Théorie et exercices III

Analyse 2

Optimisation - Primitives et intégrales
Nombres complexes*

Michel Semon

02/02/2023

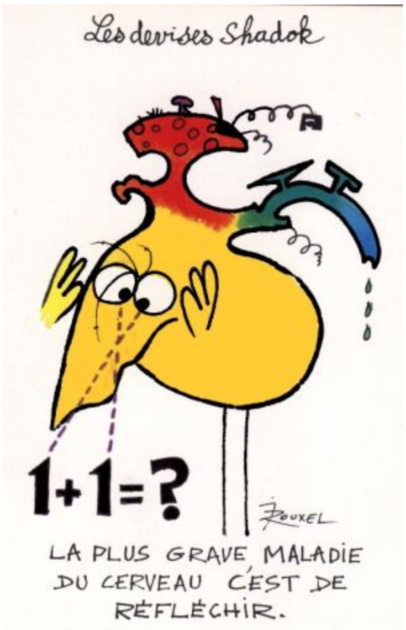


Table des matières

Index

Première partie

Optimisation - Primtives et intégrales - Nombres complexes*

Chapitre 1

Présentation

1.1 Optimisation

Le premier chapitre de cette brochure intitulée **Analyse 2** commence par traiter un des “gros” sujet d’examens qui peut compter à hauteur de 15-20% de la note finale. Chaque année il y a un problème d’optimisation. Ces problèmes incorporent souvent une résolution et une dérivation de fonctions trigonométriques, donc la trigonométrie peut très bien faire partie de l’examen sous forme un peu cachée.

1.2 Primitives et intégrales

En anglais, primitive se dit “antiderivative”. Ce terme traduit beaucoup mieux l’opération.

1.3 Nombres complexes

Les nombres complexes ne sont traités que dans les classes de niveau renforcé.

Chapitre 2

Optimisation (application de la dérivée)

2.1 Introduction

Les problèmes d'optimisation vus dans cette section sont, en général, des problèmes de deux variables à une seule contrainte. La résolution se fait par substitution d'une des deux variable, puis par recherche des extrema de la fonction à optimiser. La méthode des multiplicateurs de Lagrange n'est pas utilisée dans le programme de maturité, mais j'en donne quelques exemples pour ceux que ça intéresse.

2.2 Théorie

Les problèmes d'optimisation se traduisent par un système de deux équations à deux inconnues dont l'une est la contrainte et l'autre la fonction à optimiser. La contrainte est une relation simple entre les deux variables. Le système est de la forme :

$$\begin{cases} f(x,y) & = & \text{constante} \\ g(x,y) & & \end{cases}$$

où f est la contrainte et g la fonction à optimiser. On commence par isoler x ou y dans l'équation de contrainte et on substitue l'expression obtenue dans g. On prend la dérivée de g et on l'égale à zéro. La résolution de cette équation nous donnera les valeurs extrêmes sur l'intervalle de définition de la fonction g qu'on aura pris soin de définir auparavant. À mon avis, il n'est pas absolument nécessaire d'appliquer une marche à suivre bien définie. Chaque problème est différent et il vaut mieux utiliser son bon sens pour déterminer les étapes de résolution. Il est cependant important de ne pas oublier deux points essentiels, il faut absolument déterminer le domaine de validité des variables ainsi que de s'assurer que l'optimum obtenu est bien un maximum ou un minimum selon ce qu'exige l'énoncé du problème. On appellera *points critiques* les valeurs de x qui sont les valeurs d'abscisse des extrema et des bornes de l'intervalle de définition de la variable par rapport à laquelle on dérive.

2.2.1 Où se cachent les extremums

Soit une fonction $f : E \to F$ et I un intervalle où la fonction est continue et dérivable en tout point. Dans ce cas les valeurs maximums et minimums de la fonction sont localisées aux points où la dérivée s'annule ou sur les bornes de l'intervalle.

2.3 EXERCICES - Optimisation

Ex 2.1. Trouver la valeur maximum du produit de deux nombres x et y dont la somme $x + y$ est de 10.

Solution

Ex 2.2. Une entreprise souhaite fabriquer une boîte rectangulaire de base carrée de 128 cm3 de volume. Le fond et le couvercle lui reviendront à 4 centimes le cm2, les faces latérales à 2 centimes le cm2. Déterminer les dimensions de la boîte pour que le coût de revient soit minimal.

Solution

Ex 2.3. Soit un cône de rayon R et de hauteur H. À l'intérieur de celui-ci, on désire insérer un autre cône renversé de rayon r et de hauteur h. Quelle est la valeur de r qui maximise le volume du cône intérieur ? (Voir FIGURE 2.1)

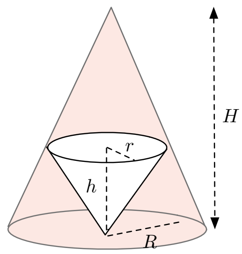


FIGURE 2.1 – Exercice 2.3

Solution

Ex 2.4. On fabrique un cornet de forme conique en rejoignant les bords rectilignes d'un secteur circulaire de rayon r. Quel est le volume du plus grand cornet possible ? (FIGURE 2.2).

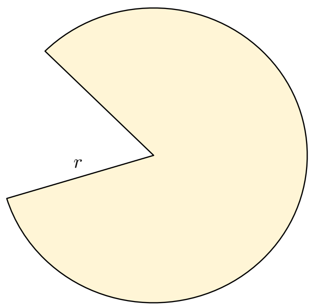


FIGURE 2.2 – Exercice 2.4

Solution

Ex 2.5. On considère le triangle $A(3; 0)$, $B(-3; 0)$ et $C(0; 6)$. On inscrit dans ce triangle un rectangle $PQRS$ dont le côté PQ s'appuie sur AB. Déterminer pour quelle abscisse le rectangle ainsi construit a une aire maximale. (FIGURE 2.3).

Solution

Ex 2.6. On considère une famille de droites de pente négative passant par le point $P(3; 2)$. Pour quelle droite de la famille le triangle délimité par la droite et les axes de coordonnées a-t-il la plus petite aire ? (FIGURE 2.4).

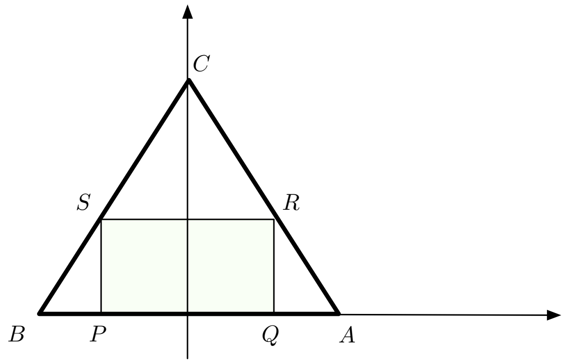


FIGURE 2.3 – Exercice 2.5

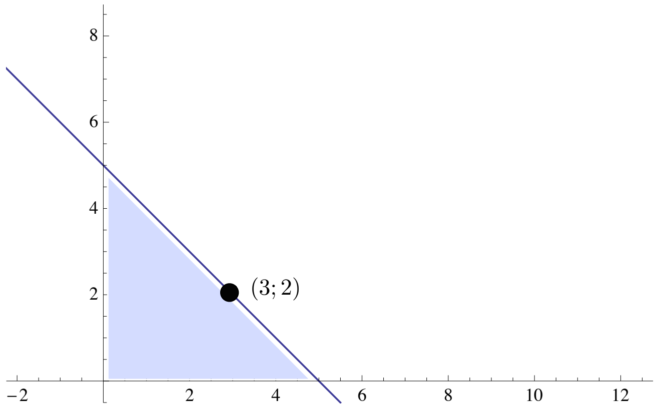


FIGURE 2.4 – Exercice 2.6

Solution

Ex 2.7. Trouver les points de la courbe $y = x^2 - 9$ dont la distance à l'origine est minimale.

Solution

Ex 2.8. Deux couloirs de 1m et 2m de largeur se rencontrent à angle droit. On transporte une barre rigide parallèlement au sol. Quelle est la longueur maximale que peut avoir cette barre si on veut pouvoir la transporter d'un couloir à l'autre.

Solution

Ex 2.9. Soit la fonction f donnée par

$$f(x) = x^2 + kx + k^2 \quad \text{où } k \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que la fonction f est positive quelle que soit la valeur de k.
2. Exprimer en fonction du paramètre k l'aire du domaine limité par le graphe de f, les axes et la droite $x = 1$.
3. Trouver la valeur de k pour laquelle l'aire calculée précédemment est minimum.

Solution

Ex 2.10. Soit un cercle de rayon r donné. Quelles doivent être les dimensions d'un rectangle inscrit dans ce cercle de manière à avoir l'aire la plus grande possible.

Solution

Ex 2.11.

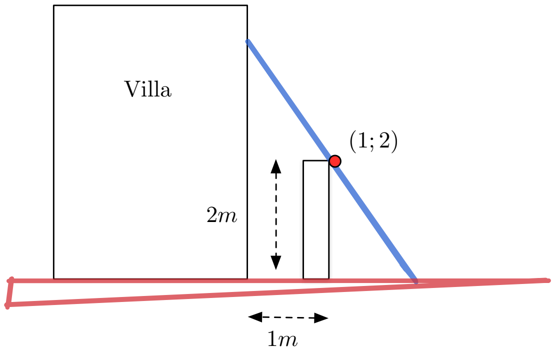


FIGURE 2.5 – Exercice 2.11

Une villa est entourée d'un mur de 2 mètres de haut, de 20 cm d'épaisseur et, à l'endroit qui nous intéresse, distant de 80 cm de la villa. (Voir FIGURE 2.5). Quelle doit être la longueur minimum de l'échelle d'un voleur si celle-ci doit toucher le sol, le mur et la paroi de la villa simultanément.

Solution

Ex 2.12. Soit un rectangle de périmètre 1. On fait tourner le rectangle autour d'un de ses axes de symétrie. De quelle manière faut-il choisir la hauteur et la largeur du rectangle de manière à

1. maximiser le volume,
2. maximiser sa surface latérale,
3. maximiser sa surface totale.

Solution

Ex 2.13. Pour quelle point P, la valeur de l'aire grisée de la FIGURE (2.6), est-elle maximum ? $0 \leq x \leq 2$?

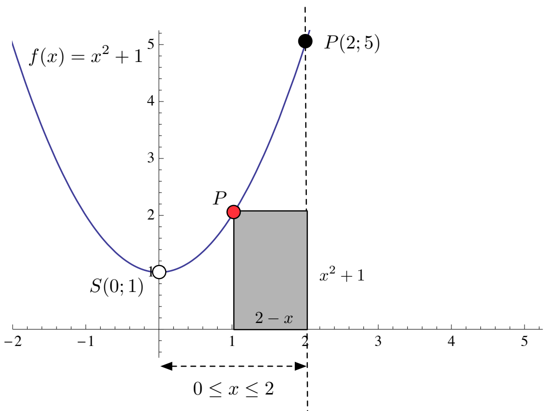


FIGURE 2.6 – Exercice 2.13

Solution

Ex 2.14. Le dessin ci-dessous (FIGURE 2.7) représente un étang circulaire de rayon r. Une personne veut se rendre le plus vite possible du point A au point B. En barque elle avance à une vitesse v et elle peut marcher autour de l'étang à une vitesse $2 \cdot v$. Quel est l'angle α qui minimise la durée du trajet ?

Solution

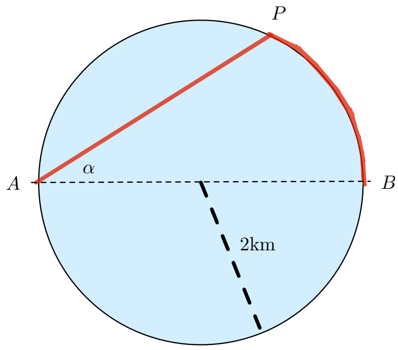


FIGURE 2.7 – Exercice 2.14

Ex 2.15. On coupe en deux une ficelle de 1 mètre de long afin de former un carré et un triangle équilatéral. De quelle manière faut-il couper la ficelle de manière à ce que la somme des aires du triangle et du carré soit maximale ?

Solution

2.4 SOLUTIONS - Exercices d'optimisation

Solution Ex 2.1. →2.1.
La contrainte sur les variables x et y est ici $x + y = 10$. On veut absolument que la somme de x et y soit égale à 10. Sous cette condition on veut trouver les valeurs de x et y de manière à ce que le produit $x \cdot y$ soit maximum.
On a le système :

$$\left[\begin{array}{rcr} x + y & = & 10 \\ g(x,y) & = & x \cdot y \end{array}\right.$$

1. On commence par chercher le domaine de définition de x et y. Comme la somme des deux variables est 10, chaque variable appartient à l'intervalle $[0; 10]$.

$$D_f(x): \quad x \in [0, 10] \quad \text{ou encore} \quad 0 \leq x \leq 10$$

$$D_f(y): \quad y \in [0, 10] \quad \text{ou encore} \quad 0 \leq y \leq 10$$

2. De $x + y = 10$, on tire $y = 10 - x$ que l'on substitue dans $g(x, y)$. On obtient une nouvelle fonction h qui ne dépend plus que de x.

$$h(x) = x(10 - x) = -x^2 + 10x.$$

   Le fait de passer de $g(x, y)$ à $h(x)$ nous permet de dériver par rapport à la seule variable x. La valeur de $h(x)$ reste la même que celle de $g(x, y)$ et donne également le produit des deux variables, mais en fonction de x uniquement.

3. La dérivée de h est

$$h'(x) = -2x + 10.$$

   En résolvant $h'(x) = 0$ on obtient $x = 5$ et en substituant dans $y = 10 - x$, on a $y = 5$ également.

4. Il faut à présent se demander si l'on a bien à faire à un maximum. Il ne faut pas oublier qu'une valeur nulle pour une dérivée peut également être un minimum ou un "replat". Dans le cas présent, on remarquera que la fonction $h(x)$ est une parabole concave (signe moins devant x^2) qui ne peut donc avoir qu'un maximum.
   Une autre manière de procéder est de faire une étude de la croissance de $h(x)$ en étudiant $h'(x)$.
   Les points critiques sont $\{0, 5, 10\}$.

x	0		5		10
$h'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$h(x)$	0	$\nearrow$	25	$\searrow$	0

Le produit maximum est donc $h(5) = g(5, 5) = 25$. Les valeurs obtenues pour x et y appartiennent aux domaines de définition. Le résultat est tout à fait prévisible, car la contrainte tout comme la fonction à optimiser montrent une symétrie parfaite.

Solution Ex 2.2. →2.2.
Désignons les côtés de la base carrée de la boîte par x et sa hauteur par h. La contrainte, autrement dit le volume fixé de $128cm^3$, est donnée par l'équation

$$V(x,h) = x^2 \cdot h = 128$$

d'où l'on tire $h = \frac{128}{x^2}$. Le domaine de définition de h est $0 < h < \infty$ et par conséquent celui de x (forcément positif) sera

$$0 < h < \infty \quad \Leftrightarrow \quad 0 < \frac{128}{x^2} < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \infty > \frac{x^2}{128} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < x < \infty$$

Deux points critiques seront 0 et ∞.

