Géométrie analytique - Série 1

Enoncés

13/06/2016

Cercles et sphères

Ex. 1

1. Trouver l'équation du cercle contenant les points $A(a;b)$, $B(b;a)$ et $C(-b;-a)$ avec $a \neq b \neq -a$.
2. Trouver l'équation de la sphère passant par les quatres points $A(1;1;-2)$, $B(-3;-1;2)$, $C(1;-1;-2)$ et $D(-1;3;-4)$.

Corrigé Ex. 1

1. Commençons par calculer les vecteurs **AB**, **AC** et **BC**

$$\begin{aligned}
\mathbf{AB} &= \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-a \\ a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(a-b) \\ (a-b) \end{pmatrix} \\
\mathbf{AC} &= \begin{pmatrix} -b \\ -a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(a+b) \\ -(a+b) \end{pmatrix} \\
\mathbf{BC} &= \begin{pmatrix} -b \\ -a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2b \\ -2a \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

   Le produit scalaire des vecteurs **AB** et **AC** est nul, ils sont donc perpendiculaires. On en déduit que les points A, B et C forment un triangle rectangle et que par conséquent le cercle circonscrit à ces trois points est le "cercle de Thalès" dont le centre est situé sur le milieu de l'hypothénuse **BC** qui est le point disons M_{BC} :

$$\mathbf{OM} = \frac{1}{2}(\mathbf{OB} + \mathbf{OC}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Le centre du cercle est à l'origine, son rayon est $r = \sqrt{a^2+b^2}$ et son équation :

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2$$

2. Il existe plusieurs manières différentes :
   (a) **Substitutions des points dans l'équation générale de la sphère**.
   Le centre de la sphère est le point $CS = (c_x; c_y; c_z)$ et son rayon est r :

$$\begin{aligned}
eq_1 &: (1-c_x)^2 + (1-c_y)^2 + (-2-c_z)^2 = r^2 \\
eq_2 &: (-3-c_x)^2 + (-1-c_y)^2 + (2-c_z)^2 = r^2 \\
eq_3 &: (1-c_x)^2 + (-1-c_y)^2 + (-2-c_z)^2 = r^2 \\
eq_4 &: (-1-c_x)^2 + (3-c_y)^2 + (-4-c_z)^2 = r^2
\end{aligned}$$

La résolution du système donne les valeurs :

$$CS = (c_x; c_y; c_z) = (-3; 0; -2); \quad r = \sqrt{17}$$

(b) **Méthodes des plans médians.**
Le plan médian situé entre les point A et B passe par le point $M_{AB} = (-1; 0; 0)$ et sa normale est $\mathbf{n}_{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. L'équation du plan est :

$$\pi_{AB} : -2x - y + 2z = 2$$

Le plan médian situé entre les point A et C passe par le point $M_{AC} = (1; 0; -2)$ et sa normale est $\mathbf{n}_{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$. L'équation du plan est :

$$\pi_{AC} : y = 0$$

Le plan médian situé entre les point A et D passe par le point $M_{AD} = (0; 2; -3)$ et sa normale est $\mathbf{n}_{AD} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$. L'équation du plan est :

$$\pi_{AD} : -x + y - z = 5$$

La résolution du système formé par les 3 plans donne le centre de la sphère :

$$\left\{ \begin{array}{rrrcl} -2x & -y & +2z & = & 2 \\ & +y & & = & 0 \\ -x & +y & -z & = & 5 \end{array} \right. \quad \longrightarrow \quad CS = (x, y, z) = (-3; 0; -2)$$

Le rayon est obtenu en calculant la norme du vecteur joignant C à n'importe lequel des points A, B, C ou D.

$$r = \|\mathbf{CA}\| = \sqrt{4^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{17}$$

L'équation du cercle est : $(x+3)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 17$

