$\searrow$	$-23\,250$

Il faudra donc augmenter le prix du billet de $22 \cdot 10 = 220$ francs pour avoir un bénéfice maximum de $B(22) = 4840$ francs avec un billet à 580 francs en classe économique.

On remarque un déficit à partir de $x = 44$ comme le montre la courbe des bénéfices ci-après (FIGURE 3.10) :



$x = 75$

FIGURE 3.10 – Exercice 3.5

Solution Ex 3.6. $\rightarrow$3.6.

En se basant sur le dessin (FIGURE 2.2) l'aire A de l'image est donnée par la fonction :

$$A(L;\ell) = (L-2)\ell \tag{3.1}$$

C'est une fonction de deux variables. On va utiliser la contrainte pour en éliminer une. Le problème nous impose :

$$2L + 2\ell = 24 \quad \longrightarrow \quad L + \ell = 12 \quad \longrightarrow \quad \ell = 12 - L$$

En substituant $\ell = 12 - L$ dans la fonction (3.1) on obtient une fonction de la seule variable L :

$$A(L) = (L-2)(12-L) = -L^2 + 14L - 24$$

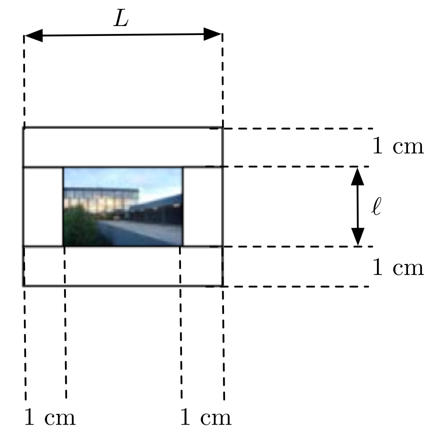


FIGURE 3.11 – Exercice 3.6

Une aire ne pouvant être négative, le domaine de variation de la variable L est l'intervalle $[2; 12]$.

Pour déterminer l'aire maximum on dérive A et on égale la fonction obtenue à zéro afin de trouver la valeur de L pour laquelle l'accroissement de A est nul.

$$A'(L) = -2L + 14 \quad \overset{\hookrightarrow}{\longrightarrow} \quad -2L + 14 = 0 \quad \overset{\hookrightarrow}{\longrightarrow} \quad L = 7$$

La valeur du point critique est $L = 7$. Il faut à présent prouver que c'est un maximum, car un point critique peut également être un minimum ou un palier ! Au lieu de faire le tableau de croissance on peut utiliser le test de la dérivée seconde :

$$A''(L) = -2$$

La valeur en $L = 7$ de A'' est négative, le graphe de A est concave en ce point. On a un maximum local. Il faut également vérifier que ce maximum local soit également un maximum global en calculant les valeurs de l'aire A aux limites de l'intervalle de validité de L. On voit que :

$$\begin{aligned} A(2) &= 0 \\ A(7) &= 25 \\ A(12) &= 0 \end{aligned}$$

Le maximum est bien en $L = 7$. Il faut couper la baguette en deux morceaux de 7 cm et deux morceaux de $\ell = 12 - 7 = 5$ cm. On remarquera que l'aire est maximum pour une image carrée.

Solution Ex 3.7. $\rightarrow$3.7.
Le calcul de la base du triangle grisé ne pose aucun problème, mais le calcul de la hauteur est plus délicat. Au lieu de minimiser l'aire du triangle on va maximiser l'aire des 3 triangles rectangles Δ_{ABC}, Δ_{CDE} et Δ_{EFA}. (Voir FIGURE 3.12).

$$\begin{aligned} \Delta_{ABC} &= \frac{30x}{2} \\ \Delta_{CDE} &= \frac{(40 - x)x}{2} \\ \Delta_{EFA} &= \frac{40(30 - x)}{2} \end{aligned}$$

La somme de l'aire des trois triangles est donnée en fonction de x par

$$A(x) = -\frac{x^2}{2} + 15x + 600.$$

Le domaine de validité de la variable x est $[0; 30]$ (ceci est facilement déduit du dessin) On remarque que la

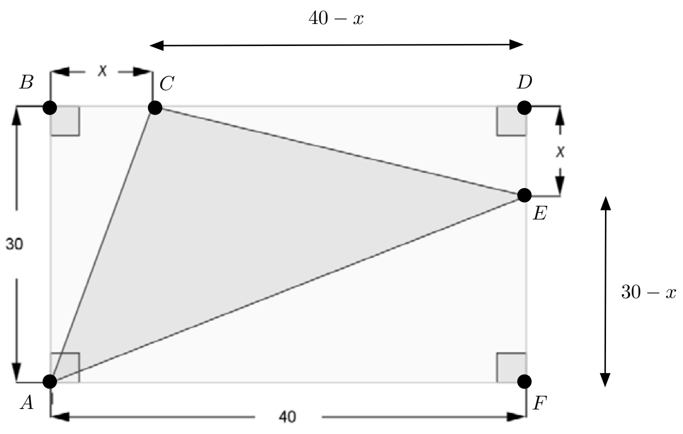


FIGURE 3.12 – Exercice 3.7

fonction $A(x)$ est une parabole concave, il n'y aura par conséquent qu'un seul point critique, et que celui-ci sera forcément un maximum. Il reste cependant à vérifier que ce maximum se situe à l'intérieur du domaine de validité. On dérive A et on égale à zéro :

$$A'(x) = -x + 15 = 0 \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad x = 15$$

L'aire des triangles sera maximum pour $x = 15$ qui est dans le domaine de validité. On peut donc affirmer que l'aire grisée sera minimum pour $x = 15$.

Remarque 2. *On aurait également pu travailler directement avec l'aire grisée en posant pour celle-ci :*

$$\begin{aligned} A(x) &= \textit{aire du rectangle} - (\textit{somme aires des 3 triangle}) \\ &= 1200 - \left(-\frac{x^2}{2} + 15x + 600\right) \\ &= 1200 + \frac{x^2}{2} - 15x - 600 = x^2 - 15x + 600 \end{aligned}$$

dont la dérivée égalée à zéro donne le même résultat :

$$A'(x) = 0 \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad x - 15 = 0 \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad x = 15.$$

Solution Ex 3.8. →3.8.
La situation est celle de la (FIGURE 3.13). Il s'agit de minimiser la distance PQ. Cette distance est donnée en fonction de x par :

$$L(x) = \sqrt{x^2 + |f(x) - 4|^2} = \sqrt{x^2 + (2x^2 - 4)^2} = \sqrt{4x^4 - 15x^2 + 16}.$$

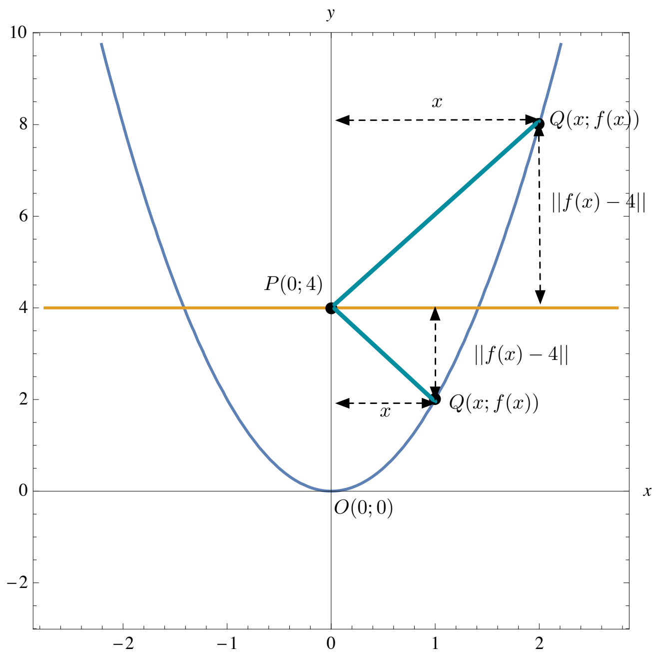


FIGURE 3.13 – Exercice 3.8

La fonction racine carrée est une fonction qui conserve l'ordre, on peut donc travailler avec la nouvelle fonction $\ell = L^2(x) = 4x^4 - 15x^2 + 16$, qui est plus facile à manier. Le domaine de validité de x est $\mathbb{R}$.

Pour trouver les points critiques on dérive ℓ et on égale sa dérivée à zéro :

$$\ell'(x) = 16x^3 - 30x \quad \xrightarrow{\hookrightarrow} \quad 8x(2x^2 - 15) = 0$$

Il y a une solution nulle et une solution double $x = \pm\frac{\sqrt{\frac{15}{2}}}{2}$. Pour connaître la nature des 3 points critiques on fait le tableau de croissance de $\ell'(x)$:

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{\frac{15}{2}}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{\frac{15}{2}}}{2}$		∞
$8x$	⋮	$-$	⋮	$-$	0	$+$	⋮	$+$	⋮
$2x^2 - 15$	⋮	$+$	0	$-$	⋮	$-$	0	$+$	⋮
$\ell'(x)$	⋮	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	⋮
$L(x)$	∞	↘	$\frac{\sqrt{31}}{4}$	↗	4	↘	$\frac{\sqrt{31}}{4}$	↗	∞

On remarque que l'on a deux maximums globaux en $\pm\infty$, deux minimums globaux en $x = \pm\frac{\sqrt{\frac{15}{2}}}{2}$ et un maximum local en $x = 0$.
L'ensemble des points demandé est

$$\left\{ \left(-\frac{\sqrt{\frac{15}{2}}}{2}; \frac{\sqrt{31}}{4} \right); \left(-\frac{\sqrt{\frac{15}{2}}}{2}; \frac{\sqrt{31}}{4} \right) \right\}$$

Remarque 3. *C'est par souci de d'efficacité que j'ai choisi de travailler avec $\ell(x)$ au lieu de $L(x)$. On* *remarquera que le résultat final est identique car la dérivée de $L(x) = \sqrt{4x^4 - 15x^2 + 16}$ est :*

$$L'(x) = \frac{x\left(8x^2 - 15\right)}{\sqrt{4x^4 - 15x^2 + 16}}$$

Quand on égale $L'(x)$ à zéro on obtient exactement les même points critiques qu'avec la fonction ℓ. Le comportement des deux fonctions est identique comme le montre le graphe de la FIGURE *3.14*.