Le prix de la boîte est donné par la fonction

$$P(x,h) = 2x^2 \cdot 4 + 4xh \cdot 2 = 8x^2 + 8xh$$

En substituant $h = \frac{128}{x^2}$ on obtient la fonction à optimiser ne dépendant que d'une seule variable, x en l'occurrence.

$$P(x) = 8x^2 + 8x \cdot \frac{128}{x^2} = \frac{8\left(x^3 + 128\right)}{x}.$$

On dérive puis on égale la dérivée à zéro pour trouver le(s) extrema :

$$P'(x) = \frac{16\left(x^3 - 64\right)}{x^2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = 4$$

On obtient la valeur $x = 4$ et donc $h = \frac{128}{16} = 8$. Les points critiques sont $[0, 4, \infty]$. Le tableau suivant nous permet de confirmer que la valeur $x = 4$ minimise le prix de la boîte.

x	0		4		∞
$P'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$P(x)$	∞	$\searrow$	384	$\nearrow$	∞

Solution Ex 2.3. →2.3
En appliquant le théorème de Thales aux deux triangles semblables ABC et ADE (voir FIGURE 2.8) on obtient les rapports

$$\frac{r}{H-h} = \frac{R}{H} \qquad \text{d'où} \qquad h = H - \frac{Hr}{R}.$$

Les extrémités du domaine de définition de la variable h sont 0 et H (on trouve ces valeurs en observant le

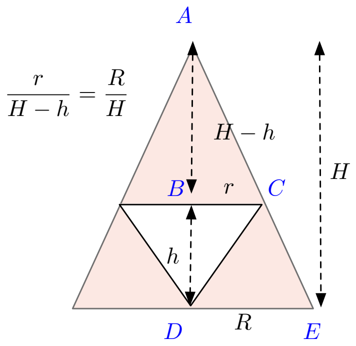


FIGURE 2.8 – Exercice 2.3

dessin). Pour la variable r, on a $0 \leq r \leq R$, en effet

$$0 \leq h \leq H \quad \Rightarrow \quad 0 \leq H - \frac{Hr}{R} \leq H \quad \Rightarrow \quad 0 \leq 1 - \frac{r}{R} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad 1 \leq -\frac{r}{R} \leq 0 \quad \Rightarrow \quad R \leq -r \leq 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq r \leq R$$

Le volume du cône intérieur est donné par $V(r,h) = \frac{\pi r^2 h}{3}$, en y substituant $h = H - \frac{Hr}{R}$ on obtient le volume en fonction du seul rayon r,

$$V(r) = \frac{\pi r^2 \left(H - \frac{Hr}{R}\right)}{3} = \frac{\pi H r^2 (R-r)}{3R}.$$

La dérivée est

$$V'(r) = \frac{\pi H r(2R-3r)}{3R}$$

La solution de $V'(r) = 0$ est

$$V'(r) = \frac{\pi H r(2R-3r)}{3R} = 0 \quad \Longrightarrow \quad r \in \left\{0, \frac{2}{3}R\right\}$$

Les points critiques sont donc 0, $\frac{2}{3}R$ et R. Le tableau suivant nous permet de vérifier que la valeur $r = \frac{2}{3}R$ est un maximum.

r	0		$\frac{2}{3}R$		R
$V'(r)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$V(r)$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{81}\pi H R^2$	$\searrow$	0

Solution Ex 2.4. →2.4.
La génératrice r du cône a une valeur fixée, h et R sont les variables du problème. Leurs domaines de

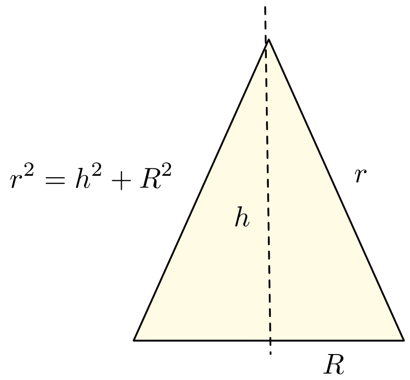


FIGURE 2.9 – Exercice 2.4

définition sont

$$\begin{aligned} h &\in [0; r] \\ R &\in [0; \sqrt{r^2 - h^2}] \end{aligned}$$

La contrainte du problème peut être déduite de la FIGURE 2.9 et est

$$r^2 = h^2 + R^2 \quad \longrightarrow \quad R^2 = r^2 - h^2;$$

Le volume du cône est donné par

$$V(R; h) = \frac{\pi R^2 h}{3}$$

En substituant $R^2 = r^2 - h^2$ dans $V(R; h) = \frac{\pi R^2 h}{3}$ on obtient le volume en fonction de la seule variable h,

$$V(h) = \frac{\pi(r^2 - h^2)h}{3} = \frac{\pi}{3}(r^2 h - h^3)$$

Afin de pouvoir déterminer la volume maximum, on dérive la formule du volume $V(h)$ par rapport à h et on égale la fonction dérivée obtenue à zéro.

$$V'(h) = \frac{\pi}{3}(r^2 - 3h^2) = 0 \quad \longrightarrow \quad (r^2 - 3h^2) = 0 \quad \longrightarrow \quad h = \frac{r}{\sqrt{3}}.$$

La valeur qui optimise le volume est dans le domaine de définition. Il reste à prouver que pour $h = \frac{r}{\sqrt{3}}$ la valeur de V est un maximum. Pour ce faire on regarde le signe de la dérivée seconde en $h = \frac{r}{\sqrt{3}}$. La dérivée seconde de $V(h)$ est

$$V''(h) = \left(\frac{\pi}{3}(r^2 - 3h^2)\right)' = -2\pi h \quad \longrightarrow \quad f''(\frac{r}{\sqrt{3}}) = -\frac{2\pi r}{\sqrt{3}} < 0$$

La dérivée seconde est négative pour $h = \frac{r}{\sqrt{3}}$ par conséquent la fonction est concave en ce point et donc il s'agit d'un maximum. (Voir FIGURE 2.9).
La valeur du maximum est

$$V_{\max} = V(\frac{r}{\sqrt{3}}) = \frac{2\pi r^3}{9\sqrt{3}}.$$

L'angle du secteur circulaire peut être calculé en faisant le rapport entre la circonférence de la base du cône

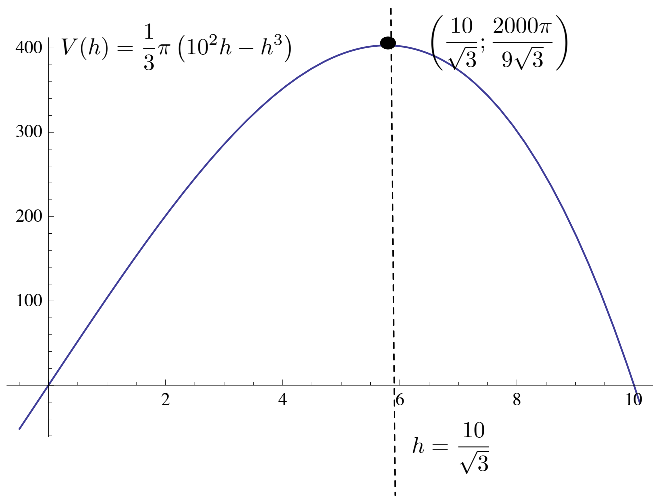


FIGURE 2.10 – Exercice 2.4 Graphe de $V(h)$ pour $r = 10$.

avec la circonférence du développé du cône.

$$R = \sqrt{r^2 - h^2} = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}r$$

Le rapport est

$$\frac{2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}r}{2\pi r} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

En multipliant par 360° on obtient un angle de $\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot 360$ =294°. L'allure d'un secteur circulaire donnant le volume maximum est (voir FIGURE 2.11).

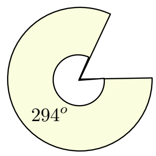


FIGURE 2.11 – Exercice 2.4

Solution Ex 2.5. $\rightarrow$2.5.
L'équation de la droite $f(x) = mx + q$ passant par les points $A = (3; 0)$ et $C = (0; 6)$ peut être déduite du

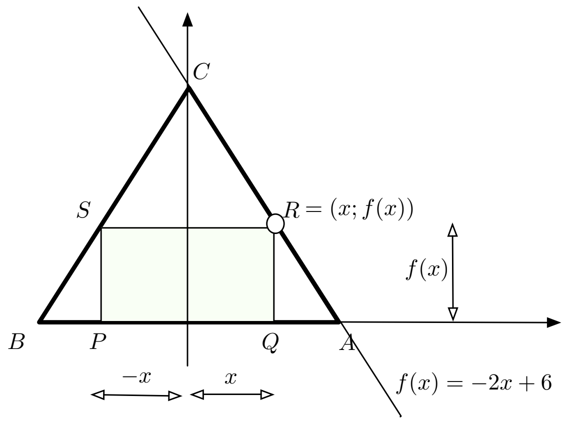


Figure 2.12 – Exercice 2.5

sytème

$$\left\{\begin{array}{cccc} 0 & + & q & = & 6 \\ 3m & + & q & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow (m = -2 \text{ et } q = 6) \quad \longrightarrow \quad f(x) = -2x + 6$$

La quantité recherchée est l'aire du rectangle $PQRS$ qui est donnée par :

$$A(x) = (x - (-x))f(x) = 2x(-2x + 6) = -4x^2 + 12x$$

Le domaine de définition pour la valeur de x est l'intervalle $[0; 3]$. On dérive $A(x)$ par rapport à x et on égale la dérivée obtenue à zéro afin de déterminer un ou des point(s) critique(s).

$$f'(x) = -8x + 12 = 0 \quad \longrightarrow \quad x = \frac{3}{2}$$

La dérivée seconde $f''(x) = -8$ est négative, la fonction f est concave et possède un maximum en $x = \frac{3}{2}$. La valeur maximum de l'aire du paralléllogramme est $A(\frac{3}{2}) = 9$.

Solution Ex 2.6. →2.6.

La droite passant par le point $(3;2)$ a pour équation :

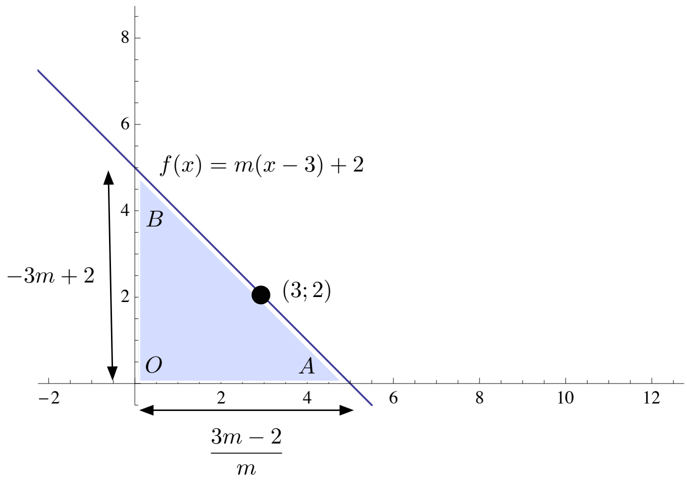


Figure 2.13 – Exercice 2.6

$$\begin{cases} mx + q = f(x) \\ 3m + q = 2 \end{cases} \quad \leadsto \quad mx - 3m = f(x) - 2 \quad \leadsto \quad f(x) = m(x-3)+2$$

Le triangle formé par les axes des coordonnées et la droite f a pour aire :

$$A = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{OB}}{2}$$

La valeur du segment $\overline{OB}$ est la valeur de la fonction f pour $x=0$ et le segment $\overline{OA}$ est la valeur de x pour $f(x) = 0$.

$$\begin{aligned} \overline{OB} &= f(0) = -3m+2 \\ \overline{OA} &: \quad 0 = m(x-3)+2 \quad \leadsto \quad x = \frac{3m-2}{m} \end{aligned}$$

Par conséquent

$$A(m) = \frac{\left(\frac{3m-2}{m}\right)(2-3m)}{2} = \frac{-9m^2+12m-4}{m}$$

La contrainte est que la valeur de la pente m de la droite f doit être négative, sinon le problème n'a aucun sens.

La valeur minimum de l'aire est obtenue en dérivant la fonction $A(m)$ et en égalant sa dérivée à zéro.

$$A'(m) = \frac{4-9m^2}{m^2} = 0 \quad \leadsto \quad m \in \left\{-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right\}$$

Seule la valeur $m = -\frac{2}{3}$ est utilisable dans ce problème. La valeur de la dérivée seconde en $m = -\frac{2}{3}$ est

$$A''(x) = -\frac{8}{m^3} \quad \leadsto \quad A''(-\frac{2}{3}) = 27$$

La valeur de la dérivée seconde est positive, la fonction V est donc convexe en $x = -\frac{2}{3}$ et par conséquent le point critique est un minimum. La valeur de l'aire minimum pour le triangle AOC est :

$$A(-\frac{2}{3}) = 24.$$

Solution Ex 2.7. →2.7.
La distance de l'origine à la fonction est donnée en appliquant le théorème de Pythagore (voir FIGURE 2.14) :

$$L(x) = \sqrt{x^2 + f(x)^2} = \sqrt{x^2 + (x^2 - 9)^2} = \sqrt{x^4 - 17x^2 + 81}$$

Le domaine de définition pour la variable x est $[-3; 3]$. La distance à la courbe tend vers l'infini à gauche et à droite de ces valeurs. On égale la dérivée de $L(x)$ à zéro pour trouver les extremums.

$$L'(x) = \frac{x\left(2x^2 - 17\right)}{\sqrt{x^4 - 17x^2 + 81}} = 0$$

Les solutions de cette équation sont $x = 0$ et $x = \pm\sqrt{\frac{17}{2}}$. La dérivée $L'(x)$ contient un dénominateur et une racine, il faut donc mieux étudier son domaine de définition avant de définir la nature des extremums.
En substituant $y = x^2$ on remarque que le discriminant du polynôme obtenu $y^2 - 17x + 81$, est $(-17)^2 - [4 \cdot 1 \cdot 81] = -35$. Il est donc plus petit que zéro ce qui signifie que l'axe des abscisses ne sera jamais intersecté. Le signe du coefficient de y^2 est positif, ce qui implique que la fonction est située en-dessus de l'axe des abscisses donc, positive. Le domaine de définition de L' est $\mathbb{R}$.
On peut faire le tableau des signes de la dérivée.

x		$-\sqrt{\frac{17}{2}}$		0		$\sqrt{\frac{17}{2}}$	
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x - \sqrt{\frac{17}{2}}$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x + \sqrt{\frac{17}{2}}$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$\sqrt{x^4 - 17x^2 + 81}$	$+$		$+$		$+$		$+$
$L'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Le tableau nous indique un premier minimum en $x = -\sqrt{\frac{17}{2}}$, un maximum en $x = 0$ et à nouveau un minimum en $x = \sqrt{\frac{17}{2}}$. Le maximum à $x = 0$ est appellé un maximum local. La longueur du segment joignant l'origine à la fonction f à une valeur de 3 lorsque $x = -3$, la longueur diminue, augmente, puis diminue à nouveau pour réaugmenter en arrivant à $x = 3$. La distance minimum est obtenue en calculant les images pour $x = \pm\sqrt{\frac{17}{2}}$:

$$f\left(\pm\sqrt{\frac{17}{2}}\right) = \frac{\sqrt{35}}{2} \approx 2.95.$$

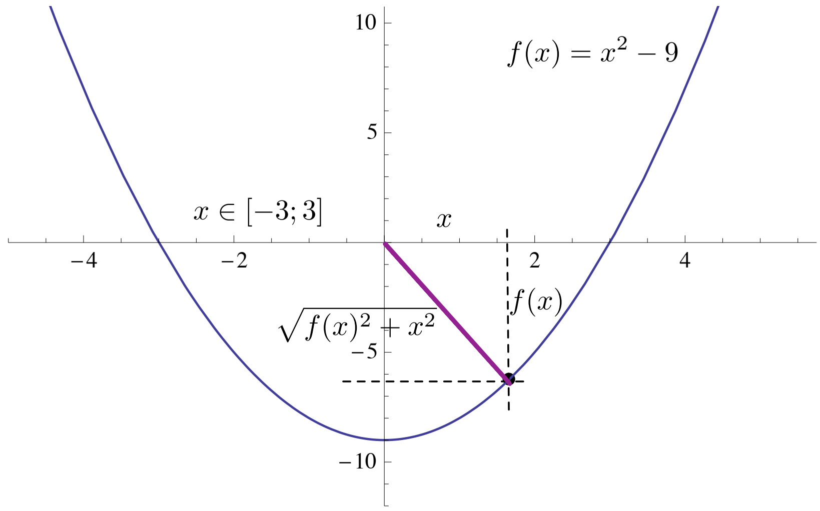


FIGURE 2.14 – Exercice 2.7. Calcul de la distance la plus courte de $(0;0)$ à la fonction $x^2 - 9$.

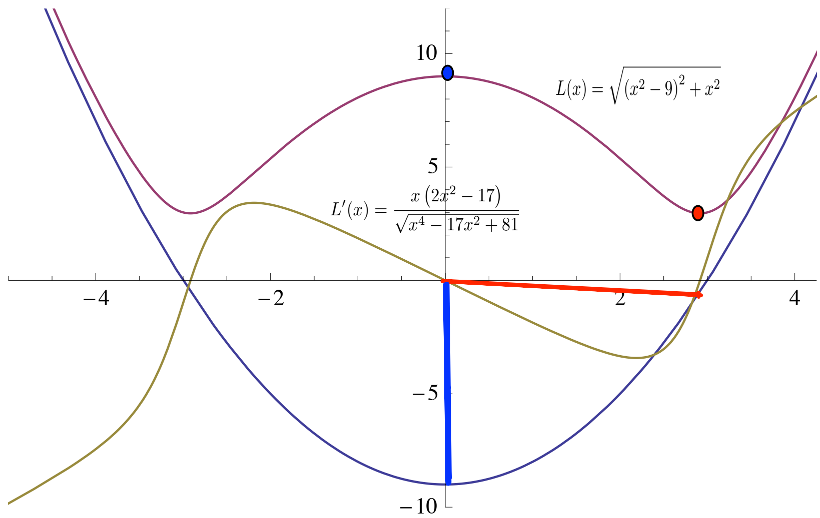


FIGURE 2.15 – Exercice 2.7. Minimum global en rouge, maximum local en bleu (désolé, le dessin n'est pas à une échelle adéquate).