Ex. 2

Soit les points $O(0;0)$ et $A(2;-2)$. Déterminer l'ensemble des points $P(x;y)$ qui satisfont :

$$\mathbf{PO} \perp \mathbf{PA}$$

Corrigé Ex. 2

Calculs de **PO** et **PA** :

$$\begin{aligned} \mathbf{PO} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} \\ \mathbf{PA} &= \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-x \\ -2-y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Le produit scalaire de **PO** et **PA** doit être nul :

$$\mathbf{PO} \circ \mathbf{PA} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2-x \\ -2-y \end{pmatrix} = x^2 - 2x + y^2 + 2y = 0$$

En récrivant, on obtient

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2$$

L'ensemble demandé est le cercle de centre $(1;-1)$ et de rayon $r = \sqrt{2}$, ou aussi :

$$P = \left\{ (x;y) \mid (x-1)^2 + (y+1)^2 = 2 \right\}$$

Ex. 3

Trouver le centre et le rayon du cercle formé par l'intersection de la sphère

$$S : (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 25$$

et du plan d'équation $\Gamma : x + y + z = 3$.

Corrigé Ex. 3

On commence par se rappeler que dans $\mathbb{R}^3$ un cercle est donné par l'intersection de deux sphères, égaler S et Γ ne donne rien qui puisse nous aider dans ce cas précis.
Le centre de la sphère est le point $C = (c_1; c_2; c_3) = (1, 2, -3)$ et son rayon est $R = 5$. On commence par vérifier que la sphere et le plan forme une intersection non vide en vérifiant que la distance du centre de la sphère au plan est plus petite que R. La distance est donnée par

$$\delta(S;\Gamma) = \frac{|c_1 + c_2 + c_3 - 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{|-3|}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} < 5.$$

L'intersection existe, c'est un cercle de rayon $r = \sqrt{R^2 - \delta^2}$. Donc $\sqrt{5^2 - \sqrt{3}^2} = \sqrt{22}$.

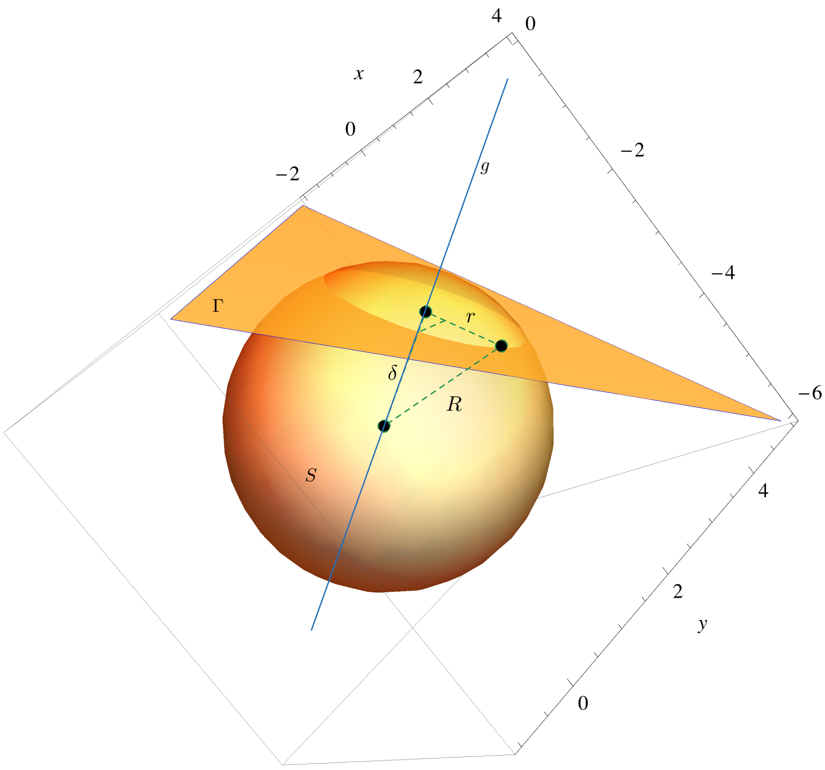

FIGURE 1 – Exercice 3

La droite g passant par le centre de la sphère et perpendiculaire au plan Γ a pour vecteur directeur la normale de ce dernier c'est à dire $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. L'équation paramétrique de g est par conséquent :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad t \in \mathbb{R}.$$

ou encore

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+t \\ 2+t \\ -3+t \end{pmatrix}$$

En substituant les valeurs pour x, y et z dans l'équation du plan on a :

$$x + y + z = 3 \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad (1+t) + (2+t) + (-3+t) = 3 \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad t = 1$$

Le vecteur reliant l'origine au centre du cercle est :

$$\mathbf{C_c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

D'où le point cherché $C_c = (2; 3; -2)$.