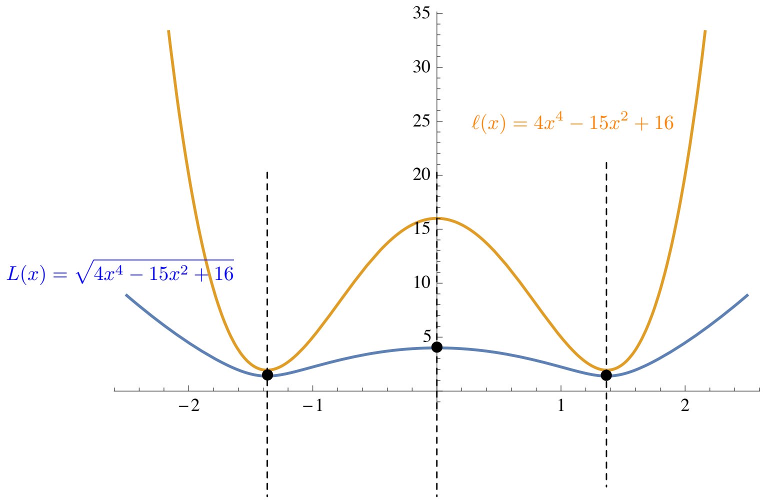


FIGURE 3.14 – Exercice 3.8

Chapitre 4

Géométrie

4.1 EXERCICES - Géométrie - Niveau standard

Ex 4.1. (Maturité fédérale - Été 2008)
Dans un repère orthonormé on donne les points $A(3;3)$, $B(-5;3)$, la droite d d'équation $x + y = 0$ et le cercle Γ d'équation $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 18 = 0$.

1. Déterminer le centre P_0 et le rayon r du cercle Γ.
2. Montrer par calcul que A appartient à Γ et que P_0 appartient à d.
3. Calculer les coordonnées des points d'intersection de la droite passant par les points A et B avec le cercle Γ.
4. Déterminer par calcul l'équation de la tangente t à Γ en A.
5. Calculer la valeur de l'angle aigu compris entre d et t.

Solution

Ex 4.2. (Maturité fédérale - Été 2009)
On considère le cercle γ d'équation $x^2 + y^2 + 10y = 0$, la droite d d'équation $2x + y - 6 = 0$ et le point $A(-4;-2)$.

1. Déterminer l'équation de la tangente t au cercle γ en A.
2. Calculer les coordonnées du point d'intersection B des droites d et t.
3. Calculer les coordonnées des points d'intersection C et D du cercle γ avec la droite d.
4. Montrer que $\left\|\overrightarrow{BA}\right\|^2 = \overrightarrow{BC} \circ \overrightarrow{BD}$.
5. Déterminer la plus courte distance entre le cercle γ et le point B.

Solution

Ex 4.3. (Maturité fédérale - Hiver 2009) On considère la droite d d'équation $2x + 3y - 6 = 0$ et le point $O(0;0)$.

1. Calculer les coordonnées des sommets A, B et C du carré $OABC$ avec A et B sur d. Comme il y a 2 possibilités pour le point B, on choisira celui qui a une abscisse positive.
2. Donner l'équation du cercle c de centre O qui est tangent à la droite d.
3. Déterminer l'aire de la surface extérieure au cercle c mais intérieure au carré $OABC$.

Solution

Ex 4.4. (Maturité fédérale - Eté 2010) On considère la figure (FIGURE)

1. Donner l'équation du cercle c.

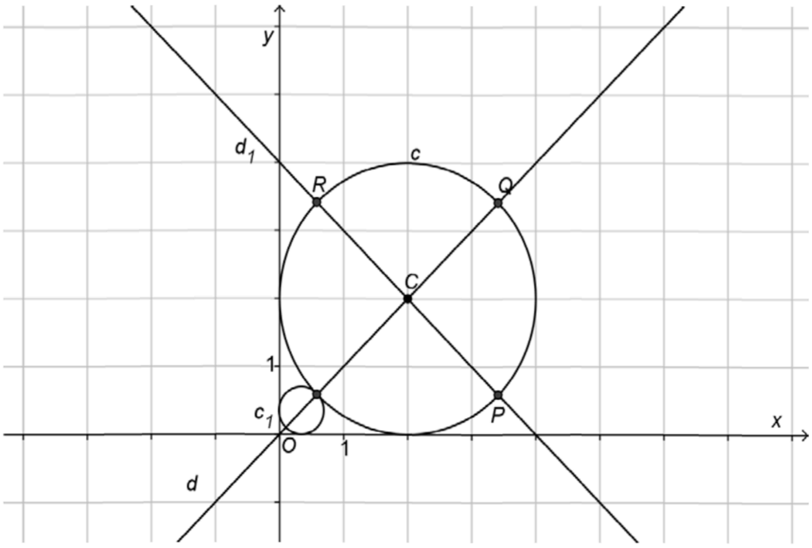


FIGURE 4.1 – Exercice 4.4

2. Calculer la distance entre l'origine O et le point C.
3. Donner l'équation cartésienne de la droite d et celle de la droite d_1, passant par C et perpendiculaire à d.
4. Déterminer l'aire du cerf-volant $OPQR$ après avoir calculé les coordonnées des points P, Q et R.
5. Déterminer les angles que forment les cotés de ce cerf-volant $OPQR$.
6. Déterminer les coordonnées du centre et le rayon du petit cercle c_1, tangent aux axes de références et au cercle c.

Solution

Ex 4.5. (Maturité fédérale - Hiver 2010) On considère le triangle de sommets $A(1;1)$, $B(5;3)$ et $C(3;5)$.

1. Trouver l'équation cartésienne de la droite d qui passe par les points A et C et celle de la droite h passant par B perpendiculairement à d puis déterminer le point I d'intersection des droites d et h ;
2. Trouver les équations des médiatrices m_1 et m_2 des segments AB et AC puis déterminer le point M d'intersection des droites.
3. Donner l'équation du cercle c circonscrit au triangle ABC ;
4. Calculer l'aire de la surface comprise entre le cercle c et le triangle ABC.

Solution

Ex 4.6. (Maturité fédérale - Été 2011)
On considère le triangle ABC de sommets $A(0;20)$, $B(-10;0)$ et $C(12;-4)$. On donne encore une équation de la droite contenant le côté AB : $2x - y + 20 = 0$.

1. Déterminer une équation paramétrique du côté AC.
2. Déterminer une équation cartésienne du côté BC.
3. Montrer que le triangle ABC est isocèle. Calculer ensuite la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

Solution

4.2 SOLUTIONS - Géométrie - Niveau standard

Solution Ex 4.1. $\rightarrow$4.1.

1. Pour déterminer les coordonnées du centre et le rayon du cercle Γ on récrit son équation sous la forme adéquate :
$$(x-1)^2 - 1 + (y+1)^2 - 1 - 18 = 0 \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad (x-1)^2 + (y+1)^2 = 20$$
Le centre est $P_0(1;-1)$ et le rayon $r = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

2. En substituant les coordonnées de A dans Γ on a une égalité, le point A appartient à Γ :
$$\begin{aligned} \Gamma:\ (x-1)^2 + (y+1)^2 = 20 \quad & \xrightarrow{(x;y)=(3;3)} \quad (3-1)^2 + (3+1)^2 = 20 \\ & \xrightarrow{\looparrowright} \quad 20 = 20 \quad \checkmark \quad A \in \Gamma. \end{aligned}$$
En substituant les coordonnées de P_0 dans d on a une égalité, par conséquent le point P_0 appartient à la droite d :
$$d:\ x + y = 0 \quad \xrightarrow{(x;y)=(1;-1)} \quad 1 + (-1) = 0 \quad \checkmark \quad P_0 \in d$$

3. Par simple inspection on voit que les points $A(3;3)$ et $B(-5;3)$ ont la même valeur d'ordonnée. La pente de d_{AB} est nulle. d_{AB} a pour équation $y = 3$. Pour trouver les points d'intersection de d_{AB} et Γ, on résout le système :
$$\begin{cases} y = 3 \\ (x-1)^2 + (y+1)^2 = 20 \end{cases} \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad (x-1)^2 + 16 = 20 \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad x^2 - 2x - 3 = 0$$
L'équation quadratique peut se récrire $(x-3)(x+1) = 0$ ce qui donne les solutions $x = 3$ et $x = -1$. Les points d'intersection sont $A(3;3)$ et $C(-1;3)$.

4. La tangente t à Γ passant par A a le vecteur $\overrightarrow{P_0A}$ pour vecteur normal. Si on se fixe un point $X(x;y)$ appartenant à t alors le produit scalaire
$$\overrightarrow{P_0A} \circ \overrightarrow{AX}$$
doit être nul.
$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_0A} \circ \overrightarrow{AX} = 0 \quad & \xrightarrow{\looparrowright} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} x-3 \\ y-3 \end{bmatrix} = 0 \\ 2(x-3) + 4(y-3) = 0 \quad & \xrightarrow{\looparrowright} \quad x + 2y = 9 \end{aligned}$$
La droite t a pour équation $x + 2y = 9$.

5. Pour trouver l'angle aigu entre les droites d et t on peut calculer la valeur de l'angle θ entre leurs vecteurs normaux $\vec{n}_d$ et $\vec{n}_t$ à l'aide de la définition géométrique du produit scalaire :
$$\cos(\theta) = \frac{\vec{n}_d \circ \vec{n}_t}{\|\vec{n}_d\|\,\|\vec{n}_t\|}$$
Les valeurs numériques sont $\vec{n}_d = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\vec{n}_t = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, donc
$$\cos(\theta) = \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}{\left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\| \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\|} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$
La valeur de θ est $\cos^{-1}\left(\dfrac{3}{\sqrt{10}}\right) \approx 18.5°$.