Solution Ex 2.8. →2.8.
Le problème est "mathématisé" à la FIGURE (2.16). On en déduit qu'il faut minimiser la distance $\overline{AB}$ en

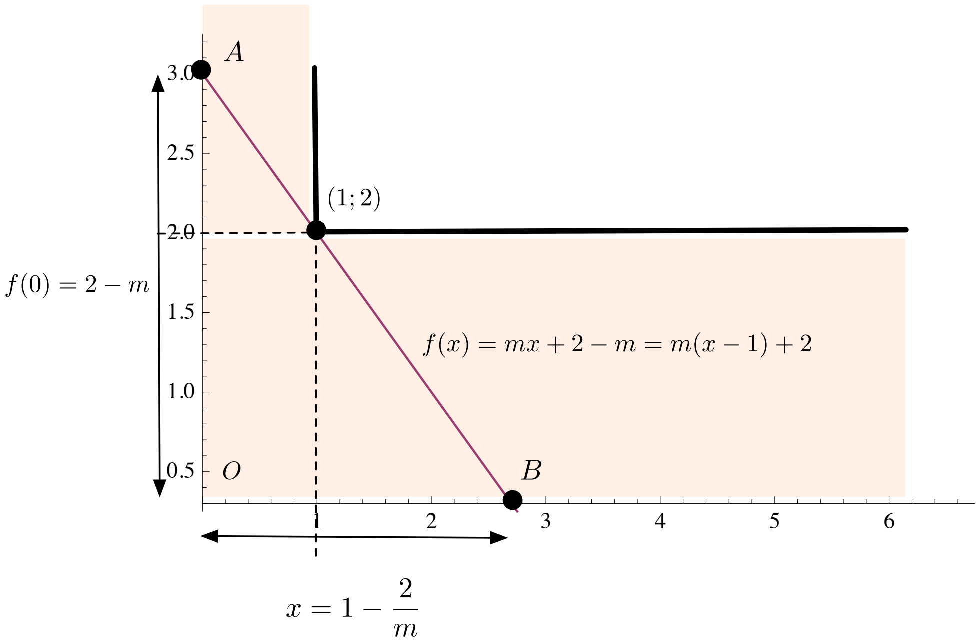


FIGURE 2.16 – Exercice 2.8 Tige AB

maintenant les points A et B respectivement sur l'ordonnée et sur l'abscisse (contrainte !). On commence par déterminer l'équation de la droite affine passant par le point $(1; 2)$:

$$f(x) = mx + q \quad \xrightarrow{\text{au point } (1;2)} \quad f(1) = 2 \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad 2 = m + q \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad q = 2 - m.$$

La droite f est

$$f(x) = mx + 2 - m = m(x - 1) + 2$$

On voit sur le dessin que la valeur de m devra être négative (domaine de définition de f).
La longueur du segment $\overline{AB}$ est donnée par

$$L = \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2}$$

Le segment $\overline{OA}$ est l'image de $x = 0$ par l'application f et le segment $\overline{OB}$ est la valeur de x dans l'équation $f(x) = 0$:

$$\begin{array}{rcl} \overline{OA} & = & f(0) = 2 - m \\ \overline{OB} & = & f(x) = 0 \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad m(x-1) + 2 = 0 \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad x = 1 - \dfrac{2}{m} \end{array}$$

La longueur devient fonction de la pente m uniquement :

$$L(m) = \sqrt{\left(1 - \frac{2}{m}\right)^2 + (2 - m)^2}$$

Pour trouver le minimum on dérive L et on égale la dérivée à zéro

$$L'(m) = \frac{(m-2)\left(m^3 + 2\right)}{m^3 \sqrt{\frac{(m-2)^2(m^2+1)}{m^2}}} = 0$$

Les solutions sont $m = 2$ et $m = -2^{\frac{1}{3}}$. La pente devant être négative on choisit la dernière solution. La dérivée seconde au point $m = -2^{\frac{1}{3}}$ est

$$L''(m) = \frac{(m-2)^3\left(m^3 - 6m^2 - 4\right)}{m^6\left(\frac{(m-2)^2(m^2+1)}{m^2}\right)^{3/2}} \quad \longrightarrow \quad L''(-2^{\frac{1}{3}}) = 1.86.$$

La solution est positive, la valeur $m = -2^{\frac{1}{3}}$ est un minimum (L est convexe en ce point).
La longueur de la barre vaut

$$L(m) = \sqrt{\left(1 - \frac{2}{m}\right)^2 + (2-m)^2} \quad \longrightarrow \quad L(-2^{\frac{1}{3}}) = 4.162 \text{ mètres.}$$

Solution Ex 2.9. →2.9.

1. La fonction est une parabole de type $ax^2 + bx + c$ dont le discriminant est :

$$\Delta = b^2 - 4ac = k^2 - 4k^2 = -3k^2$$

k^2 est toujours positif donc $-3k^2$ est toujours négatif ce qui implique que l'équation $x^2 + kx + k^2 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$. Le calcul de la dérivée seconde de f donne

$$f(x) = x^2 + kx + k^2 \quad \xrightarrow{D(f)} \quad f'(x) = 2x + k \quad \xrightarrow{D(f')} \quad f''(x) = 2$$

La dérivée seconde est constante et positive donc la fonction est partout convexe. Etant convexe et ne coupant pas l'axe des x (pas de solution) elle est positive.

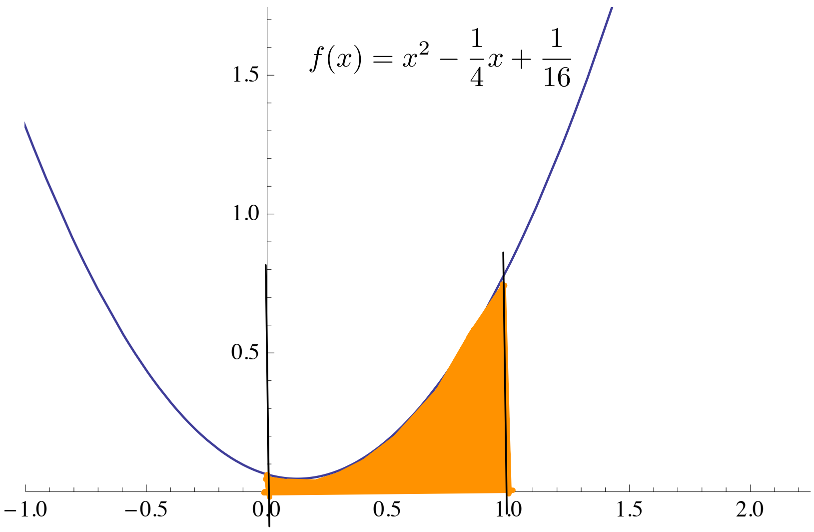


FIGURE 2.17 – Exercice 2.9

2. L'aire demandée est donnée par l'intégrale

$$A(k) = \int_0^1 x^2 + kx + k^2 \,\mathrm{d}x$$

dont la résolution donne

$$\begin{aligned} A(k) = \int_0^1 x^2 + kx + k^2 \,\mathrm{d}x &= \left.\frac{x^3}{3} + \frac{kx^2}{2} + k^2 x\right|_0^1 \\ &= k^2 + \frac{k}{2} + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Pour calculer la valeur de k qui minimise cette aire on dérive la fonction obtenue et on égale sa dérivée à zéro,

$$A'(k) = 2k + \frac{1}{2} = 0 \quad \xrightarrow{\Leftrightarrow} \quad k = -\frac{1}{4}$$

La dérivée est une droite qui passe du négatif au positif en $x = -\frac{1}{4}$. Le point critique est un minimum.

La fonction qui minimise l'aire est

$$f(x) = x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{16}$$

et la valeur de l'aire minimum vaut $A(-\frac{1}{4}) = \frac{13}{48}$. (Voir FIGURE 2.17).

Solution Ex 2.10. →2.10.
En regardant la FIGURE 2.18, on devine que la surface optimum sera obtenue pour un carré. C'est une des

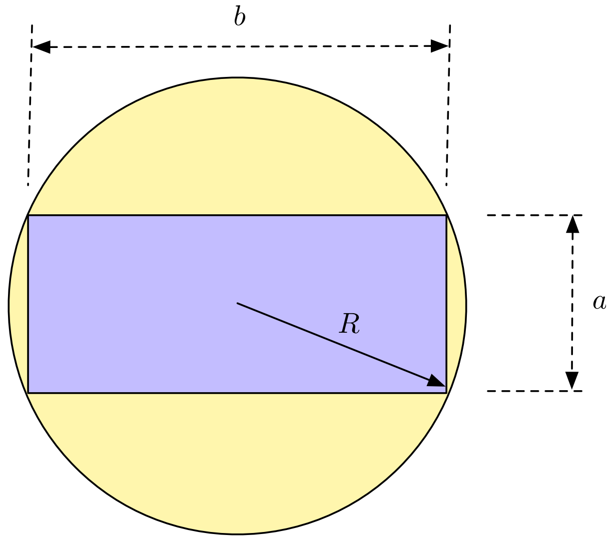


FIGURE 2.18 – Exercice 2.10

grande loi de la nature, celle de la symétrie. Mais il faut le prouver.

La surface du rectangle est donnée par
$$A(a; b) = ab$$
Les valeurs de a et b ne peuvent évidemment pas être supérieure à $2R$. A l'aide du théorème de Pythagore, on peut déduire la relation suivante entre les deux variables a et b et la constante R :
$$a^2 + b^2 = (2R)^2 \quad \longrightarrow \quad b = \sqrt{4R^2 - a^2}.$$
En substituant $b = \sqrt{4R^2 - a^2}$ dans la fonction A on obtient l'aire du parrallélépipède en fonction de la seule variable a :
$$A(a) = a(\sqrt{4R^2 - a^2}).$$
En dérivant et en égalant à zéro on a :
$$A'(a) = \frac{2\left(2R^2 - a^2\right)}{\sqrt{4R^2 - a^2}} = 0 \quad \longrightarrow \quad (2R^2 - a^2) = 0 \quad \longrightarrow \quad a = \sqrt{2}R,$$
d'où
$$b = \sqrt{4R^2 - a^2} = b = \sqrt{4R^2 - 2R^2} = \sqrt{2}R.$$
Il faut à présent prouver que la valeur $a = \sqrt{2}R$ est un maximum et non un minimum ou un palier.
La fonction dérivée peut s'écrire
$$A'(a) = \frac{2\left(2R^2 - a^2\right)}{\sqrt{4R^2 - a^2}} = \frac{2}{\sqrt{4R^2 - a^2}}(2R^2 - a^2).$$
La fraction de gauche est toujours positive car $a < 2R$. On peut la remblacer par une constante positive C_1. D'autre part $2R^2$ est également une constante positive que l'on peut remplacer par C_2. La fonction dérivée prend la forme de la fonction quadratique :
$$A'(a) = C_1(C_2 - a^2).$$
La fonction est concave car sa dérivée seconde $A''(a) = -2C_1 a$ est négative pour tout $a > 0$. La fonction ne peut avoir qu'un maximum en $a = \sqrt{2}R$. Le rectangle doit donc devenir un carré !

Solution Ex 2.11. →2.11.
On commence par dé-rojalets-riser [1] le problème en supprimant la mise en scène idiote. Que l'échelle doive reposer parterre et contre la villa est assez normal !! (sinon le voleur il se casse la g...), mais contre le mur d'enceinte, c'est idiot.

En termes mathématiques, il s'agit de trouver la longueur minimale du segment de la droite $f(x) = mx + q$ passant par le point $P(1;2)$ et dont les extrémités s'appuyent sur les axes des coordonnées.

Les contraintes sont :

les valeurs $f(0)$ et $(f(x) = 0)$ doivent être les extrémités du segment de droite,

la pente m de la droite doit être négative.

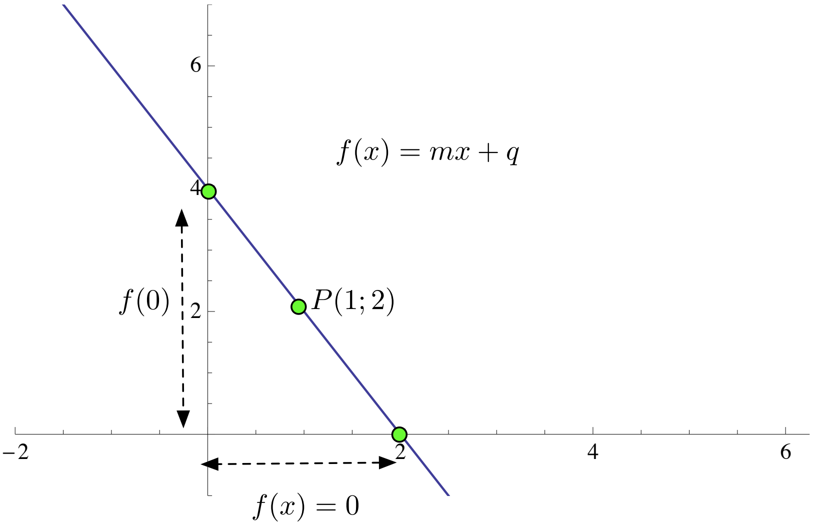


FIGURE 2.19 – Exercice 2.11

La droite passe par le point $P(1;2)$ donc

$$f(x) = mx + q \quad \longrightarrow \quad 2 = m + q \quad \longrightarrow \quad q = 2 - m \quad \longrightarrow \quad f(x) = mx + 2 - m$$

La droite coupe l'axe des abscisses au point où $f(x) = 0$ et l'axe des ordonnées en $f(0)$:

$$\begin{aligned} & f(x) = 0 \quad \longrightarrow \quad mx + 2 - m = 0 \quad \longrightarrow \quad x = \frac{m-2}{m} \\ & f(0) = 2 - m \end{aligned}$$

La longueur $L(m)$ de la droite (de l'échelle) est donnée par Pythagore et vaut :

$$L(m) = \sqrt{\left(\frac{m-2}{m}\right)^2 + (2-m)^2}$$

On désire la longueur minimum donc on dérive $L(m)$ et on égale $L'(m)$ à zéro.

Afin de s'éviter une différentiation trop longue, on peut remarquer la chose suivante. L'ennuyeux est le fait qu'il y ait une racine. Pourquoi ne pas dériver que le contenu en oubliant le contenant. La fonction

1. C'est un terme qui fait référence au collège des Rojalets de Coppet, spécialisé dans la mise en scène idiote d'exercices de maths.

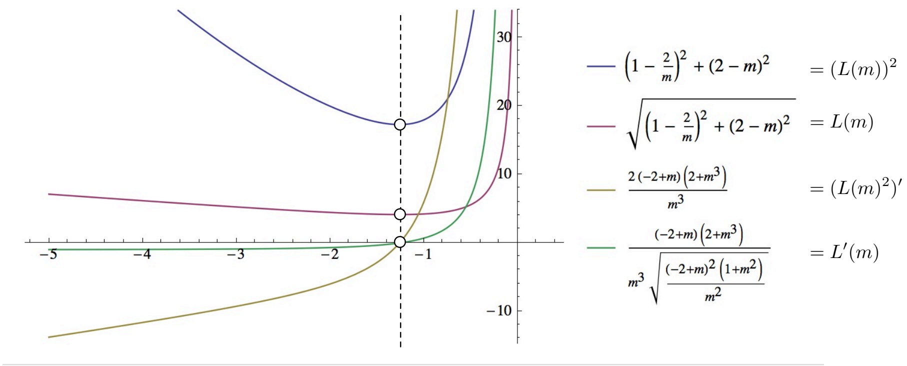
racine carrée est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, par conséquent elle conserve l'ordre. On va donc dériver non pas $L(m)$ mais $L(m)^2$.

$$\begin{aligned}
L(m)^2 &= \left(\frac{m-2}{m}\right)^2 + (2-m)^2 \\
&= \left(1-\frac{2}{m}\right)^2 + (2-m)^2 \\
(L(m)^2)' &= 2\left(1-\frac{2}{m}\right)\frac{2}{m^2} - 2(2-m) \\
&= \frac{2(m-2)\left(m^3+2\right)}{m^3} = 0
\end{aligned}$$

On sait que la solution $m = 2$ ne peut pas être retenue, car m doit être négatif pour satisfaire aux contraintes. La seule solution possible est la solution réelle et négative de $m^3 = -2$ qui est $m = -2^{\frac{1}{3}}$.