Ex. 4

Trouver le centre et le rayon du cercle formé par l'intersection de la sphère

$$S : (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 25$$

et du plan d'équation $\Gamma : x - y + z = -4$.

Corrigé Ex. 4

Le centre de la sphère est le point $C = (c_1; c_2; c_3) = (1, 2, -3)$ et son rayon est $R = 5$. On commence par vérifier que la sphere et le plan forme une intersection non vide en vérifiant que la distance du centre de la sphère au plan est plus petite que R. La distance est donnée par

$$\delta(S;\Gamma) = \frac{|c_1 - c_2 + c_3 + 4|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{|0|}{\sqrt{3}} = 0 < 5.$$

L'intersection existe et la distance nulle entre le plan et le centre de la sphère signifie que celui-ci passe par C. Le rayon du cercle est donc forcément 5 et son centre $(1; 2; -3)$.

Ex. 5

Le point $P = (-2; 1; 5)$ est sur la sphère S_1. Le cercle d'intersection de S_1 avec le plan Γ : $x - 2y + 2z = 2$ est le même que celui de Γ et d'une deuxième sphère S_2 d'équation S_2 : $(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 25$. Trouver l'équation de S_1.

Corrigé Ex. 5

L'idée pour résoudre cet exercice est la suivante (voir FIGURE 2) :
On va trouver un point Q situé sur l'intersection de la sphère S_2 et du plan Γ afin de pouvoir construire le plan médiant Σ entre Q et P. L'intersection du plan Σ et de la droite g nous donnera le centre de la sphère S_1 ce qui nous permettra de calculer son rayon et d'écrire son équation cartésienne.

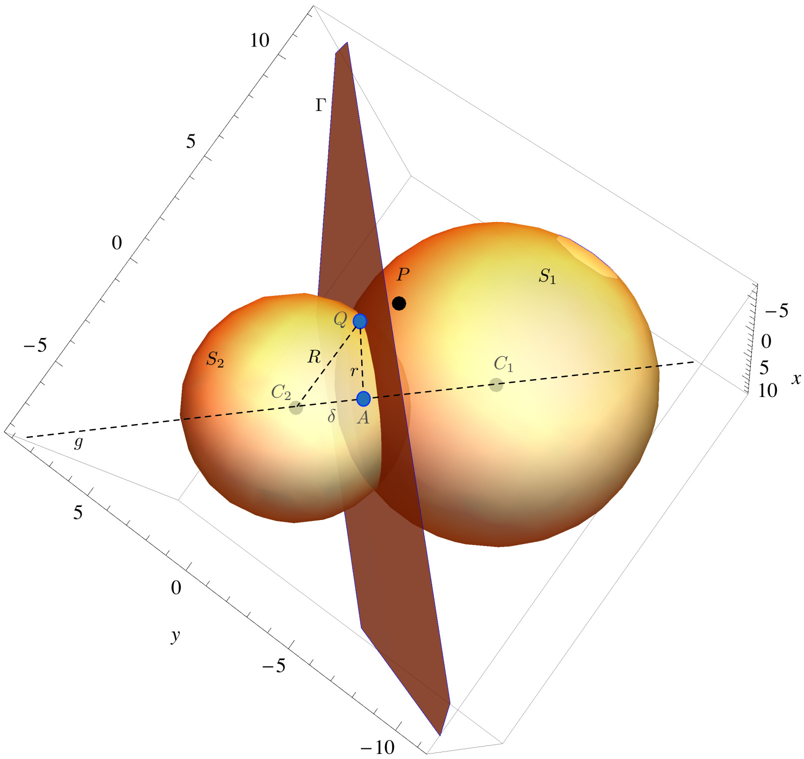

FIGURE 2 – Exercice ??