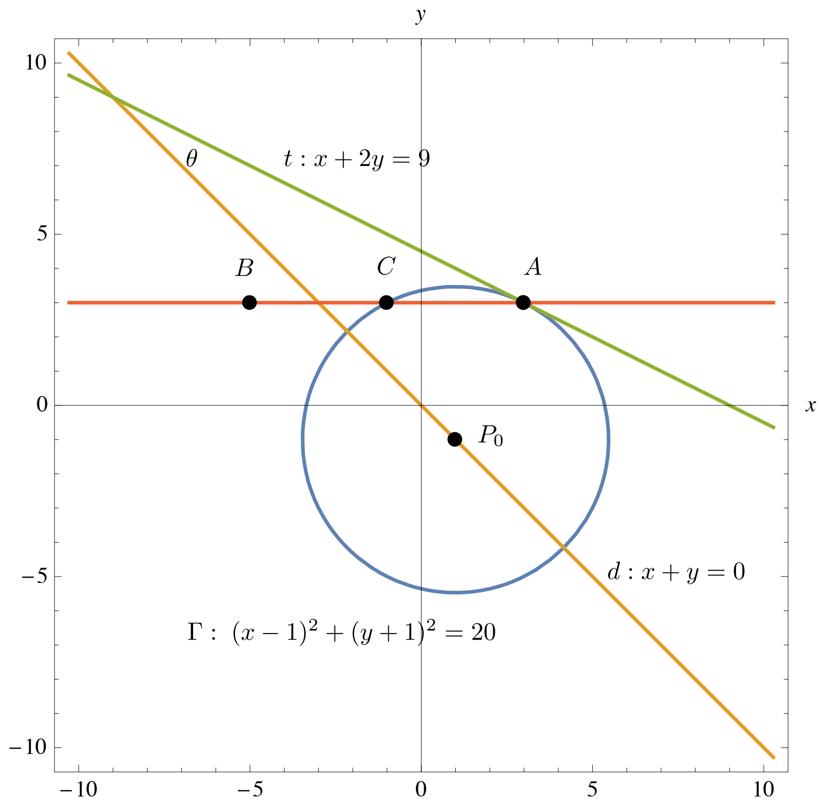


FIGURE 4.2 – Exercice 4.1

(Voir FIGURE 4.2).

Solution Ex 4.2. →4.2.
On commence par récrire l'équation du cercle γ afin de pouvoir connaître son centre et son rayon :

$$x^2 + y^2 + 10y = 0 \quad \longrightarrow \quad x^2 + (y+5)^2 - 25 = 0 \quad \longrightarrow \quad x^2 + (y+5)^2 = 25$$

Le centre P est le point $(0; -5)$ et le rayon est $r = \sqrt{25} = 5$.

1. Le vecteur joignant le centre du cercle P au point A est le vecteur

$$\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP} = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Posons $X(x, y)$ un point quelconque de la droite t recherchée. Le vecteur $\overrightarrow{AX}$ joignant le point A au point X doit être perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{PA}$, donc

$$\overrightarrow{PA} \circ \overrightarrow{AX} = 0$$

En utilisant les coordonnées, cela donne :

$$\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} x+4 \\ y+2 \end{bmatrix} = 0 \quad \longrightarrow \quad -4(x+4) + 3(y+2) = 0 \quad \longrightarrow \quad -4x + 3y = 10$$

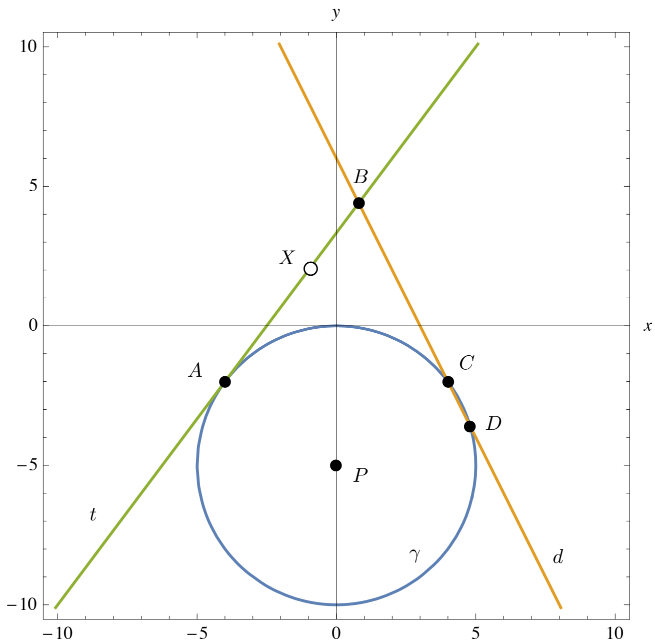


FIGURE 4.3 – Exercice 4.2

La droite t est $t: \ -4x+3y=10$

2. L'intersection $d \cap t$ est la solution du système

$$\begin{cases} 2x+y = 6 \\ -4x+3y = 10 \end{cases} \longrightarrow (x;y) = \left(\frac{4}{5}; \frac{22}{5}\right)$$

Le point B d'intersection des droites t et d est $\left(\frac{4}{5}; \frac{22}{5}\right)$.

3. Les intersections du cercle γ et de la droite d sont les solutions du système :

$$\begin{cases} x^2+y^2+10y = 0 \\ 2x+y = 6 \end{cases}$$

On substitue $y = 6-2x$ dans $x^2+y^2+10y=0$ et on obtient :

$$5x^2-44x+96=0 \longrightarrow x \in \left\{4, \frac{24}{5}\right\}$$

d'où $(y=6-2x)$, $y \in \{-2; -\frac{18}{5}\}$. Les points sont $C(4;-2)$ et $D\left(\frac{24}{5}; -\frac{18}{5}\right)$.

4. On remarque que les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires, de ce fait, le cosinus de l'angle qu'ils forment vaut 1. On peut récrire l'égalité :

$$\left\|\overrightarrow{BA}\right\|^2 = \overrightarrow{BC} \circ \overrightarrow{BD} \quad \Rightarrow \quad \left\|\overrightarrow{BA}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{BC}\right\| \left\|\overrightarrow{BD}\right\|$$

Il suffit de substituer les valeurs adéquates.

5. La distance est donnée par $\left\|\overrightarrow{BP}\right\| - r$. Le vecteur $\overrightarrow{BP}$ est :

$$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{22}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4/5 \\ -47/5 \end{bmatrix}.$$

La norme de $\overrightarrow{BP}$ est

$$\left\|\overrightarrow{BP}\right\| = \sqrt{\left(-\frac{4}{5}\right)^2 + \left(-\frac{47}{5}\right)^2} = \sqrt{89}$$

La distance la plus courte du cercle γ au point B est $\sqrt{89} - 5$.

Solution Ex 4.3. →4.3.

1. On commence par déterminer la distance du point O à la droite d qui sera la longueur des côtés du carré. La distance d'un point $P(p_1, p_2)$ à une droite $g:\ ax + by + c = 0$ est donnée par la formule :

$$\delta(P; g) = \frac{|ap_1 + bp_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Dans le ca,s présent cela se traduit par :

$$\delta(O; d) = \frac{|2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 6|}{\sqrt{4 + 9}} = \frac{6}{\sqrt{13}}$$

Le point A est donné par l'intersection de la droite d avec une droite passant par l'origine ayant comme vecteur directeur le vecteur normal de d qui est $\vec{n} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Cette droite a pour équation $y = \dfrac{3}{2}x \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad 3x - 2y = 0$. L'intersection entre les droites est donnée par

$$\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases} \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad y = \frac{12}{13} \text{ et } x = \frac{18}{13}.$$

Le résultat donne le point $A\left(\frac{12}{13}; \frac{18}{13}\right)$. Le point B est le point situé sur d dans la direction $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ à une distance $\frac{6}{\sqrt{13}}$ de A. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est

$$\overrightarrow{AB} = \frac{6}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} 3/\sqrt{13} \\ -2/\sqrt{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18/13 \\ -12/13 \end{bmatrix}$$

Le vecteur joignant l'origine au point B est le vecteur $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{OB} = \begin{bmatrix} 12/13 \\ 18/13 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 18/13 \\ -12/13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30/13 \\ 6/13 \end{bmatrix}$$

Donc on a le point $B\left(\frac{30}{13}; \frac{6}{13}\right)$.

Le point C est obtenu en additionnant le vecteur $\overrightarrow{AB}$ à l'origine.

$$\overrightarrow{OC} = \begin{bmatrix} 18/13 \\ -12/13 \end{bmatrix}$$

d'où $C\left(\frac{18}{13}; -\frac{12}{13}\right)$.

Le carré est constitué des points

$$O(0;0),\ A\left(\frac{12}{13};\frac{18}{13}\right),\ B\left(\frac{30}{13};\frac{6}{13}\right)\ \text{et}\ C\left(\frac{18}{13};-\frac{12}{13}\right).$$

2. Le cercle c a comme rayon $r=\frac{6}{\sqrt{13}}$ et comme centre $O(0;0)$, son équation est

$$x^2+y^2=\frac{36}{13}$$

3. Le rayon du cercle et le côté du carré ont la même mesure que l'on notera r. L'aire A demandée est :

$$A=r^2-\frac{\pi r^2}{4}=r^2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{36}{13}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\approx 0.5942.$$

(Voir FIGURE 4.4)

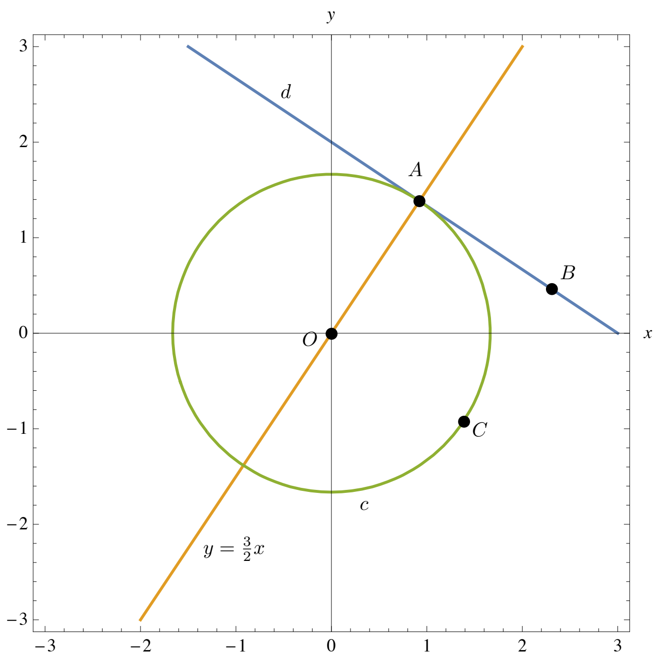


FIGURE 4.4 – Exercice 4.3

Solution Ex 4.4. →4.4.