La longueur minimum de l'échelle est $L(-2^{\frac{1}{3}}) \approx 4.16$.

Remarque 1. *Les graphiques suivants justifient le raccourci pris pour simplifier la dérivée.*



○

Figure 2.20 – Exercice 2.11

Solution Ex 2.12. →2.12.

De la FIGURE 2.21, on déduit la contrainte :

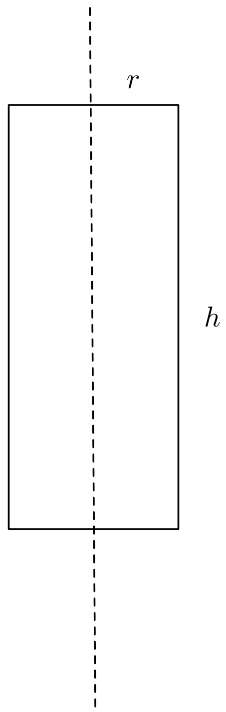


FIGURE 2.21 – Exercice 2.12

$$4r + 2h = 1.$$

Les domaines de définition des variables r et h sont respectivement $[0; \frac{1}{4}]$ et $[0; \frac{1}{2}]$.

1. Le volume du cylindre obtenu en faisant tourner le rectangle est la fonction de deux variables

$$V(r; h) = \pi r^2 h$$

En isolant h de l'équation de la contrainte on a $h = \frac{1-4r}{2}$. On substitue dans l'équation précédente et l'on obtient :

$$V(r) = \pi r^2 \frac{1-4r}{2} = \frac{\pi r^2 - 4\pi r^3}{2}$$

Le calcul de la dérivée $V'(r)$ donne :

$$V'(r) = \frac{2\pi r - 12\pi r^2}{2} = \pi r(1-6r)$$

En égalant la dérivée à zéro, et en calculant pour x on a

$$V'(r) = \pi r(1-6r) = 0 \quad \xrightarrow{\Leftrightarrow} \quad x \in \left\{0, \frac{1}{6}\right\}$$

Le tableau des signes de la dérivée nous donne la nature des points trouvés (points stationnaires).

x		0		$\frac{1}{6}$	
πr	$-$	0	$+$		$+$
$1-6r$	$+$		$+$	0	$-$
$V'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

On a un minimum au début du domaine de définition de r et un maximum au point $x = \frac{1}{6}$. La valeur maximum du volume est $V_{max} = V(\frac{1}{6}) = \frac{\pi}{216}$. La valeur de h pour V_max vaut

$$h = \frac{1-4r}{2} = \frac{1}{6}$$

Les dimension du rectangle doivent être de $2r \times h = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6}$.

2. Pour trouver la valeur maximum pour la surface latérale on refait exactement la même chose en utilisant pour fonction à minimiser la fonction

$$A(r;h) = 2\pi rh$$

La contrainte est la même, il faut que

$$4r + 2h = 1$$

Les domaines de validité des variables sont :

$$0 \leq r \leq \frac{1}{4}$$
$$0 \leq h \leq \frac{1}{2}$$

De la contrainte on déduit que $r = \frac{1-2h}{4}$. On substitue cette valeur pour r dans $A(r;h)$, ce qui nous donne une fonction de la seule variable h :

$$A(r;h) = 2\pi rh \quad \xrightarrow{r=\frac{1-2h}{4}} \quad A(h) = 2\pi\left(\frac{1-2h}{4}\right)h = \frac{1}{2}\left(\pi h - 2\pi h^2\right)$$

On dérive $A(h)$ et on égale à zéro.

$$A'(h) = \frac{1}{2}(\pi - 4\pi h) = 0 \quad \longrightarrow \quad h = \frac{1}{4}$$

h vaut $\frac{1}{4}$ donc $r = \frac{1-2h}{4} = \frac{1}{8}$.

Le tableau des signes nous donne la nature du point stationnaire :

x		$\frac{1}{4}$	
$\pi - 4\pi h$	$+$	0	$-$
$A'(x)$	$+$	0	$-$

La valeur de A est maximum pour $h = \frac{1}{4}$. La valeur de l'aire maximum est $V(\frac{1}{4}) = \frac{\pi}{16}$.

3. La fonction à optimiser est :
$$A(r;h) = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$
La contrainte est toujours la même :
$$4r + 2h = 1$$
Les domaines de variations sont :
$$0 \leq r \leq \frac{1}{4}$$
$$0 \leq h \leq \frac{1}{2}$$
En substituant $h = \frac{1-4r}{2}$ dans $A(r;h)$ on obtient :
$$A(r;h) = 2\pi r^2 + 2\pi r h \quad \xrightarrow{h=\frac{1-4r}{2}} \quad A(r) = 2\pi r^2 + \pi(1-4r)r = \pi r - 2\pi r^2$$
En égalant la dérivée à zéro on obtient les points stationnaires :
$$A'(r) = \pi - 4\pi r = 0 \quad \longrightarrow \quad r = \frac{1}{4}$$
Si $r = \frac{1}{4}$ alors $h = \frac{1-4r}{2} = 0$!! **L'aire est maximum pour $h = 0$.**
C'est tout à fait normal d'avoir cette situation, car la surface des extrémites circulaires du cylindre augmentent en r^2 alors que la surface latérale seulement en r. On a un exemple où le maximum se trouve sur une des extrémités du domaine de variation.

Graphiquement on a la situation suivante :

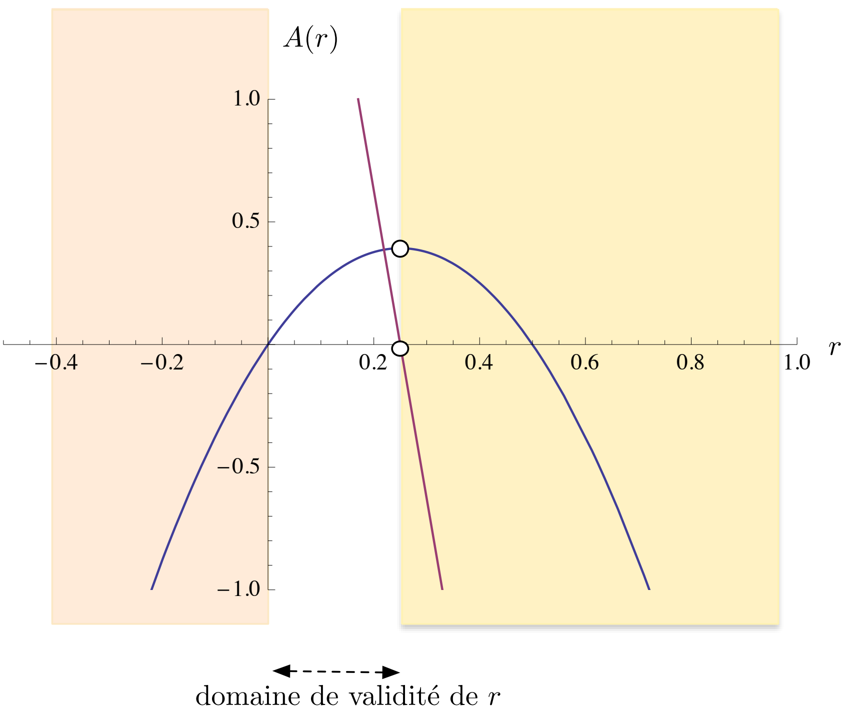


FIGURE 2.22 – Exercice 2.12

Solution Ex 2.13. →2.13.
L'aire du rectangle grisé est donnée par la fonction

$$A(x) = (2-x)(x^2+1) = -x^3 + 2x^2 - x + 2$$

Le domaine de variation de x est $[0; 2]$.

Pour trouver l'aire maximum sur l'intervalle $0 \leq x \leq 2$, on dérive la fonction A et on égale sa dérivée à zéro (dérivée nulle = taux d'accroissement nul).

$$A'(x) = -3x^2 + 4x - 1 = (1-x)(3x-1) = 0$$

La solution est $x = 1$ et $x = \frac{1}{3}$. Il faut déterminer la nature (minimum, maximum ,palier) de ces deux points stationnaires en faisant le tableau des signes de la fonction dérivée.

x		$\frac{1}{3}$		1	
$1-x$	$+$		$+$	0	$-$
$3x-1$	$-$	0	$+$		$+$
$A'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

On déduit du tableau que l'aire de la surface passe par un minimum en $x = \frac{1}{3}$ puis par un maximum en $x = 1$. L'aire maximum est donnée par $A(1) = 2$ et l'aire minimum est $A(\frac{1}{3}) = \frac{50}{27} = 1.85$. La figure ci-dessous FIGURE 2.23, montre les fonctions A et A'.

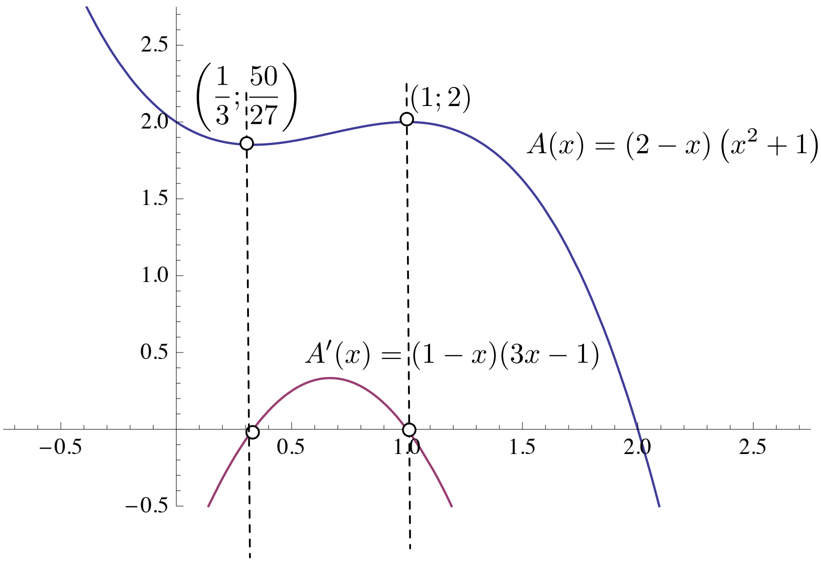


FIGURE 2.23 – Exercice 2.13

Solution Ex 2.14. →2.14.
On va commencer par calculer la distance $\overline{AB}$. Celle-ci est composée de deux tronçons, l'un suivant une

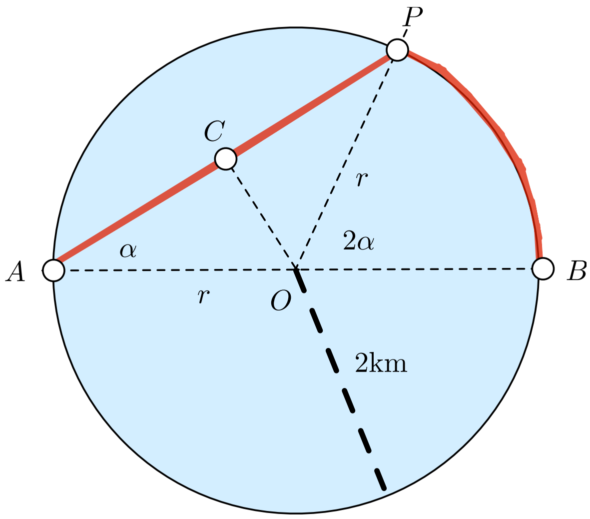


FIGURE 2.24 – Exercice 2.14

droite ($\overline{AP}$) et l'autre suivant un arc ($\overset{\frown}{PB}$). Ensuite en divisant ces deux tronçons respectivement par v et $2v$ on obtiendra le temps utilisé pour parcourir chacun des tronçons. Il faudra alors minimiser la somme de ces deux temps.
On va utiliser α comme variable indépendante. Le domaine de validité de α est :

$$0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

On commence par calculer la longueur du trajet $\overline{AP}$. En se basant sur la trigonométrie élémentaire, on obtient :

$$\overline{AP} = \overline{AC} + \overline{CP} = r\cos\alpha + r\cos\alpha = 2r\cos\alpha$$

L'arc $\overset{\frown}{PB}$ se calcule ainsi :

- On sait qu'un angle au centre d'un cercle est le double de celui inscrit, donc l'angle $\widehat{POB}$ vaut 2α.
- La longueur d'un arc est obtenue en multipliant la valeur de l'angle au centre par le rayon du cercle (l'angle doit être en radians).

$$\overset{\frown}{PB} = 2\alpha r$$

La distance totale est :

$$\delta(\alpha) = 2r\cos\alpha + 2\alpha r$$

Le temps total $T(\alpha)$ est donné par

$$T(\alpha) = \frac{\overline{AP}}{v} + \frac{\widehat{POB}}{2v} = \frac{2\cos\alpha \cdot r}{v} + \frac{2\alpha r}{2v} = \frac{r}{v}\left(2\cos\alpha + \alpha\right)$$

On dérive $T(\alpha)$ et on égale sa dérivée à zéro :

$$T'(\alpha) = \frac{r}{v}(-2\sin\alpha + 1) = \frac{r}{v}(1 - 2\sin\alpha) = 0$$

La solution est donnée pour

$$(1 - 2\sin\alpha) = 0 \quad \longrightarrow \quad \sin\alpha = \frac{1}{2} \quad \longrightarrow \quad \alpha = \pm\frac{\pi}{6}.$$

On ne garde que la solution positive donc $\alpha = \frac{\pi}{6}$ ce qui donne $T(\frac{\pi}{6}) = \frac{r}{v}(\sqrt{3} + \frac{\pi}{6}) \approx 2.25\frac{r}{v}$.

Il faut quand même s'assurer que la solution obtenue est la bonne en calculant les valeurs aux extrémités de l'intervalle de validité de l'angle α.

$$T(\alpha) = \frac{r}{v}\,(2\cos\alpha + \alpha) \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad T(0) = \frac{r}{v}(2+0) = 2\frac{r}{v}$$
$$\xrightarrow{\looparrowright} \quad T\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{r}{v}\frac{\pi}{2} \approx 1.57\frac{r}{v}$$

Stupéfaction ! ! Nous avons calculé le temps maximum et non le temps minimum. Le temps minimum est obtenu sur le bord de l'intervalle pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Il vaut mieux faire tout le trajet à pieds (voir FIGURE 2.25). Cet exercice montre l'importance de tester les bords de l'intervalle lorsque l'on n'est pas absolument sûr

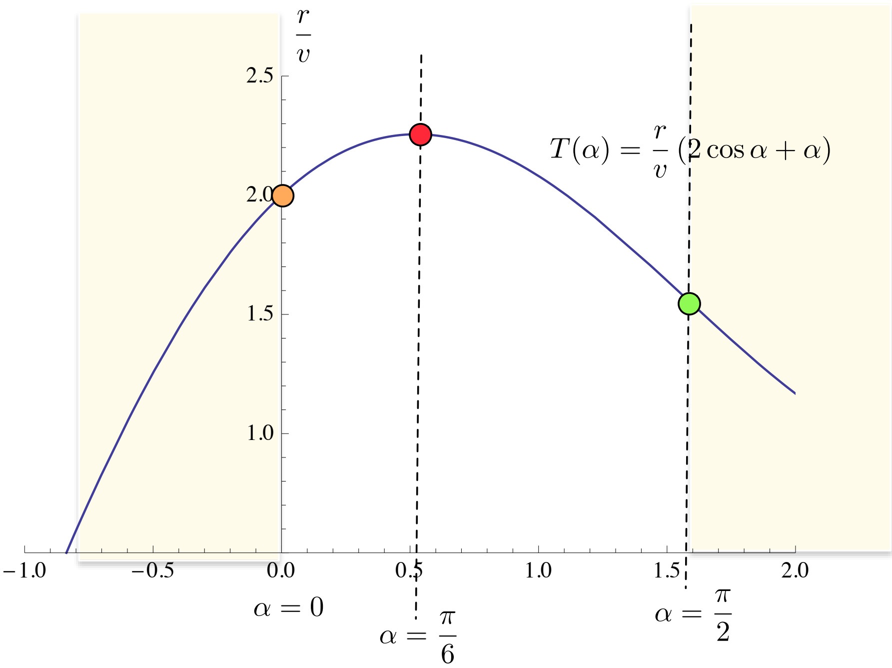


FIGURE 2.25 – Exercice 2.13

qu'ils n'interviennent pas dans la solution.