1. Le rayon et le centre de la sphère S_2 sont :

$$C_2 = (1; 3; -1); \quad R = 5.$$

2. La distance de $C_2 = (c_1; c_2; c_3) = (1; 3; -1)$ au plan $\Gamma : x - 2y + 2z = 2$ est :

$$\delta = \frac{|c_1 - 2c_2 + 2c_3 - 2|}{\sqrt{9}} = \frac{|1 - 2(3) + 2(-1) - 2|}{3} = 3.$$

3. Le rayon du cercle formant l'intersection $S_2 \cap \Gamma$ est donc

$$r = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4.$$

4. La droite g a pour vecteur directeur la normale du plan Γ c.à.d. $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Le vecteur normé $\widehat{\mathbf{n}}$ vaut :

$$\widehat{\mathbf{n}} = \frac{1}{\|\mathbf{n}\|} \cdot \mathbf{n} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad \left(\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = 1 \right)$$

La droite g a pour équation vectorielle,

$$g : \mathbf{OC_2} + t \cdot \mathbf{n} \quad \text{avec} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Donc, la droite g peut s'écrire sous la forme paramétrique :

$$g : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Le centre du cercle d'intersection entre S_2 et Γ est donné par l'intersection de g et $\Gamma : x - 2y + 2z = 2$:

$$g \cap \Gamma : \quad (1+t) - 2(3-2t) + 2(-1+2t) = 2 \quad \longrightarrow \quad t = 1.$$

En substituant $t = 1$ dans l'équation paramétrique de g on obtient le vecteur lieu $\mathbf{OA}$ du point A (centre du cercle).

$$\mathbf{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad A = (2; 1; 1)$$

5. Il s'agit maintenant de déterminer un point $Q(x; y)$ quelconque sur le cercle d'intersection. On va trouver un vecteur perpendiculaire à g de longueur $r = 4$ et l'ajouter vectoriellement au vecteur lieu $\mathbf{OA}$. Cela donnera un point Q sur le cercle d'intersection.

   Le vecteur directeur de la droite g est $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Un vecteur perpendiculaire est par exemple $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Le vecteur normé $\widehat{\mathbf{v}}$ est :

$$\widehat{\mathbf{v}} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

   Si maintenant on additionne les vecteurs $\mathbf{OA}$ et $4 \cdot \mathbf{v}$ on aura un point du cercle d'intersection appartenant également à la sphère S_1.

$$\mathbf{OQ} = \mathbf{OA} + 4 \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 + 2\sqrt{2} \\ 1 + 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad Q = \left(2; 1 + 2\sqrt{2}; 1 + 2\sqrt{2}\right)$$

6. Nous avons à présent les points Q et P qui appartiennent à S_1. Il faut déterminer l'équation du plan médiant ρ à ces deux points. Un vecteur normal du plan sera $\mathbf{p} = \mathbf{OP} - \mathbf{OQ}$ et le point médiant M sera l'extrémité vu vecteur $\mathbf{OM} = \frac{\mathbf{OP}+\mathbf{OQ}}{2}$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{p} &= \mathbf{OP} - \mathbf{OQ} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1+2\sqrt{2} \\ 1+2\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2\sqrt{2} \\ 4-2\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2}-2 \end{pmatrix} \\
\mathbf{OM} &= \frac{\mathbf{OP}+\mathbf{OQ}}{2} = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1+2\sqrt{2} \\ 1+2\sqrt{2} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1+\sqrt{2} \\ 3+\sqrt{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Le plan ρ de vecteur normal $\mathbf{p}$ passant par M est :

$$\begin{aligned}
\rho &: \quad 2x + \sqrt{2}y + (\sqrt{2}-2)z = 2\cdot 0 + \sqrt{2}(1+\sqrt{2}) + (\sqrt{2}-2)(3+\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}-2 \\
\rho &: \quad 2x + \sqrt{2}y + (\sqrt{2}-2)z = 2\sqrt{2}-2.
\end{aligned}$$