1. Le centre du cercle c est le point $C(2;2)$ et son rayon vaut $r=2$. Son équation est :

$$c:\ (x-2)^2+(y-2)^2=4$$

2. La distance de O à C est la norme du vecteur $\overrightarrow{OC} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ et vaut $\sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

3. La droite d a pour équation $y = x$ et la droite d_1 qui passe par C et dont la pente est -1 l'équation $y = -x + 4$.

4. Les coordonnées de P et R sont données par l'intersection de d_1 et C :

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ (x-2)^2 + (y-2)^2 = 4 \end{cases} \longrightarrow (2-x)^2 + (x-2)^2 = 4 \longrightarrow 2x^2 - 8x + 4 = 0$$

La dernière équation donne $x = (2 - \sqrt{2})$ et $x = (2 + \sqrt{2})$. En substituant les valeurs de x dans $y = 4 - x$ on obtient les points d'intersection :

$$R(2 - \sqrt{2}; 2 + \sqrt{2})$$
$$P(2 + \sqrt{2}; 2 - \sqrt{2})$$

Le point Q est l'intersection de c et d :

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ (x-2)^2 + (y-2)^2 = 4 \end{cases} \longrightarrow 2(x-2)^2 = 4$$
$$\longrightarrow x = 2 \pm \sqrt{2}$$
$$\longrightarrow y = 2 \pm \sqrt{2}$$

On a $Q(2 + \sqrt{2}; 2 + \sqrt{2})$ et $U(2 - \sqrt{2}; 2 - \sqrt{2})$

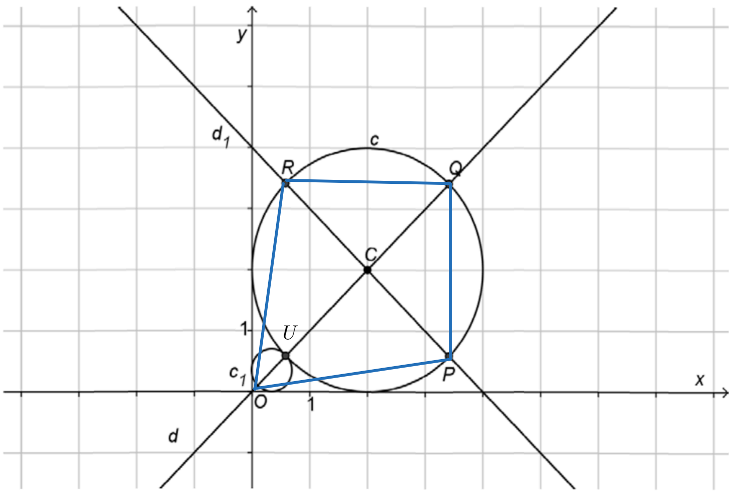


FIGURE 4.5 – Exercice 4.4

5. L'aire du cerf volant est donnée en doublant l'aire du triangle OQR

$$2 \cdot \frac{\left\|\overrightarrow{OQ}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{CR}\right\|}{2} = \sqrt{\left(2+\sqrt{2}\right)^2 + \left(2+\sqrt{2}\right)^2} \cdot 2 = 4(1 + \sqrt{2})$$

L'aire du cerf volant est $4(1 + \sqrt{2})$.

6. On utilise la formule

$$\cos(\theta) = \frac{\overrightarrow{OR} \circ \overrightarrow{OP}}{\left\|\overrightarrow{OR}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{OP}\right\|} = \frac{\begin{bmatrix} 2-\sqrt{2} \\ 2+\sqrt{2} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 2+\sqrt{2} \\ 2-\sqrt{2} \end{bmatrix}}{\left\| \begin{bmatrix} 2-\sqrt{2} \\ 2+\sqrt{2} \end{bmatrix} \right\| \left\| \begin{bmatrix} 2+\sqrt{2} \\ 2-\sqrt{2} \end{bmatrix} \right\|} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

L'angle θ est $\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \approx 70°$.

7. Le diamètre du petit cercle c_1 est $\left\| \begin{bmatrix} 2-\sqrt{2} \\ 2-\sqrt{2} \end{bmatrix} \right\|$ donc son rayon est

$$r = \frac{\left\| \begin{bmatrix} 2-\sqrt{2} \\ 2-\sqrt{2} \end{bmatrix} \right\|}{2} = \sqrt{2} - 1$$

et son centre $\left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}; \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\right) = \left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}; 1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
(Voir graphe de l'exercice à la FIGURE 4.5).

Solution Ex 4.5. $\rightarrow$4.5.
On considère le triangle de sommets $A(1;1)$, $B(5;3)$ et $C(3;5)$.

1. La droite passant par $A(1;1)$ et $C(3;5)$ est solution du sytème suivant (basé sur le fait que les deux points A et C doivent satisfaire la même équation $d:\ y = mx + q$),

$$\begin{cases} m + q = 1 \\ 3m + q = 5 \end{cases} \xrightarrow{\looparrowright} 2m = 4 \xrightarrow{\looparrowright} m = 2 \xrightarrow{\looparrowright} q = -1$$

La droite passant par les points $A(1;1)$ et $C(3;5)$ est la droite $d:\ y = 2x - 1$ dont l'équation cartésienne est

$$d:\ 2x - y - 1 = 0$$

Soit $X(x;y)$ un point de h. Un vecteur normal de h est un vecteur directeur quelconque de d, soit $\vec{n}_h = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ par exemple. Tous les point X de h doivent satisfaire la relation :

$$\overrightarrow{BX} \circ \vec{n}_h = 0 \xrightarrow{\looparrowright} \begin{bmatrix} x-5 \\ y-3 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 0$$

D'où :

$$h:\ x - 5 + 2y - 6 = 0 \xrightarrow{\looparrowright} h:\ x + 2y = 11$$

Le point d'intersection I des droites d et h est l'unique solution du système :

$$\begin{cases} x + 2y = 11 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \xrightarrow{\looparrowright} (x;y) = \left(\frac{13}{5}; \frac{21}{5}\right).$$

$I\left(\frac{13}{5}; \frac{21}{5}\right)$ est le point d'intersection de h et d.

2. Le milieu M_1 du segment AB est $M_1(3;2)$ (“moyenne” des coordonnées de A et de celles de B). Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ joignant A à B sera un vecteur normal de la médiatrice m_1 passant par M_1. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

La droite m_1 est :

$$\overrightarrow{M_1X} \circ \overrightarrow{AB} = 0 \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad \begin{bmatrix} x-3 \\ y-2 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 0 \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad m_1 : \ 2x + y = 8$$

Le milieu M_2 du segment AC est $M_2(2;3)$. Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ joignant les points A et C sera un vecteur normal de la médiatrice m_2 passant par M_2. Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est :

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

La droite m_2 est :

$$\overrightarrow{M_2X} \circ \overrightarrow{AC} = 0 \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad \begin{bmatrix} x-2 \\ y-3 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = 0 \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad m_2 : \ x + 2y = 8$$

Le point d'intersection M est la solution du système :

$$\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 2x + y = 8 \end{cases} \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad (x;y) = M\left(\frac{8}{3}; \frac{8}{3}\right).$$

Le point M est le centre du cercle passant par les points A, B et C. Son rayon est égale à la distance MA par exemple.

$$\delta(M;A) = \left\| \overrightarrow{MA} \right\| = \frac{5\sqrt{2}}{3}$$

L'équation du cercle circonscrit au triangle ABC est :

$$\left(x - \frac{8}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{8}{3}\right)^2 = \frac{50}{9}$$

3. L'aire de la surface comprise entre le cercle c et le triangle ABC vaut

$$\pi r^2 - \frac{\left\|\overrightarrow{AC}\right\| \left\|\overrightarrow{IB}\right\|}{2} = \frac{50\pi}{9} - \frac{5\sqrt{10}}{3}.$$

(Voir FIGURE 4.6).

Solution Ex 4.6. →4.6.
On considère le triangle ABC de sommets $A(0;20)$, $B(-10;0)$ et $C(12;-4)$. On donne encore une équation de la droite contenant le côté AB : $2x - y + 20 = 0$.

1. Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est le vecteur :

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} 12 \\ -24 \end{bmatrix}$$

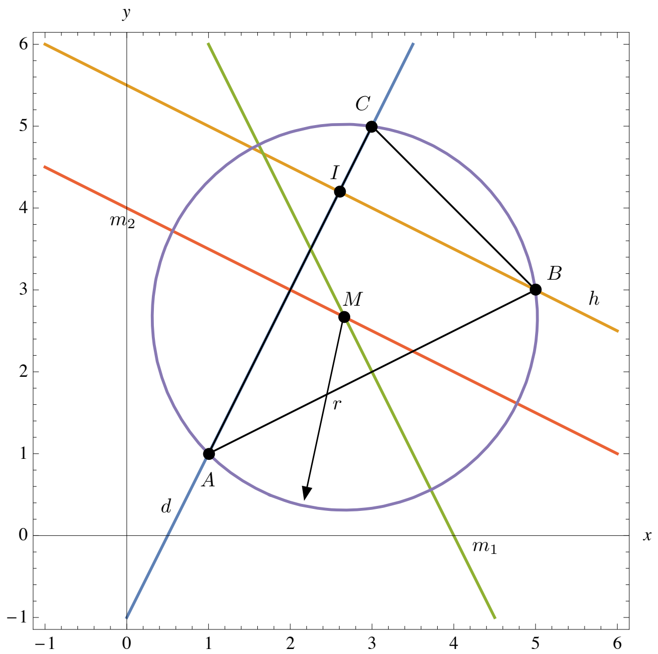


FIGURE 4.6 – Exercice 4.5

L'équation vectorielle du segment $\overline{AC}$ est :

$$\overline{AC}: \ \overrightarrow{OA} + \alpha \cdot \overrightarrow{AC}, \text{ avec } \alpha \in [0;1]$$

L'équation paramétrique du même segment est donc :

$$\overline{AC}: \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \end{bmatrix} + \alpha \cdot \begin{bmatrix} 12 \\ -24 \end{bmatrix}.$$

2. La droite passant par les deux points $B(-10;0)$ et $C(12;-4)$ est :

$$\begin{cases} -10m + q = 0 \\ 12m + q = -4 \end{cases} \quad \xrightarrow{\text{↬}} \quad y = -\frac{2}{11}x - \frac{20}{11} \quad \xrightarrow{\text{↬}} \quad 2x + 11y + 20 = 0$$

La droite contenant le côté BC est $2x + 11y + 20 = 0$.