Solution Ex 2.15. →2.15>

Notons par x les côtés du carré et par y les côtés du triangle équilatéral. La contrainte est

$$4x + 3y = 1$$

Les domaines de validité des deux variables sont :

$$0 \leq x \leq \frac{1}{4}$$
$$0 \leq y \leq \frac{1}{3}$$

La fonction à optimiser est la fonction $A(x;y)$ qui donne la somme des aires du carré et du triangle équilatéral :

$$A(x;y) = x^2 + \frac{y(y\cos(30))}{2} = x^2 + \frac{\sqrt{3}y^2}{4}$$

De la contrainte on déduit que $x = \frac{1-3y}{4}$. En substituant cette valeur dans $A(x;y)$ on obtient A en fonction de y uniquement :

$$A(y) = \left(\frac{1-3y}{4}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}y^2}{4} = \frac{1}{16}\left(\left(9+4\sqrt{3}\right)y^2 - 6y + 1\right)$$

On dérive A et on égale A' à zéro pour trouver le(s) point(s) stationnaire(s).

$$A'(y) = \frac{1}{8}\left(\left(9+4\sqrt{3}\right)y - 3\right) = 0 \quad \longrightarrow \quad y = \frac{3}{9+4\sqrt{3}} \approx 0.188$$

La valeur de x est

$$x = \frac{1-3y}{4} = \frac{1}{11}\left(3\sqrt{3} - 4\right) \approx 0.1087$$

Il s'agit maintenant de déterminer la nature du point stationnaire en faisant le tableau des signes de la dérivée.

y	$\frac{3}{\left(9+4\sqrt{3}\right)}$
$\left(9+4\sqrt{3}\right)y - 3$	$-$ 0 $+$
$A'(y)$	$-$ 0 $+$

Le point trouvé est un minimum, donc le maximum se trouve à l'une des extrémités de l'intervalle de validité de y.

1. Pour $y = 0$ on a $A(0) = \frac{1}{16} = 0.0625$.
2. Pour $y = \frac{1}{3}$ on a $A\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{12\sqrt{3}} \approx 0.048$

La surface maximale est atteinte lorsque y est nul, c.-à.-d lorsque la seule figure contribuant à la surface est le carré. Les côtés du carré qui maximise l'aire sont $x = \frac{1}{4}$. Il ne faut donc pas couper la ficelle. Le résultat est tout à fait logique, car le carré a le rapport $\frac{\text{surface}}{\text{périmètre}}$ le plus avantageux.

Chapitre 3

Primitives et intégrales

3.1 Notion intuitive de l'intégration

Somme et intégration sont deux termes presque synonymes, on parle de somme lorsque l'on additionne des valeurs discrètes et d'intégration lorsque l'on additionne des images de fonctions continues. Prenons tout de suite un exemple :

Exemple 1. En général, on introduit l'intégrale définie comme étant le calcul de l'aire située entre la courbe d'une fonction et l'axe des abscisses. Prenons la fonction $f(x) = x$ sur l'intervalle $[1.8; 4.5]$ et essayons de calculer l'aire de la surface grisée de la FIGURE 3.1. La surface se divise en deux parties, un rectangle et un triangle dont la somme des aires donne l'aire sous la courbe.

En utilisant la théorie de l'intégration, on peut calculer l'aire grisée en effectuant la différence des valeurs

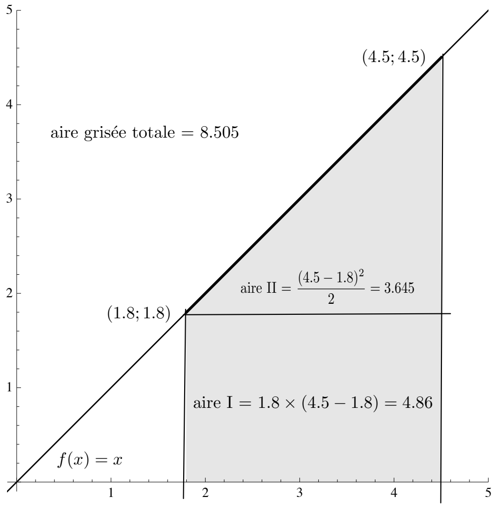


FIGURE 3.1 – L'aire grisée vaut 8.505.

de la fonction $F(x) = \frac{x^2}{2}$ aux bornes de l'intervalle $[1.8; 4.5]$.

$$F(4.5) - F(1.8) = \frac{4.5^2}{2} - \frac{1.8^2}{2} = 8.505.$$

La fonction $F(x) = \frac{x^2}{2}$ est appelée une primitive de $f(x) = x$. On remarque que la dérivée de F est f. Ce qu'il faut noter pour l'instant c'est qu'une grandeur (l'aire en l'occurrence) s'étalant continuellement de 1.8 à 4.5 peut être obtenue en calculant la différence entre deux images d'une fonction appelée primitive (ou antidérivée). Il y a un rapport entre un intervalle et ses frontières qui se généralisera dans le théorème de Stokes.

Exemple 2. Soit une particule qui se déplace à une vitesse constante de 10 m/s durant 10 s. La distance qu'elle parcourt est $d = v \cdot \Delta t = 100$ m.

Que se passe-t-il maintenant si la vitesse n'est pas une constante et a pour fonction l'expression $v(t) = g \cdot t$ (g est la constante de gravitation qui vaut $\approx$10 m/s^2). La distance est donnée par la vitesse multipliée par le temps, mais la vitesse change à chaque instant, comment faire ? Le calcul intégral permet de trouver la solution. Supposons que la particule parte à l'arrêt et que l'on veuille calculer la distance qu'elle parcourt en 1 s, on pose :

$$d = \int_0^1 g \cdot t \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} g \cdot t^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2} g = 5 \text{ m.}$$

Exemple 3. Essayons maintenant de calculer le travail qu'il faut fournir pour déplacer une masse m de la surface de la Terre (symbole $\oplus$) à l'infini. La force intervenant est celle de Newton qui vaut :

$$F(r) = -G \frac{M_\oplus m}{r^2}$$

et le travail est défini comme étant la force multipliée par le déplacement :

$$T = F \cdot d.$$

Mais chaque fois que l'on s'éloigne, ne serait-ce que d'une toute petite distance, la force change un tout petit peu. Le calcul intégral permet de traiter cette situation, une intégrale peut être vue comme une somme infinie de termes infiniment petits. Dans le cas qui nous intéresse, on pose :

$$T = \sum_{r=R_\oplus}^{\infty} F(r) \Delta r \quad \xrightarrow{\text{somme continue}} \quad T = \int_{R_\oplus} \infty \; F \,\mathrm{d}r$$

La résolution de cette intégrale est :

$$\begin{aligned} T = \int_{R_\oplus}^{\infty} F \,\mathrm{d}r &= \int_{R_\oplus}^{\infty} -G \frac{M_\oplus m}{r^2} \,\mathrm{d}r \\ &= -G M_\oplus m \int_{R_\oplus}^{\infty} \frac{1}{r^2} \,\mathrm{d}r \\ &= -G M_\oplus m \cdot \; -\frac{1}{r} \Big|_{R_\oplus}^{\infty} \\ &= G \frac{M_\oplus m}{R_\oplus} \end{aligned}$$

Le résultat est l'énergie potentielle acquise par la masse m tout au long de son trajet de la surface de la Terre à l'infini.

Exemple 4. On peut voir un disque comme étant constituée d'une très grande quantité de cercles d'épaisseur infinitésimale de plus en plus grands placés l'un autour de l'autre. Chaque cercle a comme longueur $2 \cdot \pi \cdot r$ (r est le rayon). La somme continue de tous ces cercles forment un disque dont l'aire est

$$A(r) = \int_0^r (2 \cdot \pi \cdot s) \,\mathrm{d}s = \; \pi \cdot s^2 \Big|_0^r = \pi \cdot r^2.$$

3.2 Notions théoriques

Ce que je donne ci-après n'est pas une théorie de l'intégration, mais juste quelques notions de base importantes largement inspirées du livre de Douchet et Zwahlen, "Calcul différentiel et intégral".

3.2.1 Définitions

3.2.1.1 Subdivision d'un intervalle

Soit un intervalle $[a;b]$ dans $\mathbb{R}$ et soit $n \in \mathbb{N}$. Une subdivision de $[a;b]$ est l'ensemble des réels

$$\sigma = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\} \quad \text{avec} \quad a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$$

Le pas de la subdivision est la distance entre deux éléments,

$$\mathcal{P}(\sigma) = x_i - x_{i-1} : i \in \mathbb{N},\ 1 \leq i \leq n.$$

On peut également définir la subdivision d'ordre n comme étant l'ensemble

$$\left\{a, a + \frac{b-a}{n}, ..., a + k\frac{b-a}{n}, ..., b\right\}$$

dans ce cas le pas est constant et vaut $\mathcal{P} = \frac{b-a}{n}$.

Exemple 5. L'ensemble

$$\sigma = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, 2\right\}$$

est une partition d'ordre 8 de l'intervalle $[0;2]$ dont le pas est $\mathcal{P}(\sigma) = \frac{1}{4}$.

3.2.1.2 Fonction définie et continue sur un intervalle

Soit une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ et deux nombres réels a et b. f est dite continue et définie sur $[a;b]$ si

- $[a;b] \in E$
- f est continue en tout point de $]a;b[$, f est continue en a à droite et continue à gauche en b.

3.2.1.3 Sommes de Darboux

Soit σ une subdivision d'un intervalle $[a;b]$ et f une fonction continue et définie sur $[a;b]$. On appelle :

somme de Darboux supérieure le nombre réel

$$\overline{S}_\sigma = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) \ \text{ avec } \ M_k = \max_{x \in [x_{k-1};x_k]} f(x), \tag{3.1}$$

et

somme de Darboux inférieure le nombre réel

$$\underline{S}_\sigma = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) \ \text{ avec } \ m_k = \inf_{x \in [x_{k-1};x_k]} f(x). \tag{3.2}$$

Pour la suite de subdivisions (σ_n) sur $[a;b]$ telle que $\lim_{n\to\infty} \mathcal{P}(\sigma_n) = 0$, on a :

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}_{\sigma_n}(f) = \overline{S}_f = \lim_{n\to\infty} \underline{S}_{\sigma_n}(f) = \underline{S}_f = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{3.3}$$

Définition 3.2.1. ***Intégrale***

*Soit deux réels $a < b$ et f une fonction continue et définie sur $[a;b]$. Le nombre réel $\overline{S}_f = \underline{S}_f$ est appelé **intégrale** de la fonction f sur $[a;b]$:*

$$\overline{S}_f = \underline{S}_f = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{3.4}$$

*a est la **borne inférieure**, b est la **borne supérieure** , $[a;b]$ est l'**intervalle d'intégration** et x la **variable d'intégration**. $f(x)$ est perfois appelé l'**intégrant**.*

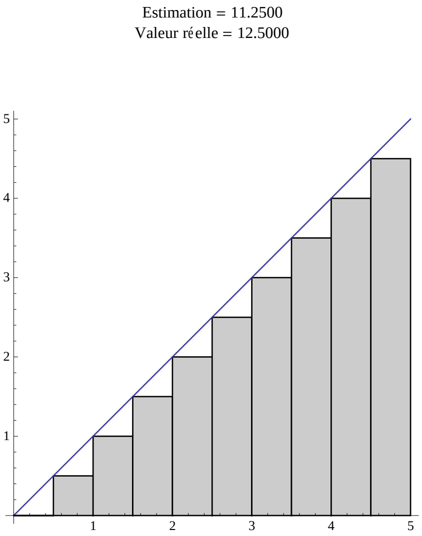


FIGURE 3.2 – ($\sigma = 10$); $m_i = \inf\limits_{x \in [x_{i-1};x_i]} f(x)$

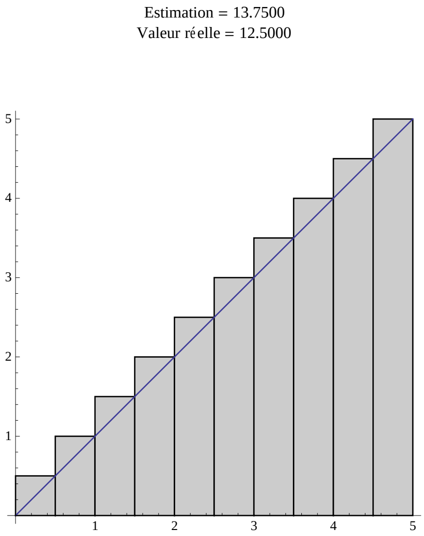


FIGURE 3.3 – ($\sigma = 10$); $M_i = \max\limits_{x \in [x_{i-1};x_i]} f(x)$

3.2.1.4 Illustration

Calcul de l'aire sous la courbe $f(x) = x$ sur l'intervalle $[0; 5]$.
On remarque que plus la valeur de σ augmente, plus l'aire donnée par les bâtonnets se rapproche de l'aire sous la courbe et que l'aire réelle est bien la limite des sommes de Darboux pour σ tendant vers l'infini.
En prenant $f(x) = x$ et un intervalle généralisé $[a; b]$ la somme de Darboux inférieure est :

$$\begin{aligned}
\underline{S}_{\sigma_n} &= \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\left(\frac{b-a}{n}\right) \\
&= \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \\
&= \frac{(b-a)\left(\frac{(n(n-1))(b-a)}{2n} + a(n-1)\right)}{n} \\
&= \frac{(n-1)\left(b^2 - a^2\right)}{2n}
\end{aligned}$$

En passant à la limite pour $n \to \infty$:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \underline{S}_{\sigma_n} = \underline{S}_f &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)\left(b^2 - a^2\right)}{2n} \\
&= \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}
\end{aligned}$$

D'après (3.4) :

$$\int_a^b x \,\mathrm{d}x = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

En substituant $[a; b] = [0; 5]$ on a

$$\int_a^b x \,\mathrm{d}x = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} = \int_0^5 x \,\mathrm{d}x = \frac{5^2}{2} = 12.5$$

Un raisonnement analogue sur la somme de Darboux supérieure

$$\overline{S}_{\sigma_n} = \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

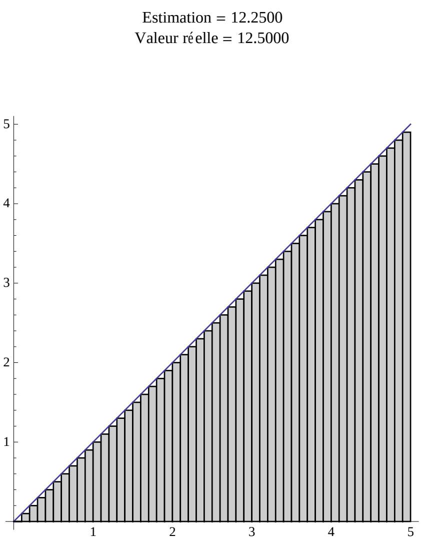


FIGURE 3.4 – ($\sigma = 50$); $m_i = \inf\limits_{x \in [x_{i-1};x_i]} f(x)$

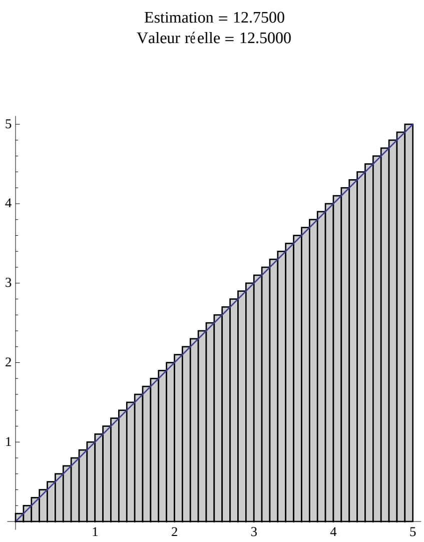


FIGURE 3.5 – ($\sigma = 50$); $M_i = \max\limits_{x \in [x_{i-1};x_i]} f(x)$

fourni le même résultat.