Intersection de g et du plan ρ :

$$2(t+1) + \left(\sqrt{2}-2\right)(2t-1) + \sqrt{2}(3-2t) = 2\sqrt{2}-2 \quad \longrightarrow \quad t = 3$$

En substituant $t = 3$ dans g on obtient le centre de la sphère S_1 :

$$g : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + 3\cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad C_1 = (4; -3; 5)$$

Le rayon est obtenu en calculant la distance séparant C_1 de P.

$$r = \sqrt{(-6)^2 + (-4)^2 + (0)^2} = \sqrt{52}$$

Finalement l'équation de S_1 est :

$$(x-4)^2 + (y+3)^2 + (z-5)^2 = 52$$

On peut remarque que le point C_2 est le sommet du cône ayant le cercle d'intersection pour base. L'équation de ce cône est donnée en utilisant la formule du produit scalaire. Le cosinus de l'angle θ entre les vecteurs $\mathbf{C_2Q}$ et $\mathbf{C_2A}$ est :

$$\cos(\theta) = \frac{4}{5}.$$

Le cercle d'intersection est le lieu géométrique des points décrits par la relation :

$$\cos(\theta) = \frac{\mathbf{C_2Q} \circ \mathbf{C_2A}}{\|\mathbf{C_2Q}\|\,\|\mathbf{C_2A}\|} = \frac{\begin{pmatrix} x-1 \\ y-3 \\ z+1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2}\sqrt{5}}$$

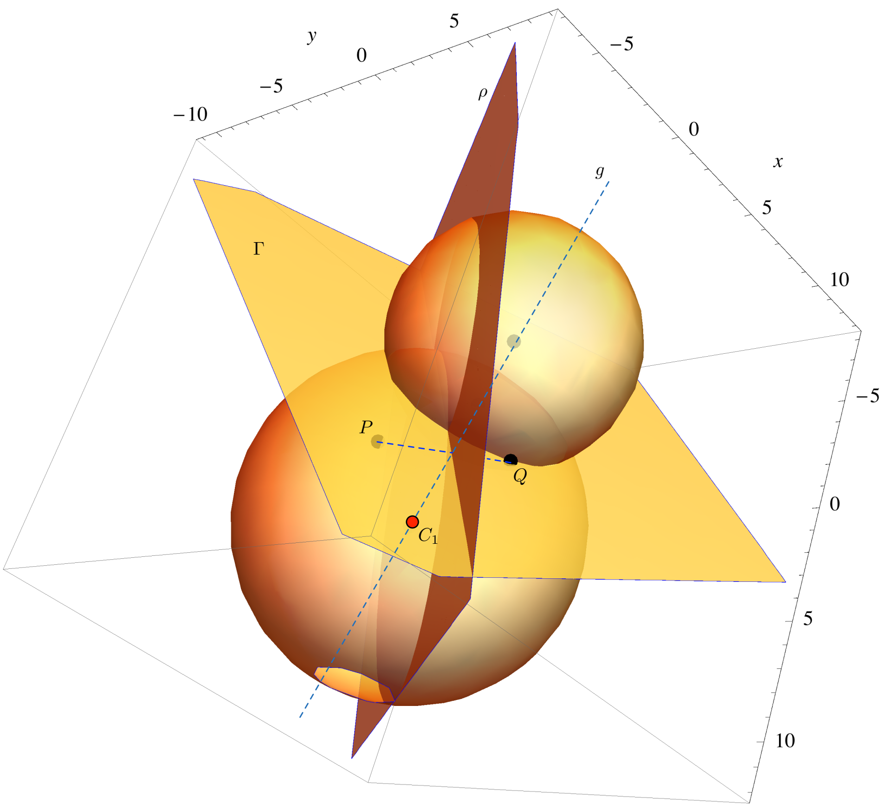

FIGURE 3 – Exercice 5