3. Il suffit de montrer que deux des côtés ont la même norme, on a :

$$\begin{aligned} \left\|\overrightarrow{BA}\right\| &= \sqrt{(10)^2 + (20)^2} = 10\sqrt{5} \\ \left\|\overrightarrow{BC}\right\| &= \sqrt{(22)^2 + (-4)^2} = 10\sqrt{5} \end{aligned}$$

Les côtés BA et BC ont la même longueur, le triangle est isocèle. L'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ est donné par :

$$\cos(\theta) = \frac{\overrightarrow{BA} \circ \overrightarrow{BC}}{\left\|\overrightarrow{BA}\right\| \left\|\overrightarrow{BC}\right\|} = \frac{\begin{pmatrix} 10 & 20 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 22 \\ -4 \end{pmatrix}}{\left(10\sqrt{5}\right)^2} = \frac{7}{25}$$

L'angle θ dont le cosinus est $\frac{7}{25}$ vaut $\theta = 73.73°$.

Chapitre 5

Analyse - Divers

5.1 EXERCICES - Divers - Niveau standard

Ex 5.1. (Maturité fédérale - Été 2008)
Calculer l'aire comprise entre les graphes des fonctions $f(x) = 2$, $g(x) = \ln(x)$ et $h(x) = -2x + 2$.

Solution

Ex 5.2. (Maturité fédérale - Été 2008)
Dans un repère orthonormé on donne les points $A(2;1)$ et $B(3;-5)$.Déterminer par calcul les sommets C et D d'un rectangle $ABCD$ d'aire égale à 74 dont AB est un côté.

Solution

Ex 5.3. (Maturité fédérale - Hiver 2009)
On donne les fonctions f et g dont les graphes sont représentés ci-dessous (FIGURE 5.1) par $f(x) = 2 - \cos(x)$ et $g(x) = -x^2 + c$.

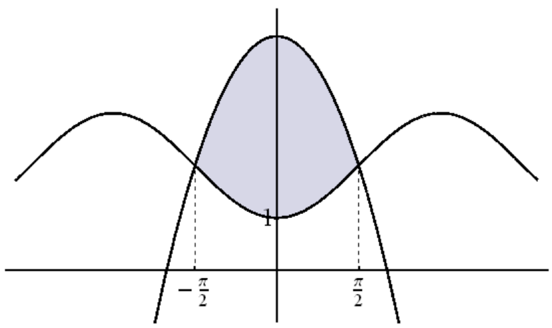


FIGURE 5.1 – Exercice 5.3

1. Déterminer la valeur de c.
2. Calculer l'aire de la surface grisée.

Solution

Ex 5.4. (Maturité fédérale - Hiver 2009) Résoudre les équations et inéquations suivantes.

1. $4x^4 - x^2 < 18$.
2. $\frac{x^3+4}{x+1} = 4$.
3. $x^3 - 5x + 2 = 0$, après avoir vérifié que $x = 2$ est une solution.
4. $2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1 = 0$, ne donner que les solutions comprises dans l'intervalle $[0; 2\pi[$.

Solution

Ex 5.5. (Maturité fédérale - Hiver 2010)

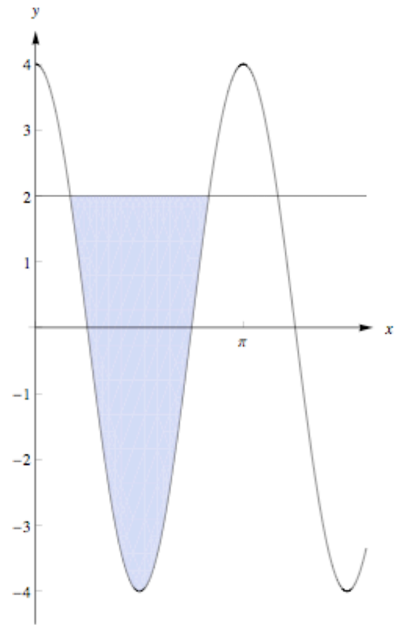


FIGURE 5.2 – Exercice 5.5

1. La fonction f représentée ci-dessus est-elle de la forme $f(x) = a\cos(bx)$ ou $f(x) = a\sin(bx)$? Justifier votre réponse ;
2. Déterminer a et b. Justifier votre réponse ;
3. Calculer l'équation de la droite t, tangente à f au point $(0; f(0))$;
4. Calculer l'aire du domaine hachuré.

Solution

5.2 SOLUTIONS - Divers - Niveau standard

Solution Ex 5.1. →5.1.
La situation est la suivante (FIGURE 5.3). On commence par calculer les abscisses des points I_1, I_2 et I_3 afin

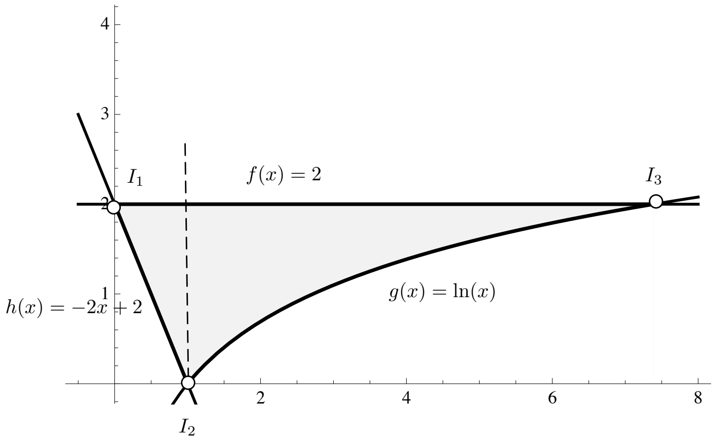


FIGURE 5.3 – Exercice 5.1

de déterminer les bornes d'intégrations.

1. I_1 :
   Le point I_1 est l'intersection des graphes de f et h

$$f(x) = h(x) \quad \longrightarrow \quad 2 = -2x + 2 \quad \longrightarrow \quad x = 0.$$

Le point I_2 est l'intersection des graphes de h et g

$$h(x) = g(x) \quad \longrightarrow \quad -2x + 2 = \ln(x) \quad \longrightarrow \quad x = 1 \quad \text{(déterminé à partir du graphe)}$$

Le point I_3 est l'intersection des graphes de f et g

$$f(x) = g(x) \quad \longrightarrow \quad 2 = \ln(x) \quad \longrightarrow \quad x = e^2.$$

L'aire grisée est la somme de deux intégrales :

$$\int_0^1 [f(x) - h(x)]\,\mathrm{d}x + \int_1^{e^2} [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x \quad = \quad \int_0^1 2x\,\mathrm{d}x + \int_1^{e^2} [2 - \ln(x)]\,\mathrm{d}x \tag{5.1}$$

Remarque 4. *L'intégrale de* $\ln(x)$ *se calcule à l'aide de la formule d'intégration par partie :*

$$\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,\mathrm{d}x$$

Dans l'équation ci-dessus on pose : $f(x) = \ln(x)$, $g'(x) = 1$. *On peut alors écrire :*

$$\begin{aligned} \int \ln(x)\,\mathrm{d}x &= \ln(x) \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= x\ln(x) - \int \mathrm{d}x \\ &= x\ln(x) - x = x(\ln(x) - 1) \end{aligned}$$

En reportant ce résultat dans 5.1, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^1 2x\,\mathrm{d}x + \int_1^{e^2} [2-\ln(x)]\,\mathrm{d}x &= x^2\big|_0^1 + 2x - x(\ln(x)-1)\big|_1^{e^2} \\ &= [1-0] + \left[2e^2 - e^2(2-1) - 2 + 1(\ln(1)-1)\right] \\ &= e^2 - 2\end{aligned}$$

L'aire de la surface grisée est e^2-2.

Solution Ex 5.2. →5.2.

Dans un repère orthonormé on donne les points $A(2;1)$ et $B(3;-5)$.Déterminer par calcul les sommets C et D d'un rectangle $ABCD$ d'aire égale à 74 dont AB est un côté.

On commence par calculer la hauteur du rectangle. Admettons que AB en soit la base. L'aire d'un rectangle est donnée par le produit base-hauteur. Le segment AB peut-être assimilé au vecteur :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix}3\\-5\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\-6\end{bmatrix}$$

La norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et donc la longueur du côté AB du rectangle est $\sqrt{1^2+(-6)^2}=\sqrt{37}$. Les points C et D du rectangle peuvent être obtenus en additionnant un vecteur de longueur $\sqrt{37}$ et de direction perpendiculaire à $\overrightarrow{AB}$ aux points A et B.

Les deux vecteurs normaux unitaires à $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix}1\\-6\end{bmatrix}$ sont :

$$\vec{n}_1 = \sqrt{37}\begin{bmatrix}-6\\-1\end{bmatrix} \text{ et } \vec{n}_2 = \sqrt{37}\begin{bmatrix}6\\1\end{bmatrix}$$

Les vecteurs joignants l'origine aux points C_1 et C_2 sont :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC}_1 = \overrightarrow{OB} + \vec{n}_1 = \begin{bmatrix}3\\-5\end{bmatrix} + \sqrt{37}\begin{bmatrix}-6\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3-6\sqrt{37}\\-5-\sqrt{37}\end{bmatrix}\\ \overrightarrow{OC}_2 = \overrightarrow{OB} + \vec{n}_2 = \begin{bmatrix}3\\-5\end{bmatrix} + \sqrt{37}\begin{bmatrix}6\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3+6\sqrt{37}\\-5+\sqrt{37}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

D'où on déduit les points $C_1 = (3-6\sqrt{37};-5-\sqrt{37})$ et $C_2 = (3+6\sqrt{37};-5+\sqrt{37})$.