3.2.1.5 Intervalle d'intégration

Il est évident que pour tout élément $c \in [a;b]$, on a

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

3.2.1.6 Théorème de la moyenne

Soit deux réels $a < b$ et f une fonction continue et définie sur $[a;b]$. Si ces deux conditions sont remplies alors il existe un élément $c \in [a;b]$ tel que :

$$\int_a^b f(x) = f(c)(b-a)$$

Exemple 6. Soit la fonction $f(x) = x$ sur l'intervalle $[3;7]$. (Voir FIGURE 3.6).

$$f(c) = \frac{\int_3^7 x\,\mathrm{d}x}{7-3} = \frac{\left.\frac{x^2}{2}\right|_3^7}{4} = \frac{\frac{49}{2} - \frac{9}{2}}{4} = 5 \quad \longrightarrow \quad c = 5$$

On peut remarquer que le théorème de la moyenne , comme son nom l'indique nous donne la moyenne de la valeur de la fonction sur l'intervalle d'intégration.

Exemple 7. Calculons à présent la moyenne de la fonction $f(x) = \sin^2(x)$ sur l'intervalle $[0;2\pi]$. (Voir FIGURE 3.7).

$$\begin{aligned} f(c) = \frac{\int_0^{2\pi} \sin^2(x)\,\mathrm{d}x}{2\pi - 0} &= \frac{\int_0^{2\pi} \sin^2(x)\,\mathrm{d}x}{2\pi - 0} \\ &= \frac{\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1-(2\cos(x))\,\mathrm{d}x}{2\pi - 0} \\ &= \frac{\left.\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin(2x)\right|_0^{2\pi}}{2\pi} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

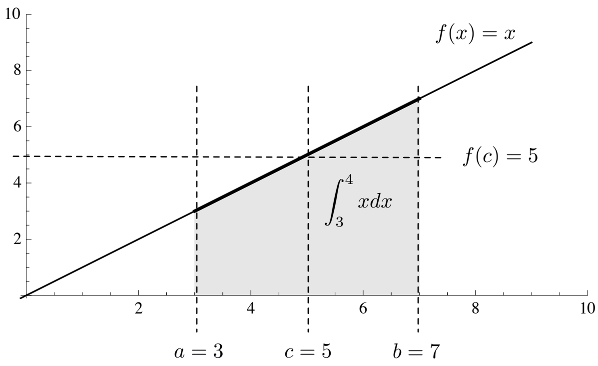


FIGURE 3.6 – Illustration du théorème de la moyenne.

La valeur moyenne est $\frac{1}{2}$, cette valeur est atteinte en 4 points.

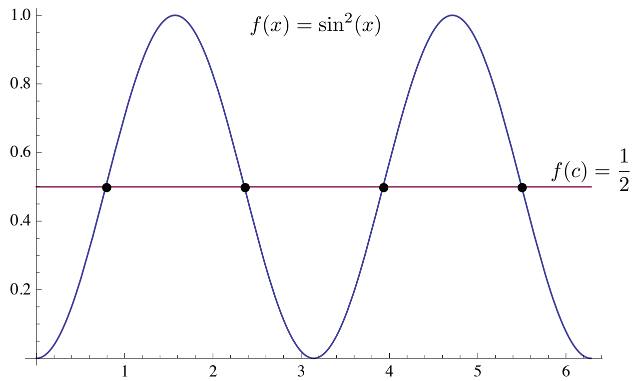


FIGURE 3.7 – Illustration du théorème de la moyenne.

3.2.1.7 Primitives

Définition 3.2.2. ***Primitive***

*Soit deux réels $a < b$ et f une fonction continue et définie sur $[a; b]$. La fonction continue $G : [a; b] \to \mathbb{R}$ est une **primitive** de la fonction f sur $[a; b]$ si pour tout $x \in]a; b[$:*

$$\left[\int f(x)\,\mathrm{d}x = G(x) + C\right] \Rightarrow [G'(x) = f(x)]$$

Remarque 2. *Si G et H sont deux primitives de f alors G et H ne diffèrent que d'une constante (voir* FIGURE *3.8).*

Remarque 3. *Soit deux réels $a < b$ et f une fonction continue et définie sur $[a; b]$. La fonction $F : [a; b] \to \mathbb{R}$ définie par*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est une primitive de $f(x)$ sur l'intervalle $[a; b]$.

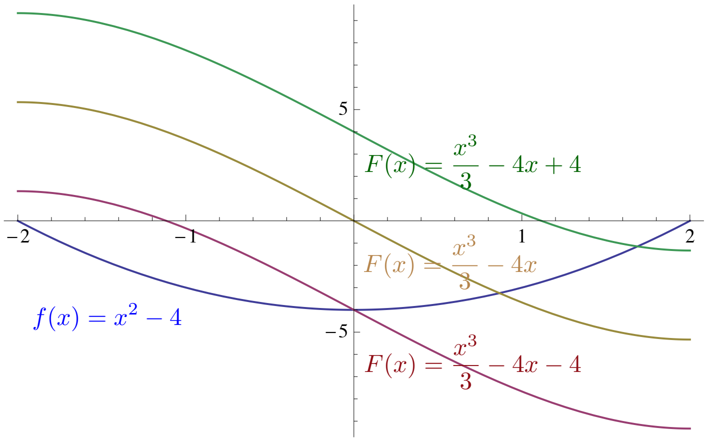


FIGURE 3.8 – La fonction $x^2 - 4$ et 3 de ces possibles primitives

3.2.1.8 Théorème fondamental du calcul intégral

Soit deux réels $a < b$, f une fonction continue et définie sur $[a;b]$ et G une primitive de f, alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = G(b) - G(a) = G(x)\big|_a^b .$$

3.2.2 Quelques primitives et intégrales simples

$$\begin{array}{rcl}
x^n & \xrightarrow{\int} & \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \\
\sin(x) & \xrightarrow{\int} & -\cos(x) + C \\
\cos(x) & \xrightarrow{\int} & \sin(x) + C \\
\frac{1}{x} & \xrightarrow{\int} & \ln|x| + C
\end{array}$$

3.2.3 Méthodes d'intégrations

3.3 EXERCICES - Primitives et intégrales - (Serie - Integration 2014-2015)

Ex 3.1. (Serie - Integration - Übung 1.)
Déterminer une primitive pour chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = x - 3$
2. $f(x) = 8x - 5$
3. $f(x) = -\sqrt{2}x - \pi$
4. $f(x) = 7x^2 - 2\sqrt{2}x$
5. $f(x) = -5x^3 + 3x$
6. $f(x) = -2x^3 - 5x^2 + 3$
7. $f(x) = -2x^4 + 2x^3 - 2x - 1$

Solution

Ex 3.2. (Serie - Integration - Übung 2.)
Déterminer une primitive pour chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = x^{-3} + 2x^2$
2. $f(x) = \frac{-5}{x^3} + 3x$
3. $f(x) = -2x^{-4} - 1$
4. $f(x) = x^3 - 3\sqrt{5}x^{-2}$

Solution

Ex 3.3. (Serie - Integration - Übung 3.)
Calculer les intégrale suivante :

1. $\displaystyle\int (\sqrt[4]{x^{-3}} + 2\sqrt[3]{x^{-2}})\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int \left(x + \tfrac{2}{3}\right)^{15} \mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int (3 - 2x)^{13}\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int \sin(x)\,\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int 2\sin(3x)\,\mathrm{d}x$

Solution

Ex 3.4. (Serie - Integration - Übung 4.)
Démontrer les équations suivantes :

1. $\displaystyle\int (2x-3)(x^2-3x+1)^{10}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{11}(x^2-3x+1)^{11} + C$
2. $\displaystyle\int \frac{4x-3}{(2x^2-3x)^3}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2(2x^2-3x)^2} + C$
3. $\displaystyle\int f(g(x))\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = F(g(x)) + C$

Solution

Ex 3.5. (Serie - Integration - Übung 5.)
Déterminer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int (2x^2+3x)^5(4x+3)\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int \sqrt[3]{(3x+8)^2}\,\mathrm{d}x$

3. $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int \frac{3x}{\sqrt{x^3}}\,\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int \sqrt{x}(x^2-5)\,\mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int \frac{2x^6-x^2}{x^4}\,\mathrm{d}x$
7. $\displaystyle\int x(x+3)^2\,\mathrm{d}x$
8. $\displaystyle\int \frac{6x^{-4}-2}{\sqrt[3]{(x^{-3}+x)^5}}\,\mathrm{d}x$
9. $\displaystyle\int (3x^4+12x)^7(x^3+1)\,\mathrm{d}x$
10. $\displaystyle\int 3\sin(4x)\cos^2(4x)\,\mathrm{d}x$
11. $\displaystyle\int x\cos(3x^2)\,\mathrm{d}x$
12. $\displaystyle\int \frac{x\cos(x^2)}{\sin^2(x^2)}\,\mathrm{d}x$
13. $\displaystyle\int \cos(2x)\sin(2x)\,\mathrm{d}x$

Solution

Ex 3.6. *(Serie - Integration - Übung 6.)
Intégrer les expressions suivantes en utilisant à chaque fois la substitution indiquée :

1. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x$ avec $x=t^2+1$
2. $\displaystyle\int \frac{1}{(1-x)\sqrt{x(1-x)}}\,\mathrm{d}x$ avec $x=1-\frac{1}{t}$
3. $\displaystyle\int \frac{x-1}{(x+1)^2\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$ avec $x=\frac{1}{t}-1$ (difficile !)

Solution

Ex 3.7. (Serie - Integration - Übung 7.)
Déterminer en intégrant par parties :

1. $\displaystyle\int x\sin(x)\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int \cos^2(x)\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int x^3\cos(2x)\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$

Solution

Ex 3.8. (Serie - Integration - Übung 8.)
Déterminer dans chaque cas une fonction f, telle que :

1. $f'(x)=3x^2-4, \quad f(5)=54$
2. $f'(x)=5-x, \quad f(-2)=-f(2)$
3. $f''(x)=2x, \quad f'(2)=8, \quad f(-1)=-8$
4. $f''(x)=3x^2-2x, \quad f(1)=f(2)=2$

Solution

Ex 3.9. (Serie - Integration - Übung 9.)
Calculer les intégrales définies suivantes :

1. $\displaystyle\int_3^4 -3x^2 \, \mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_{-2}^2 (7x-1)^{17} \, \mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_{-1}^3 \tfrac{1}{20}(2x^2+5x)^2(4x+5) \, \mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_2^0 \sqrt[3]{(2x+5)^2} \, \mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int_1^{-1} \frac{3x}{(2x^4-4)^3} \, \mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int_{-1}^2 \frac{3x^2-1}{\sqrt{x^3-x+1}} \, \mathrm{d}x$

Solution

Ex 3.10. (Serie - Integration - Übung 10.)
Déterminer dans chaque cas le nombre réel k, tel que

1. $\displaystyle\int_{-1}^2 kx^2 \, \mathrm{d}x = \tfrac{2}{3}$
2. $\displaystyle\int_4^k (x^2-3x+7) \, \mathrm{d}x = \tfrac{129}{2}$

Solution

Ex 3.11. (Serie - Integration - Übung 11.)
Soit

$$F(p) = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos(x) - \cos(p)) \, \mathrm{d}x$$

Maximiser/minimiser $F(p)$ pour $p \in [-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}]$.

Solution

Ex 3.12. (Serie - Integration - Übung 12.)
Déterminer l'aire du domaine borné par l'axe x et par la courbe d'équation $y = 4x - x^2$.

Solution

Ex 3.13. (Serie - Integration - Übung 13.)
Exercice en trois parties :

1. Déterminer $\displaystyle\int_0^3 (x^3 - 5x^2 + 6x) \, \mathrm{d}x$.
2. Déterminer les aires des domaines bornés par l'axe x et par la courbe d'équation $y = x^3 - 5x^2 + 6x$.
3. Déterminer l'aire totale des domaines bornés par l'axe x et par la courbe d'équation $y = x^3 - 5x^2 + 6x$.

Solution

Ex 3.14. (Serie - Integration - Übung 15.)
Déterminer dans chaque cas l'aire du domaine borné par les courbes :

1. $y = x^4 - 4x^2$ et $y = 4x^2$
2. $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ et $x = 4$

Solution

Ex 3.15. (Serie - Integration - Übung 16.)
Dans chaque cas un domaine est borné par les courbes dont les équations sont données ci-dessous. Déterminer le volume du corps de révolution obtenu par rotation de ce domaine autour de l'axe des x.

1. $y = 2$ et $y = 6 - x^2$
2. $y = \sqrt{x}$ et $y = x^2$

Solution

Ex 3.16. (Serie - Integration - Übung 17.) Un domaine est borné par les courbes d'équations $y = \frac{x^2}{24} + 3$ et $y = \frac{x}{2} + 3$. Déterminer le volume du corps de révolution obtenu par rotation de ce domaine autour de chacun des axes suivants :

1. $y = 3$,
2. $y = 9$.

Solution

Ex 3.17. (Serie - Integration - Übung 18.)
Dans une boîte de pralinés se trouve un chocolat d'une forme particulière : Si on le pose à plat sur l'axe des x, sa partie supérieure suit une fonction d'équation $x^2 + 9y^2 = 9$. D'autre part si on coupe le chocolat selon des plans perpendiculaires à l'axe des x, on obtient toujours un triangle équilatéral. Quel est le volume de ce praliné ?

Solution

3.4 SOLUTIONS - Exercices primitives et intégrales

Solution Ex 3.1. →3.1.
Dans cet exercice on utilise la primitive de x^n qui est $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.

1. Il s'agit de trouver une fonction dont la dérivée est $f(x) = x - 3$. La fonction

   - $F_a(x) = \dfrac{x^2}{2} - 3x$

   en est une, on aurait tout aussi bien pu choisir $F_b(x) = \frac{x^2}{2} - 3x + 4056$. Car
   $$F_a'(x) = F_b'(x) = f(x) = x - 3$$

2. Une primitive de $8x - 5$ est

   - $F(x) = 8 \cdot \dfrac{x^2}{2} - 5x + 1012 = 4x^2 - 5x + 1012$

   Dans le reste de l'exercice je prendrai 0 comme constante additionnelle.

3. Une primitive de $f(x) = -\sqrt{2}x - \pi = -\sqrt{2} \cdot x - \pi \cdot x^0$ est

   - $F(x) = -\sqrt{2} \cdot \dfrac{x^2}{2} - \pi \cdot \dfrac{x^1}{1} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}x^2 - \pi$

4. Une primitive de $f(x) = 7x^2 - 2\sqrt{2}x$ est

   - $F(x) = 7 \cdot \dfrac{x^3}{3} - 2\sqrt{2} \cdot \dfrac{x^2}{2} = \dfrac{7}{3}x^3 - \sqrt{2}x^2$

5. Une primitive de $f(x) = -5x^3 + 3x$ est

   - $F(x) = -5 \cdot \dfrac{x^4}{4} + 3 \cdot \dfrac{x^2}{2} = -\dfrac{5}{4}x^4 + \dfrac{3}{2}x^2$

6. Une primitive de $f(x) = -2x^3 - 5x^2 + 3$ est :

   - $F(x) = -2 \cdot \dfrac{x^4}{4} - 5\dfrac{x^3}{3} + 3\dfrac{x^1}{1} = -\dfrac{1}{2}x^4 - \dfrac{5}{3}x^3 + 3x$

7. Une primitive de $f(x) = -2x^4 + 2x^3 - 2x - 1$ est :

   - $F(x) = -2 \cdot \dfrac{x^5}{5} + 2 \cdot \dfrac{x^4}{4} - 2 \cdot \dfrac{x^2}{2} - 1 \cdot \dfrac{x^1}{1} = -\dfrac{2}{5}x^5 + \dfrac{1}{2}x^4 - x^2 - x$

Solution Ex 3.2. →3.2.
Dans cet exercice on utilise la primitive de x^n qui est $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.

1. Une primitive de $f(x) = x^{-3} + 2x^2$ est

   - $F(x) = \dfrac{x^{-3+1}}{-3+1} + 2 \cdot \dfrac{x^3}{3} = \dfrac{x^{-2}}{-2} + \dfrac{2}{3}x^3 = -\dfrac{1}{2x^2} + \dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{2}{3}$

2. Une primitive de $f(x) = \frac{-5}{x^3} + 3x$ est :

   - $F(x) = -5 \cdot \dfrac{x^{-2}}{-2} + 3\dfrac{x^2}{2} = \dfrac{5}{2x^2} + \dfrac{3}{2}x^2 + 0.007$

3. Une primitive de $f(x) = -2x^{-4} - 1$ est :

   - $$F(x) = -2 \cdot \frac{x^{-3}}{-3} - x = \frac{2}{3x^3} - x$$

4. Une primitive de $f(x) = x^3 - 3\sqrt{5}x^{-2}$ est :

   - $$F(x) = \frac{x^4}{4} - 3\sqrt{5} \cdot \frac{x^{-1}}{-1} = \frac{1}{4}x^4 + \frac{3\sqrt{5}}{x} + 10^{3456}$$

Solution Ex 3.3. →3.3.
Les expressions suivantes sont identiques,

- Calculer $\int f(x)\,\mathrm{d}x$
- Calculer $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$
- Calculer $\int^x f(t)\,\mathrm{d}t$
- Donner la famille des primitives de $f(x)$.