Les vecteurs joignants l'origine aux points D_1 et D_2 sont :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD}_1 = \overrightarrow{OA} + \vec{n}_1 = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} + \sqrt{37}\begin{bmatrix}-6\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2-6\sqrt{37}\\1-\sqrt{37}\end{bmatrix}\\ \overrightarrow{OD}_2 = \overrightarrow{OA} + \vec{n}_2 = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} + \sqrt{37}\begin{bmatrix}6\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2+6\sqrt{37}\\1+\sqrt{37}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

D'où on déduit les points $D_1 = (2-6\sqrt{37};1-\sqrt{37})$ et $D_2 = (2+6\sqrt{37};1+\sqrt{37})$. (Voir FIGURE 5.4)

Solution Ex 5.3. →5.3.

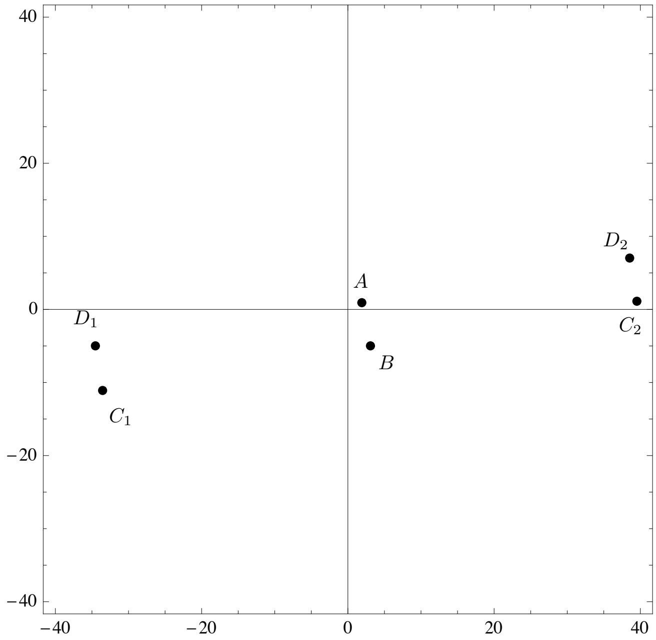


FIGURE 5.4 – Exercice 5.2

1. Pour déterminer la valeur de c dans la fonction g, on utilise le fait que l'abscisse du point d'intersection des fonctions g et f est $x = \frac{\pi}{2}$. On pose :

$$\begin{array}{rcl} f\left(\frac{\pi}{2}\right) = g\left(\frac{\pi}{2}\right) & \xrightarrow{\hookrightarrow} & 2 - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + c \\ & \xrightarrow{\hookrightarrow} & c = 2 - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \\ & \xrightarrow{\hookrightarrow} & c = 2 + \frac{\pi^2}{4} \end{array}$$

La fonction g dessinée est $g(x) = -x^2 + 2 + \frac{\pi^2}{4}$.

2. Le graphe est symétrique, il suffit donc de doubler la valeur le l'intégrale prise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

$$\begin{array}{rcl} \text{aire} & = & 2 \cdot \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) - g(x)]\, \mathrm{d}x \right| \\ & = & 2 \cdot \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[2 - \cos(x) + x^2 - 2 - \frac{\pi^2}{4}\right] \mathrm{d}x \right| \\ & = & 2 \cdot \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[- \cos(x) + x^2 - \frac{\pi^2}{4}\right] \mathrm{d}x \right| \\ & = & 2 \cdot \left| \left(- \sin(x) + \frac{x^3}{3} - \frac{\pi^2 \cdot x}{4} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) \right| \\ & = & 2 \cdot \left| \left(\left[-1 - \frac{\pi^3}{12}\right] - [0] \right) \right| \\ & = & 2 + \frac{\pi^3}{6} \end{array}$$

L'aire grisée vaut $2 + \frac{\pi^3}{6} \approx 7.16$ (voir FIGURE 5.5).

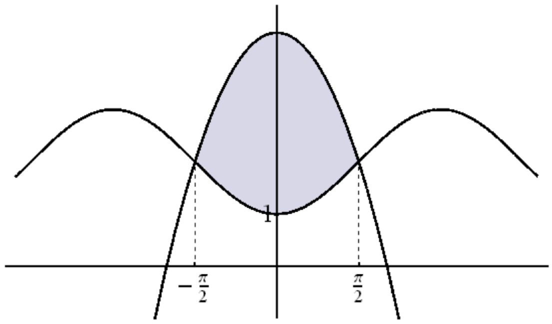


FIGURE 5.5 – Exercice 5.3

Solution Ex 5.4. →5.4.

1. On a :

$$4x^4 - x^2 - 18 < 0 \quad \xrightarrow{\Leftrightarrow} \quad x^4 - \frac{x^4}{4} - \frac{18}{4} < 0$$

   Pour factoriser, on utilise la méthode du début du carré.

$$\begin{aligned} \left(x^2 - \frac{1}{8}\right)^2 - \frac{1}{64} - \frac{18}{4} < 0 \quad & \xrightarrow{\Leftrightarrow} \quad \left(x^2 - \frac{1}{8}\right)^2 - \frac{289}{64} < 0 \\ & \xrightarrow{\Leftrightarrow} \quad \left(x^2 - \frac{1}{8}\right)^2 - \left(\frac{17}{8}\right)^2 < 0 \\ & \xrightarrow{\Leftrightarrow} \quad \left(x^2 - \frac{1}{8} - \frac{17}{8}\right)\left(x^2 - \frac{1}{8} + \frac{17}{8}\right) < 0 \\ & \xrightarrow{\Leftrightarrow} \quad \left(x^2 - \frac{9}{4}\right)(x^2+2) < 0 \\ & \xrightarrow{\Leftrightarrow} \quad \left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right)(x^2+2) < 0 \end{aligned}$$

   À présent on fait un tableau des signes :

x		$-\frac{3}{2}$		$\frac{3}{2}$	
$(x - \frac{3}{2})$	$-$		$-$	0	$+$
$(x + \frac{3}{2})$	$-$	0	$+$		$+$
$(x^2 + 2)$	$+$		$+$		$+$
	$+$	0	$-$	0	$+$

   La solution est $x \in \left]-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right[$

2. On récrit l'égalité :

$$\frac{x^3+4}{x+1} = 4 \quad \xrightarrow{\Leftrightarrow} \quad x^3 + 4 = 4x + 4 \quad \xrightarrow{\Leftrightarrow} \quad x^3 - 4x = 0$$

   On factorise :

$$x(x^2 - 4) = 0 \quad \xrightarrow{\Leftrightarrow} \quad x(x+2)(x-2) = 0 \quad \xrightarrow{\Leftrightarrow} \quad x \in \{-2; 0; 2\}$$

3. On commence par essayer de deviner la première des 3 solutions possibles. Les valeurs candidates sont : $\{-1, 1, -2, 2\}$. On remarque que si l'on remplace x par 2, on a une solution du polynôme. Le facteur $(x-2)$ fera partie de la décomposition. À présent on divise $x^3 - 5x + 2$ par $(x+2)$.

$$\begin{array}{rrrl}
\big(\quad x^3 & & -5x & +2\big) : \big(x-2\big) = x^2 + 2x - 1 \\
\underline{-x^3} & \underline{+2x^2} & & \\
 & 2x^2 & -5x & \\
 & \underline{-2x^2} & \underline{+4x} & \\
 & & -x & +2 \\
 & & \underline{x} & \underline{-2} \\
 & & & 0
\end{array}$$

Donc :

$$x^3 - 5x + 2 = (x-2)(x^2 + 2x + 1) = (x-2)(x+1)^2 = 0$$

Les solutions sont $x \in \{-1; 2\}$.

4. Il s'agit d'une équation trigonométrique que l'on commence par récrire,

$$2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1 = 0 \quad \longrightarrow \quad \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}.$$

Il existe dans le premier tour (entre 0 et 2π), deux angles dont le cosinus est $\frac{1}{2}$, il s'agit de $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{5\pi}{3}$, donc

$$\begin{aligned}
\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\
\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) &= \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)
\end{aligned}$$

Par simple identification (ou encore en prenant $\cos^{-1}$ de chaque côté de l'égalité) on a les deux équations dans $\mathbb{R}$ cette fois :

$$\begin{aligned}
x + \frac{\pi}{4} &= \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \\
x + \frac{\pi}{4} &= \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Finalement on a les deux solutions :

$$\begin{aligned}
x_1 = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \quad &\longrightarrow \quad x_1 = \frac{\pi}{12} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \\
x_2 = \frac{5\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \quad &\longrightarrow \quad x_2 = \frac{17\pi}{12} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Comme on nous demande les solutions dans le premier tour, il y en a deux qui sont :

$$x_1 = \frac{\pi}{12} \text{ et } x_2 = \frac{17\pi}{12}.$$

Solution Ex 5.5. $\rightarrow$5.5.

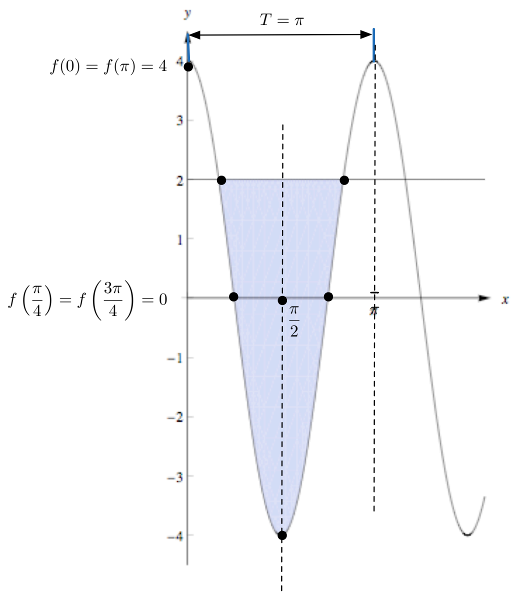


FIGURE 5.6 – Exercice 5.5

1. Les informations que l'on peut déduire de la figure nous permettent de déduire que f est la fonction :

$$f(x) = 4\cos(2x)$$

et que sa période est $T = \pi$.

<u>Démonstration :</u> Soit les deux points $(0;4)$ et $\left(\frac{\pi}{4};0\right)$ (que l'on déduit du graphe de f). Substituons ces valeurs dans les fonctions $f_c(x) = a\cos(bx)$ et $f_s(x) = a\sin(bx)$:

$$\begin{cases} 4 = & b\sin(a \cdot 0) \\ 0 = & b\sin(a \cdot \frac{\pi}{4}) \end{cases}$$

a et b sont différents de zéro, la première des équations est impossible, la solution n'est pas $f_s(x) = a\sin(bx)$.
Substituons à présent les mêmes valeurs dans $f_c(x) = a\cos(bx)$:

$$\begin{cases} 4 = & b\cos(a \cdot 0) \\ 0 = & b\cos(a \cdot \frac{\pi}{4}) \end{cases}$$

De la première équation on déduit $b = 4$ et en substituant cette valeur dans la deuxième équation, on obtient $b = 2$. La fonction f est la fonction f_c, c.à.d

$$f(x) = 4\cos(2x)$$

dont la periode est $T = \pi$ car

$$\cos(2(x+T)) = \cos(2x+2\pi) \quad \Rightarrow \quad 2T = 2\pi \quad \Rightarrow \quad T = \pi.$$

2. La tangente en $(0; f(0))$ a la même pente que $f'(0)$ qui est :

$$f'(x) = -8\sin(2x) \quad \longrightarrow \quad f'(0) = 0$$

La droite est une horizontale passant par 4 sur Oy donc $t : y = 4$.

3. Les bornes d'intégration sont les abscisses des points d'intersection de f et de la fonction $y = 2$.

$$f(x) = 2 \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad 4\cos(2x) = 2 \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad \cos(2x) = \frac{1}{2}$$

On peut écrire :

$$\begin{array}{rcl} \cos(2x) & = & \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \cos(2x) & = & \cos\left(\dfrac{5\pi}{3}\right) \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad x = \dfrac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{array}$$

Les bornes d'intégrations sont $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$.
L'aire grisée est l'aire géométrique donnée par l'intégrale :

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (2 - 4\cos(2x))\,\mathrm{d}x & = & \Big[2x - 2\sin(2x)\Big]\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \\ & = & 2\sqrt{3} + \dfrac{4\pi}{3} \end{array}$$

Chapitre 6

Géométrie dans l'espace

6.1 EXERCICES - Géométrie dans l'espace - Niveau standard

Ex 6.1. (Maturité fédérale - Eté 2009)
Dans le système d'axes $Oxyz$ proposé ci-dessous (FIGURE 6.1) :

1. Représenter, par ses traces, le plan π passant par les points $A(4; 2; 0)$, $B(1; 8; 0)$ et $C(0; 2; 4)$ et en donner une équation.
2. Représenter le point $P(1; 4; 2)$. Ce point est-il situé dans le plan π ? (justifier.)
3. Représenter la "partie visible" de la droite d d'équation

$$d : \begin{cases} x & = 2 + k \\ y & = 2 - 2k \\ z & = 4 \end{cases}$$

4. Montrer que la droite d est parallèle au plan π.

Solution

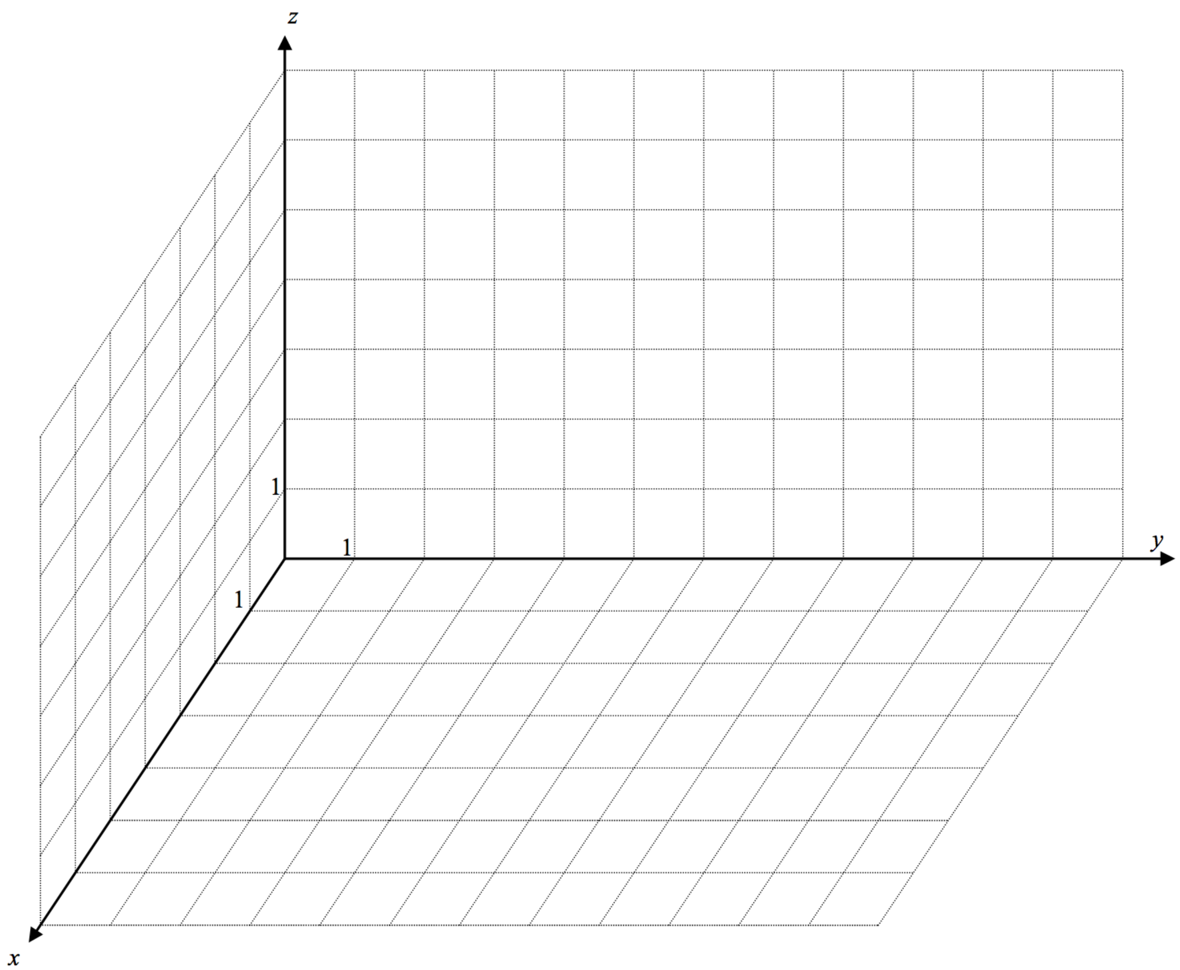


Figure 6.1 – Exercice 6.1

Ex 6.2. (Maturité fédérale - Eté 2010)

1. Déterminer les coordonnées du point C représenté sur la figure.
2. Représenter les points $A(3; 0; 0)$ et $B(0; 5; 0)$.
3. Déterminer une équation paramétrique du plan π formé par les trois points A, B et C.
4. Déterminer les coordonnées du point D de π situé sur l'axe Oz.
5. Représenter le plan π par ses traces.
6. Déterminer une équation paramétrique de la droite g représentée sur la figure et montrer par un calcul que cette droite est parallèle à π.

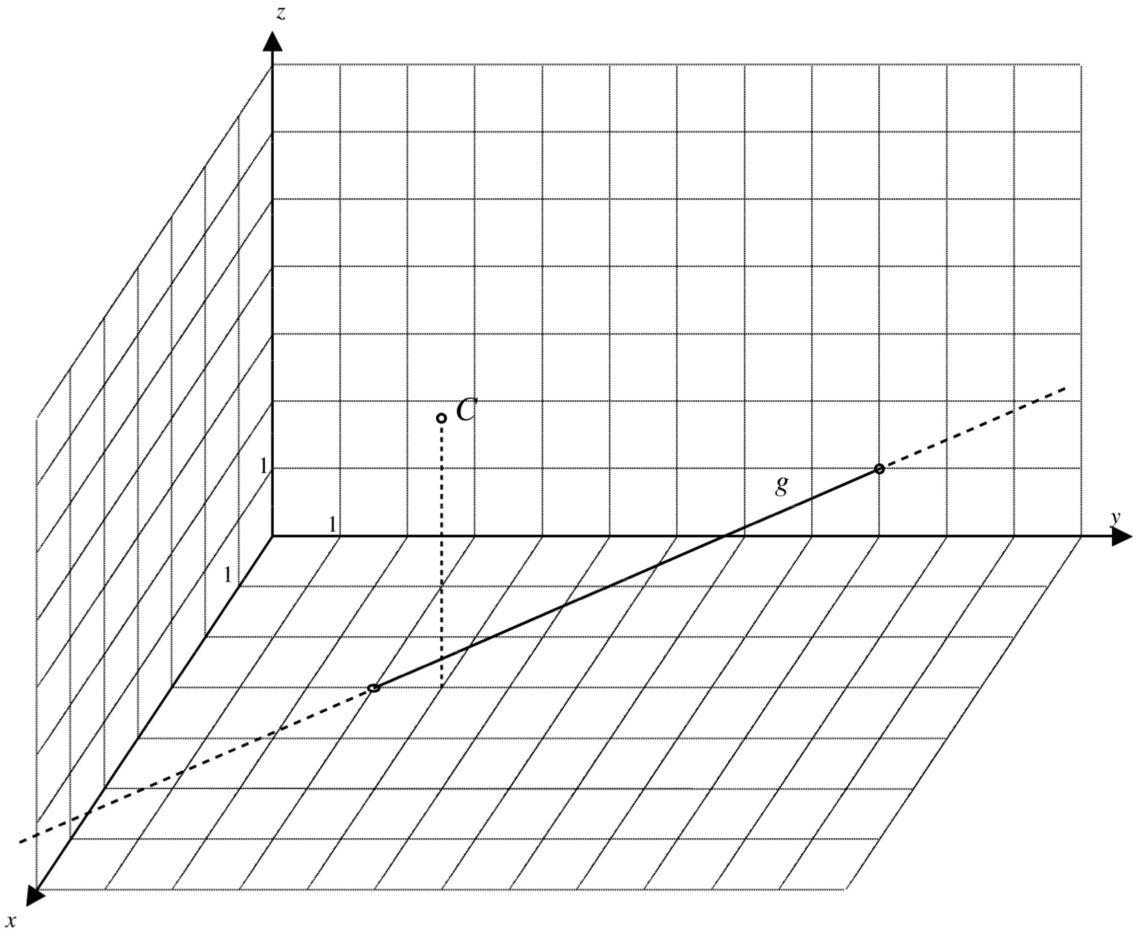


FIGURE 6.2 – Exercice 6.2

Solution

Ex 6.3. (Maturité fédérale - Hiver 2010) On appelle sol le plan contenant les axes Ox et Oy, mur le plan contenant les axes Oy et Oz et paroi le plan contenant les axes Ox et Oz. Le sol, le mur et la paroi sont les plans de références.
La droite d ainsi que les plans αet β (β vertical) sont donnés par le dessin ci-dessous.
La droite d coupe le mur en M et le sol en S.
Le plan α est donné par la représentation de ses traces α' α'' et α''' dans le sol, le mur et la paroi.
Le plan β est donné par la représentation de ses traces β' β'' et β''' dans le sol, le mur et la paroi.