Les solutions seront de la forme $F(x) + C$ où C est appellée constante d'intégration (c'est une constante qui disparait lorsque l'on dérive la primitive).

1. L'intégrale $\int (\sqrt[4]{x^{-3}} + 2\sqrt[3]{x^{-2}})\,\mathrm{d}x$ ou $\int^x (\sqrt[4]{t^{-3}} + 2\sqrt[3]{t^{-2}})\,\mathrm{d}t$ est :

   $$\int^x t^{-\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}t + 2\int^x t^{-\frac{2}{3}}\,\mathrm{d}t = \left.\frac{t^{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4}}\right|^x + \left.\frac{t^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}\right|^x = 4\sqrt[4]{x} + c_1 + 3\sqrt[3]{x} + c_2 = 4\sqrt[4]{x} + 3\sqrt[3]{x} + C$$

   On regrouppe les constantes c_1 et c_2 en une seule C.

2. L'intégrale $\int \left(x + \frac{2}{3}\right)^{15}\mathrm{d}x$ ou $\int^x \left(s + \frac{2}{3}\right)^{15}\mathrm{d}s$ est :

   $$\int^x \left(s + \frac{2}{3}\right)^{15}\mathrm{d}s = \left.\frac{\left(s + \frac{2}{3}\right)^{16}}{16}\right|^x = \frac{\left(x + \frac{2}{3}\right)^{16}}{16} + C$$

3. L'intégrale $\int (3 - 2x)^{13}\,\mathrm{d}x$ ou $\int^x (3 - 2u)^{13}\,\mathrm{d}u$ est :

   $$\int^x (3 - 2u)^{13}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{-2} \cdot \left.\frac{(3 - 2u)^{14}}{14}\right|^x = \frac{(2x - 3)^{14}}{28} + C$$

4. L'intégrale $\int \sin(x)\,\mathrm{d}x$ ou $\int^x \sin(t)\,\mathrm{d}t$ est :

   $$\int^x \sin(t)\,\mathrm{d}t = -\cos(t)|^x = -\cos(x) + C$$

5. L'intégrale $\int 2\sin(3x)\,\mathrm{d}x$ ou $\int^x 2\sin(3t)\,\mathrm{d}t$ est :

   $$\int^x 2\sin(3t)\,\mathrm{d}t = 2\int^x \sin(3t)\,\mathrm{d}t = 2 \cdot \left. -\frac{1}{3}\cos(3t)\right|^x = -\frac{2}{3}\cos(3x) + C$$

Solution Ex 3.4. →3.4.
D'après 3.2.2, si $\left[\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)+C\right]$ alors $[F'(x)=f(x)]$.

1. Calcul de $\left[\frac{1}{11}(x^2-3x+1)^{11}+C\right]'$

$$\begin{aligned}\left[\frac{1}{11}(x^2-3x+1)^{11}+C\right]' &= \frac{1}{11}\cdot 11(x^2-3x+1)^{10}(2x-3)+0\\ &= (x^2-3x+1)^{10}(2x-3)\end{aligned}$$

2. Calcul de $\left[-\dfrac{1}{2(2x^2-3x)^2}+C\right]'$

$$\begin{aligned}\left[-\frac{1}{2(2x^2-3x)^2}+C\right]' &= \left[-\frac{1}{2}(2x^2-3x)^{-2}+C\right]'\\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-2)(2x^2-3x)^{-1}(4x-3)+0\\ &= \frac{4x-3}{2x^2-3x}\end{aligned}$$

3. Calcul de $[F(g(x))+C]'$.

$$\begin{aligned}[F(g(x))+C]' &= F'(g(x))\cdot g'(x)+0\\ &\xrightarrow{F'(x)=f(x)} f(g(x))\cdot g'(x)\end{aligned}$$

Solution Ex 3.5. →3.5.

1. $\displaystyle\int(2x^2+3x)^5(4x+3)\,\mathrm{d}x$

On se base sur l'égalité

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x))+C$$

et on pose

$$\begin{aligned}f(g(x)) &= (2x^2+3x)^5 \quad\looparrowright\quad f(x)=x^5\\ g(x) &= (2x^2+3x) \quad\looparrowright\quad g'(x)=(4x+3)\end{aligned}$$

Il suffit donc d'intégrer $f(x)$ pour obtenir $F(x)$ et substituer $g(x)$ à la place de x, ce qui donne

$$F(x)=\frac{x^6}{6}=\frac{g(x)^6}{6} \quad\looparrowright\quad F(x)+C=\frac{(2x^2+3x)^6}{6}+C$$

<u>Autre possibilité de résolution :</u>

$$\int(2x^2+3x)^5(4x+3)\,\mathrm{d}x$$

On pose

$$u=2x^2+3x \quad \text{donc} \quad \mathrm{d}u=(4x+3)\,\mathrm{d}x \quad\looparrowright\quad \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}u}{4x+3}$$

On effectue les substitutions :

$$\int u^5\frac{(4x+3)}{(4x+3)}\,\mathrm{d}u \quad\looparrowright\quad \int u^5\,\mathrm{d}u$$

On intègre par rapport à u :

$$\int u^5 \,\mathrm{d}u = \frac{u^6}{6} + C$$

Puis on effectue la substitution en retour :

$$\frac{u^6}{6} + C \quad \xrightarrow{u\,=\,2x^2+3x} \quad \frac{(2x^2+3x)^6}{6} + C$$

2. $\displaystyle\int \sqrt[3]{(3x+8)^2}\,\mathrm{d}x$

A nouveau on pose

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C$$

puis

$$\begin{array}{rcl} f(g(x)) & = & \sqrt[3]{(3x+8)^2} \quad \xrightarrow{\leadsto} \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}} \\ g(x) & = & (3x+8) \quad \xrightarrow{\leadsto} \quad g'(x) = 3 \end{array}$$

L'intégrale de $f(x)$ donne $F(x) = \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}$. En substituant $g(x)$ à la place de x on obtient

$$F(g(x)) = \frac{3}{5}(3x+8)^{\frac{5}{3}}$$

mais attention, $g'(x) = 3$ est "en trop", il faut donc rectifier la fonction $F(g(x))$ en la divisant par 3, ce qui donne finalement

$$F(x) + C = \frac{1}{5}(3x+8)^{\frac{5}{3}} + C$$

Autre possibilité de résolution :

$$\int \sqrt[3]{(3x+8)^2}\,\mathrm{d}x$$

On pose

$$u = 3x+8 \quad \text{donc} \quad \mathrm{d}u = 3\,\mathrm{d}x \quad \xrightarrow{\leadsto} \quad \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{3}$$

On effectue les substitutions :

$$\int u^{\frac{2}{3}} \frac{\mathrm{d}u}{3}$$

On intègre par rapport à u :

$$\int u^{\frac{2}{3}} \frac{\mathrm{d}u}{3} = \frac{u^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} \cdot \frac{1}{3} + C = \frac{u^{\frac{5}{3}}}{5} + C$$

Puis on effectue la substitution en retour :

$$\frac{u^{\frac{5}{3}}}{5} + C \quad \xrightarrow{u\,=\,3x+8} \quad \frac{(3x+8)^{\frac{5}{3}}}{5} + C$$

3. $\int x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C$$

puis

$$\begin{array}{rcl} f(g(x)) & = & \sqrt{x^2+1} \quad \xrightarrow{\text{↪}} \quad f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \\ g(x) & = & (x^2+2) \quad \xrightarrow{\text{↪}} \quad g'(x) = 2x \end{array}$$

L'intégrale de $f(x)$ nous donne $F(x) = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$. En substituant $g(x)$ à la place de x on a

$$F(g(x)) = \frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}},$$

ici la dérivée $g'(x)$ est $2x$ et non x, il faut donc diviser $F(g(x))$ par deux pour obtenir finalement le résultat qui est

$$F(x) + C = \frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} + C$$

4. $\int \frac{3x}{\sqrt{x^3}}\,\mathrm{d}x$

Ici on serait tenter de poser $g(x) = x^3$ et $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, mais attention la dérivée interne $(3x)$est une fonction en x et non en x^2 comme se devrait être le cas avec $g(x) = x^3$. La méthode de substitution échoue !

Récrivons l'intégrale de la manière suivante :

$$\int \frac{3x}{\sqrt{x^3}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{3x}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 3\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 3\int x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$$

L'intégrale est

$$3\int x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = 3\cdot 2x^{\frac{1}{2}} = 6\sqrt{x}$$

D'où le résultat final

$$F(x) + C = 6\sqrt{x} + C$$

5. $\int \sqrt{x}(x^2-5)\,\mathrm{d}x$

Ni $\sqrt{x}$ n'est une dérivée interne (à un facteur constant près) de (x^2-5), ni (x^2-5) n'est une dérivée interne (à un facteur constant près) de $\sqrt{x}$. La methode de substitution ne peut pas être utilisée.

Récrivons l'intégrale :

$$\begin{aligned} \int x^{\frac{1}{2}}(x^2-5)\,\mathrm{d}x &= \int x\,\mathrm{d}x - 5\int x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x^2}{2} + c_1 - 5\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c_2 \\ &= \frac{x^2}{2} - \frac{10}{3}\sqrt[2]{x^3} + C \end{aligned}$$

6. $\displaystyle\int \frac{2x^6 - x^2}{x^4}\,\mathrm{d}x$

   Il suffit de récrire l'intégrale de manière adéquate,

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^6 - x^2}{x^4}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{2x^6}{x^4}\,\mathrm{d}x - \int \frac{x^2}{x^4}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\int x^2\,\mathrm{d}x - \int x^{-2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{x}\end{aligned}$$

   La solution est

$$F(x) + C = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{x} + C$$

7. $\displaystyle\int x(x+3)^2\,\mathrm{d}x$

   Récrivons l'intégrale :

$$\begin{aligned}\int x(x+3)^2\,\mathrm{d}x &= \int x(x^2+6x+9)\,\mathrm{d}x \\ &= \int x^3 + 6x^2 + 9x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x^4}{4} + 6\frac{x^3}{3} + 9\frac{x^2}{2} \\ &= \frac{x^4}{4} + 2x^3 + 9\frac{x^2}{2} \\ &= \frac{x^4 + 8x^3 + 18x^2}{4}\end{aligned}$$

   La solution est

$$F(x) + C = \frac{x^4 + 8x^3 + 18x^2}{4} + C$$

8. $\displaystyle\int \frac{6x^{-4} - 2}{\sqrt[3]{(x^{-3}+x)^5}}\,\mathrm{d}x$

   Récrivons l'intégrale en faisant en sorte que le numérateur soit la dérivée interne de l'expression qui se trouve sous la racine cubique au dénominateur :

$$\int \frac{6x^{-4} - 2}{\sqrt[3]{(x^{-3}+x)^5}}\,\mathrm{d}x = -2\int \frac{-3x^{-4} + 1}{\sqrt[3]{(x^{-3}+x)^5}}$$

   A présent on voit que l'on a une intéfrale de la forme

$$-2 \cdot \int f(g(x))g'(x)dx$$

   avec $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^5}} = x^{-\frac{5}{3}}$, $g(x) = (x^{-3} + x)$ et $g'(x) = -3x^{-4} + 1$. Une primitive de $f(x)$ est

$$F(x) = -2\frac{x^{-\frac{2}{3}}}{-\frac{2}{3}} = 2\frac{3}{2} \cdot x^{-\frac{2}{3}} = 3x^{-\frac{2}{3}}$$

L'intégrale est de la forme $F(g(x))$ donc

$$\begin{aligned} F(x)+C = F(g(x))+C &= 3\cdot(x^{-3}+x)^{-\frac{2}{3}}+C \\ &= \frac{3}{\sqrt[3]{(x^{-3}+x)^2}}+C \end{aligned}$$

Autre possibilité de résolution :

$$\int \frac{6x^{-4}-2}{\sqrt[3]{(x^{-3}+x)^5}}\,\mathrm{d}x$$

On pose

$$u = x^{-3}+x \quad \text{donc} \quad \mathrm{d}u = -3x^{-4}+1\,\mathrm{d}x \quad \longrightarrow \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{-3x^{-4}+1}\,\mathrm{d}u$$

On effectue les substitutions :

$$\begin{aligned} \int \frac{-2(-3x^{-4}+1)}{\sqrt[3]{u^5}}\frac{1}{(-3x^{-4}+1)}\,\mathrm{d}u &= \int \frac{-2}{\sqrt[3]{u^5}}\,\mathrm{d}u \\ &= -2\int u^{-\frac{5}{3}}\,\mathrm{d}u \end{aligned}$$

On intègre par rapport à u :

$$-2\int u^{-\frac{5}{3}}\,\mathrm{d}u = -2\frac{u^{-\frac{2}{3}}}{-\frac{2}{3}}+C = \frac{3}{\sqrt[3]{u^2}}+C$$

Puis on effectue la substitution en retour :

$$\frac{3}{\sqrt[3]{u^2}}+C \quad \xrightarrow{u\,=\,x^{-3}+x} \quad \frac{3}{\sqrt[3]{(x^{-3}+x)^2}}+C$$

9. $\displaystyle\int (3x^4+12x)^7(x^3+1)\,\mathrm{d}x$

En récrivant :

$$\int (3x^4+12x)^7(x^3+1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{12}\int (3x^4+12x)^7 12(x^3+1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{12}\int (3x^4+12x)^7(12x^3+12)\,\mathrm{d}x$$

nous avons $\frac{1}{12}\int f(g(x))g'(x)dx$ avec $f(x)=x^7$ et $g(x)=(12x^3+12)$. L'intégrale de $f(x)$ est $\frac{x^8}{8}$ donc

$$F(x) = \frac{1}{12}\cdot\frac{(3x^4+12x)^8}{8}$$

Le résultat final est

$$F(x)+C = \frac{(3x^4+12x)^8}{96}+C$$

10. $\displaystyle\int 3\sin(4x)\cos^2(4x)\,\mathrm{d}x$

Récrivons l'intégrale comme suit :

$$-\frac{3}{4}\int 4\cdot -\sin(4x)\cos^2(4x)\,\mathrm{d}x$$

On remarque alors que $-\sin(4x)$ est la dérivée de $\cos(4x)$ et que 4 est la dérivée de $-\sin(4x)$. On est en présence de la dérivée de la fonction composée

$$\frac{\cos^3(4x)}{3}$$

donc le résultat est :

$$F(x) = -\frac{3}{4}\cdot\frac{\cos^3(4x)}{3} + C = -\frac{\cos^3(4x)}{4} + C$$

11. $\int x\cos(3x^2)\,\mathrm{d}x$

On récrit de la manière suivante :

$$\int x\cos(3x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\int 6x\cos(3x^2)\,\mathrm{d}x$$

d'où on tire

$$F(x) + C = \frac{1}{6}\cdot\sin(3x^2) + C$$

12. $\int \frac{x\cos(x^2)}{\sin^2(x^2)}\,\mathrm{d}x$

En récrivant on a :

$$\frac{1}{2}\int\frac{2x\cos(x^2)}{\sin^2(x^2)}\,\mathrm{d}x$$

L'expression est de la forme

$$\frac{1}{2}\int\cdot f(g(h(x)))g'(h(x))h'(x)\,\mathrm{d}x$$

avec

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{-2} \\ g(x) &= \sin(x) \quad \xrightarrow{\text{\textit{↬}}} \quad g'(x) = \cos(x) \\ h(x) &= x^2 \quad \xrightarrow{\text{\textit{↬}}} \quad h'(x) = 2x \end{aligned}$$

L'intégrale de f est $F(x) = -\frac{1}{x}$ donc

$$F(x) + C = -\frac{1}{2\sin(x^2)} + C$$

13. $\int \cos(2x)\sin(2x)\,\mathrm{d}x$

On peut remarquer que chacune des deux expressions est la dérivée de l'autre à un coefficient près :

(a) 1ère possibilité :

$$\int\cos(2x)\sin(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{\sin^2(2x)}{4} + C_1 = F_1(x) + C_1$$

(b) 2ème possibilité :

$$\int\cos(2x)\sin(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{-\cos^2(2x)}{4} + C_2 = F_2(x) + C_2$$

Les deux résultats F_1 et F_2 doivent être égaux à une constante près. En posant,

$$\begin{aligned}
\frac{\sin^2(2x)}{4} + C_1 = \frac{-\cos^2(2x)}{4} + C_2 \quad & \longrightarrow \quad \frac{\sin^2(2x)}{4} + \frac{\cos^2(2x)}{4} = C_2 - C_1 = C \\
& \longrightarrow \quad \frac{1}{4}\left(\sin^2(2x) + \cos^2(2x)\right) = C \\
& \longrightarrow \quad \frac{1}{4}(1) = C \\
& \longrightarrow \quad C = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

On voit que F_1 et F_2 sont les primitives d'une seule et unique fonction.