1. Donner des équations paramétriques de la droite d et des plans α et β ;
2. Construire sur le dessin ci-dessous, la droite i, intersection des plans α et β ;
3. Construire sur le dessin ci-dessous, en détaillant la démarche, le point I, intersection de la droite d et du plan α ainsi que le point J, intersection de la droite d et du plan β ;
4. Donner une équation du plan π qui passe par les points $A(4;2;0)$, $B(2;4;0)$ et $C(3;0;2)$, puis construire, sur le dessin ci-dessous, les traces π' π'' et π''' de ce plan ;
5. Colorier en rouge, sur le dessin ci-dessous, la partie de la droite d située sous le sol, mais devant la paroi et devant le mur.

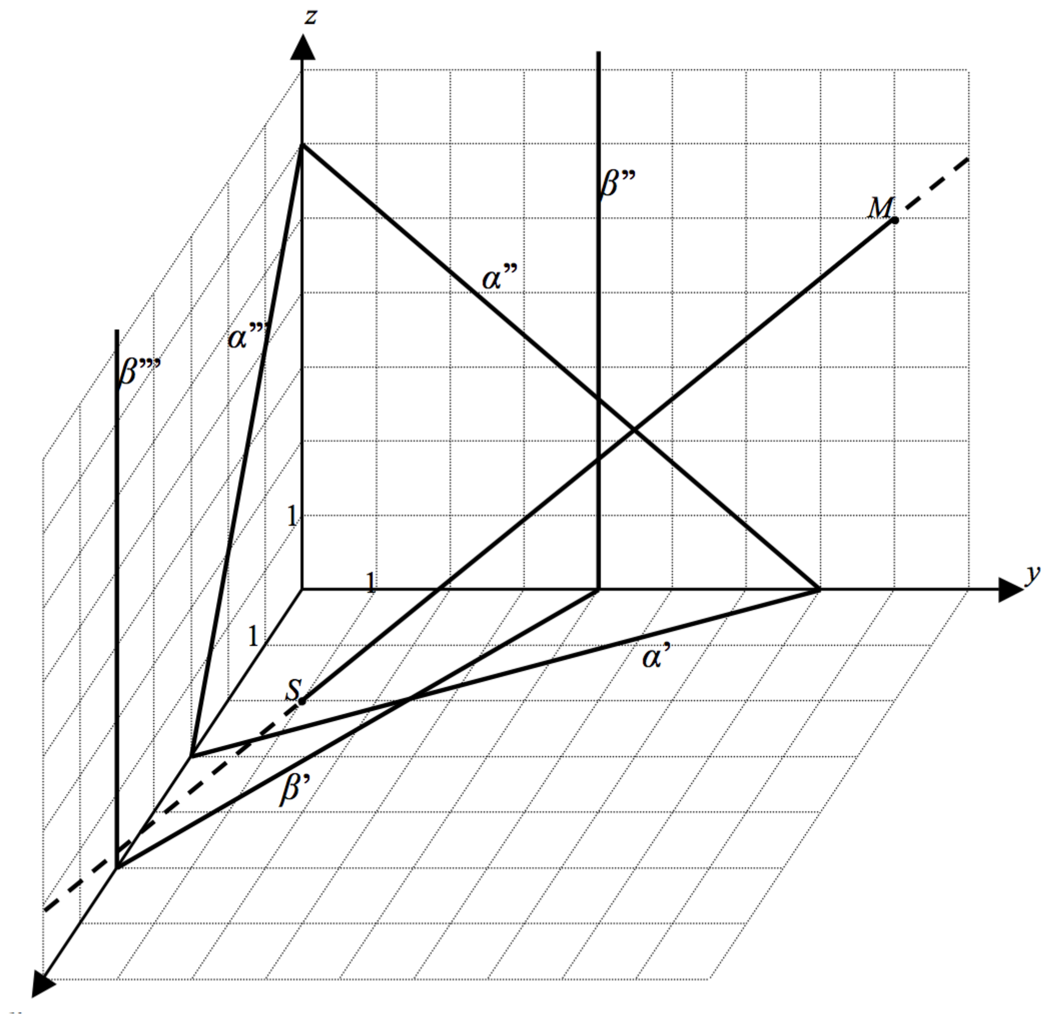


FIGURE 6.3 – Exercice 6.3

Solution

Ex 6.4. (Maturité fédérale - Eté 2011)

1. Représenter la partie visible du plan a donné par 3 points : $A(8;0;0)$ $B(3;5;0)$ $C(0;4;3)$.
2. Déterminer une équation paramétrique de ce plan α.
3. On considère encore le point $D(4;4;6)$. Déterminer une équation paramétrique de la droite OD.
4. Déterminer les coordonnées du point I, intersection de la droite OD et du plan α.
5. Le plan a étant considéré comme opaque, représenter la partie visible de cette droite.
6. Représenter également le plan β d'équation paramétrique

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$$

7. Déterminer une équation paramétrique de la droite d'intersection des plans α et β puis représenter également sa partie visible.

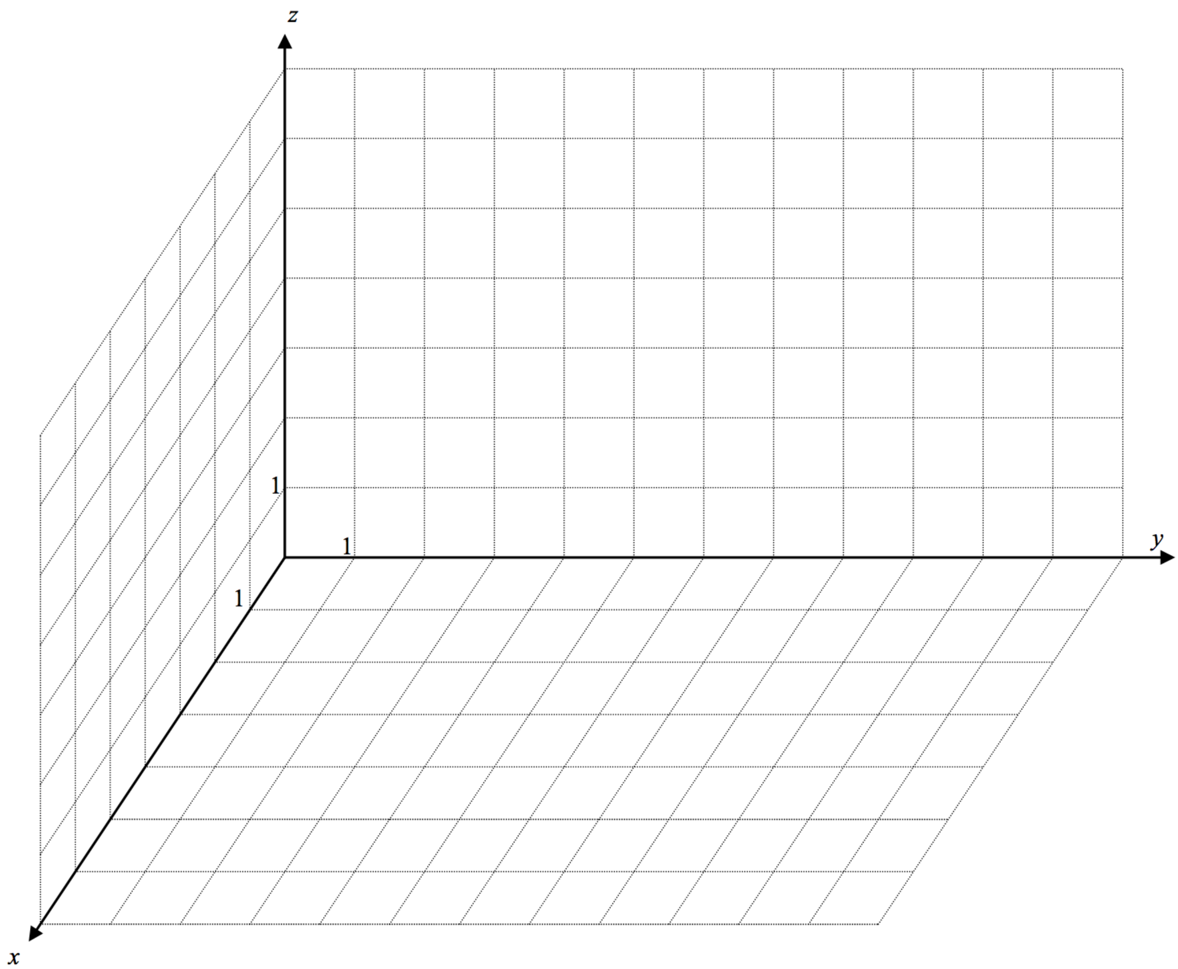


FIGURE 6.4 – Exercice 6.1

Solution

6.2 SOLUTIONS - Géométrie dans l'espace - Niveau standard