Solution Ex 3.6. $\rightarrow$3.6.

1. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x$ avec $x = t^2 + 1$

$$x = t^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$$

En effectuant la substitution on a :

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\left(t^2+1\right)}{\sqrt{(t^2+1)-1}} \cdot (2t\,\mathrm{d}t) \\
&= \int (2t^2+2)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{3}t^3 + 2t + C \\
&= \frac{2}{3}t(t^2+3)
\end{aligned}$$

On effectue à présent la substitution retour en posant $t = \sqrt{x-1}$. On obtient le résultat final qui est :

$$\int \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\sqrt{x-1}((\sqrt{x-1})^2+3) + C = \frac{2}{3}\sqrt{x-1}(x+2) + C$$

2. $\displaystyle\int \frac{1}{(1-x)\sqrt{x(1-x)}}\,\mathrm{d}x$ avec $x = 1 - \frac{1}{t}$

$$x = 1 - \frac{1}{t} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

En effectuant la substitution on a :

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{(1-x)\sqrt{x(1-x)}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t}\left(1-\frac{1}{t}\right)}}\,\mathrm{d}t \\
&= \int \frac{1}{t\sqrt{\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}}}\,\mathrm{d}t \\
&= \int \frac{1}{t\sqrt{\frac{t-1}{t^2}}}\,\mathrm{d}t \\
&= \int \frac{1}{\sqrt{t-1}}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{(t-1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C \\
&= 2\sqrt{t-1}+C
\end{aligned}
$$

On effectue à présent la substitution retour en posant $t=\frac{1}{1-x}$. On obtient le résultat final qui est :

$$\int \frac{1}{(1-x)\sqrt{x(1-x)}}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{\frac{1}{1-x}-1}+C = 2\sqrt{\frac{x}{1-x}}+C$$

Le résultat peut également être mis une forme plus élégante en multipliant par x le numérateur et le dénominateur se trouvant sous la racine :

$$2\sqrt{\frac{x}{1-x}}+C = 2\sqrt{\frac{x\cdot x}{(1-x)x}}+C = \frac{2x}{\sqrt{x(1-x)}}+C.$$

3. $\displaystyle\int \frac{x-1}{(x+1)^2\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x \quad \text{avec} \quad x=\frac{1}{t}-1$

Cette intégrale est difficile, afin que vous puissiez en suivre facilement le cheminement, j'ai sauté des étapes de transformations algébriques sans grand intérêt du point de vue de l'intégration.

(a) On commence par effectuer la substitution proposée ($x=\frac{1}{t}-1 \Rightarrow \mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$) :

$$\int \frac{(\frac{1}{t}-2)(-\frac{1}{t^2})}{\frac{1}{t^2}\sqrt{(\frac{1}{t}-1)^2+1}}\,\mathrm{d}t = \int \frac{2-\frac{1}{t}}{\sqrt{\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t}+2}}\,\mathrm{d}t$$

(b) On sépare l'intégrale en deux parties :

$$\int \frac{2-\frac{1}{t}}{\sqrt{\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t}+2}}\,\mathrm{d}t = \int \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t}+2}}\,\mathrm{d}t - \int \frac{1}{t\sqrt{\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t}+2}}\,\mathrm{d}t = I_1+I_2$$

(c) On identifie,

$$I_1 = \int \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t}+2}}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad I_2 = -\int \frac{1}{t\sqrt{\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t}+2}}\,\mathrm{d}t.$$

(d) Calcul de I_1 :

$$I_1 = \int \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t}+2}}\,\mathrm{d}t = \int \frac{2t}{\sqrt{1-2t+2t^2}}\,\mathrm{d}t$$

On sépare I_1 à son tour :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{2t}{\sqrt{1-2t+2t^2}}\,\mathrm{d}t \\ &= \int \frac{2t-1}{\sqrt{1-2t+2t^2}}\,\mathrm{d}t + \int \frac{1}{\sqrt{1-2t+2t^2}}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

On intègre I_1 (du moins la première des deux intégrales) :

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2}\int \frac{4t-2}{\sqrt{1-2t+2t^2}}\,\mathrm{d}t + \int \frac{1}{\sqrt{1-2t+2t^2}}\,\mathrm{d}t \\ &= \sqrt{1-2t-2t^2} + C + \int \frac{1}{\sqrt{1-2t+2t^2}}\,\mathrm{d}t \qquad (3.5) \end{aligned}$$

Pour le moment on laisse comme ça...

(e) On transforme I_2 :

$$\begin{aligned} I_2 &= -\int \frac{1}{t\sqrt{\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t}+2}}\,\mathrm{d}t \\ &= -\int \frac{1}{\frac{t}{t}\sqrt{1-2t+2t^2}}\,\mathrm{d}t \\ &= -\int \frac{1}{\sqrt{1-2t+2t^2}}\,\mathrm{d}t \qquad (3.6) \end{aligned}$$

En faisant la somme de I_1 (3.5) et I_2 (3.6), on s'apercoit que l'intégrale "antipathique" disparaît :

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 &= \sqrt{1-2t+2t^2} + C + \int \frac{1}{\sqrt{1-2t+2t^2}}\,\mathrm{d}t - \int \frac{1}{\sqrt{1-2t+2t^2}}\,\mathrm{d}t \\ &= \sqrt{1-2t+2t^2} + C \end{aligned}$$

(f) Il faut finalement effectuer la substitution en retour en remplaçant t par $\frac{1}{x+1}$

$$\begin{aligned} \sqrt{1-2t+2t^2} + C \quad &\xrightarrow{t=\frac{1}{x+1}} \quad \sqrt{\frac{2}{(x+1)^2} - \frac{2}{x+1} + 1} + C \\ &= \quad \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} + C \end{aligned}$$

Donc

$$\int \frac{x-1}{(x+1)^2\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} + C$$

Solution Ex 3.7. →3.7.

1. $\int x\sin(x)\,\mathrm{d}x$

   Posons $f = x$; $g' = \sin(x)$; $f' = 1$; $g = -\cos(x)$.
   En appliquant la formule d'intégration par partie

$$\int f\cdot g' = f\cdot g - \int f'\cdot g$$

on peut écrire

$$\begin{aligned}\int x\sin(x)\,\mathrm{d}x &= -x\cdot\cos(x) - \int -\cos(x)\,\mathrm{d}x\\ &= -x\cos(x)+\sin(x)\end{aligned}$$

La solution est $F(x)=\sin(x)-x\cos(x)+C$.

2. $\int \cos^2(x)\,\mathrm{d}x = \int \cos(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x$

   Posons $f=\cos(x)$; $g'=\cos(x)$, alors

$$\begin{aligned}\int f\cdot g' &= f\cdot g - \int f'\cdot g\\ \int \cos(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x &= \cos(x)\sin(x) + \int \sin(x)\cdot\sin(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \cos(x)\sin(x)+\int(1-\cos^2(x))\,\mathrm{d}x\\ &= \cos(x)\sin(x)+\int 1\,\mathrm{d}x - \int\cos^2(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

   Si on récrit le tout on a :

$$\int\cos^2(x)\,\mathrm{d}x = \cos(x)\sin(x)+\int 1\,\mathrm{d}x-\int\cos^2(x)\,\mathrm{d}x$$

   En réduisant et en intégrant :

$$2\int\cos^2(x)\,\mathrm{d}x=\cos(x)\sin(x)+x$$

   On obtient finalement

$$\begin{aligned}F(x)+C=\int\cos^2(x)\,\mathrm{d}x+C &= \frac{1}{2}(x+\cos(x)\sin(x))+C\\ &= \frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin(2x)+C\end{aligned}$$

3. $\int x^3\cos(2x)\,\mathrm{d}x$

   On peut voir à l'avance que l'intégration va être longue car il faudra ramener la valeur en x^3 à x^0, ce qui va demander trois intégrations par partie de suite.
   1ère intégration : On pose

$$f=x^3;\quad f'=3x^2;\quad g'=\cos(2x);\quad g=\frac{1}{2}\sin(2x)$$

   En appliquant la formule d'intégration par partie

$$\int f\cdot g'=f\cdot g-\int f'\cdot g$$

   on a

$$\begin{aligned}I=\int x^3\cos(2x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\cdot x^3\cdot\sin(2x)-\int 3x^2\cdot\frac{1}{2}\sin(2x)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\cdot x^3\cdot\sin(2x)-\frac{3}{2}\int x^2\cdot\sin(2x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

On “met le résultat de côté” : 1) $I = \frac{1}{2}\cdot x^3\cdot\sin(2x) - \frac{3}{2}$ [2ème intégration]

2ème intégration : $\int x^2\cdot\sin(2x)\,\mathrm{d}x$

On pose

$$f = x^2;\quad f' = 2x;\quad g' = \sin(2x);\quad g = -\frac{1}{2}\cos(2x)$$

En appliquant la formule d'intégration par partie

$$\int f\cdot g' = f\cdot g - \int f'\cdot g$$

on a

$$\begin{aligned}\int x^2\cdot\sin(2x)\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{2}\cdot x^2\cdot\cos(2x) - \int 2x\cdot -\frac{1}{2}\cos(2x)\,\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{2}x^2\cos(2x) + \int x\cos(2x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

On “met de côté” : 2) $I = \frac{1}{2}\cdot x^3\cdot\sin(2x) - \frac{3}{2}\left[-\frac{1}{2}x^2\cos(2x) + [\text{3ème intégration}]\right]$

3ème intégration : $\int x\cos(2x)\,\mathrm{d}x$ On pose

$$f = x;\quad f' = 1;\quad g' = \cos(2x);\quad g = \frac{1}{2}\sin(2x)$$

En appliquant la formule d'intégration par partie

$$\int f\cdot g' = f\cdot g - \int f'\cdot g$$

on a

$$\begin{aligned}\int x\cos(2x)\,\mathrm{d}x &= 1\cdot\frac{1}{2}\sin(2x) - \int 1\cdot\frac{1}{2}\sin(2x)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\sin(2x) - \frac{1}{2}\int\sin(2x)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{1}{4}\cos(2x)\end{aligned}$$

A présent on met le tout ensemble pour obtenir

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{2}\cdot x^3\cdot\sin(2x) - \frac{3}{2}\left[-\frac{1}{2}x^2\cos(2x) + \left[\frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{1}{4}\cos(2x)\right]\right]\\ &= \frac{1}{4}\left(2x^2-3\right)x\sin(2x) + \frac{3}{8}\left(2x^2-1\right)\cos(2x) + C\end{aligned}$$

4. $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$

On pose :

$$f = x;\quad f' = 1;\quad g' = \frac{1}{\sqrt{x+1}} = (x+1)^{-\frac{1}{2}};\quad g = 2(x+1)^{\frac{1}{2}}$$

En appliquant la formule d'intégration par partie

$$\int f\cdot g' = f\cdot g - \int f'\cdot g$$

on peut écrire

$$\begin{aligned}\int x\cdot(x+1)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x &= x\cdot 2(x+1)^{\frac{1}{2}}-2\int(x+1)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x\\ &= 2x(x+1)^{\frac{1}{2}}-2\cdot\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\\ &= 2x(x+1)^{\frac{1}{2}}-\frac{4}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\\ &= \frac{2}{3}(x-2)\sqrt{x+1}\end{aligned}$$

Finalement : $F(x)+C=\frac{2}{3}(x-2)\sqrt{x+1}+C$

Solution Ex 3.8. →3.8. Afin de simplifier les notations j'utilise les lettres a, b pour désigner les constantes d'intégration.

1. $f'(x)=3x^2-4, \quad f(5)=54$

   Une primitive de f' est :
   $$f(x)=x^3-4x+a, \quad a\in\mathbb{R}$$
   Sachant que $f(5)=54$ on peut poser,
   $$f(5)=(5)^3-4(5)+a=54$$
   et en déduire $a=-51$, la fonction f cherchée est :
   $$f(x)=x^3-4x-51$$

2. $f'(x)=5-x, \quad f(-2)=-f(2)$

   Une primitive de f' est :
   $$f(x)=5x-\frac{x^2}{2}+a, \quad a\in\mathbb{R}$$
   Sachant que $f(-2)=-f(2)$ on peut poser,
   $$-12+a=-8-a$$
   d'où $a=2$. La fonction f cherchée est :
   $$f(x)=5x-\frac{x^2}{2}+2$$

3. $f''(x)=2x, \quad f'(2)=8, \quad f(-1)=-8$

   Une primitive de f'' est :
   $$f'(x)=x^2+a \quad \xrightarrow{(f'(2)=8)} \quad 4+a=8 \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad a=4$$
   Une primitive de f' est
   $$f(x)=\frac{x^3}{3}+ax+b \quad \xrightarrow{(a=4;\, f(-1)=-8)} \quad -\frac{1}{3}-4+b=-8$$

d'où on tire que $b = -\frac{11}{3}$.
La fonction f cherchée est :

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + 4x - \frac{11}{3} = \frac{x^3 + 12x - 11}{3}$$

4. $f''(x) = 3x^2 - 2x, \quad f(1) = f(2) = 2$

   On intègre deux fois f'' :

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^3 - x^2 + a \\ f(x) &= \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + ax + b = \frac{3x^4 - 4x^3 + 12ax + 12b}{12} \end{aligned}$$

   En calculant successivement $f(1)$, $f(2)$ et en égalant chacune des expressions à 2, on obtient :

$$\begin{aligned} f(1) = 2 \quad &\longrightarrow \quad a + b - \frac{1}{12} = 2 \\ f(2) = 2 \quad &\longrightarrow \quad 2a + b + \frac{4}{3} = 2 \end{aligned}$$

   Il s'agit de résoudre le système

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} a & + & b & = & \frac{25}{12} \\ 2a & + & b & = & \frac{2}{3} \end{array} \right. \quad \longrightarrow \quad a = -\frac{17}{12} \text{ et } b = \frac{7}{2}$$

   La fonction cherchée est :

$$f(x) = \frac{1}{12}\left(3x^4 - 4x^3 - 17x + 42\right)$$

Solution Ex 3.9. $\to$3.9.

1. $\displaystyle\int_3^4 -3x^2 \,\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned} \int_3^4 -3x^2 \,\mathrm{d}x &= -3 \int_3^4 x^2 \,\mathrm{d}x \\ &= -3 \left. \frac{x^3}{3} \right|_3^4 \\ &= -\left. x^3 \right|_3^4 \\ &= -\left[4^3 - (3)^3\right] \\ &= -37 \end{aligned}$$

2. $\displaystyle\int_{-2}^2 (7x-1)^{17} \,\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 (7x-1)^{17} \,\mathrm{d}x &= \left. \frac{1}{7} \cdot \frac{(7x-1)^{18}}{18} \right|_{-2}^2 \\ &= \left(\frac{1}{7} \cdot \frac{(7(2)-1)^{18}}{18} \right) - \left(\frac{1}{7} \cdot \frac{(7(-2)-1)^{18}}{18} \right) \\ &= -\frac{97\,531\,176\,648\,817\,356\,964}{9} \end{aligned}$$

3. $\int_{-1}^{3} \frac{1}{20}(2x^2+5x)^2(4x+5)\,\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{3} \frac{1}{20}(2x^2+5x)^2(4x+5)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{20}\int_{-1}^{3}(2x^2+5x)^2(4x+5)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{20}\left.\frac{(2x^2+5x)^3}{3}\right|_{-1}^{3} \\
&= \frac{1}{20}\left(\frac{(2(3)^2+5(3))^3}{3}\right)-\frac{1}{20}\left(\frac{(2(-1)^2+5(-1))^3}{3}\right) \\
&= \frac{2\,997}{5}
\end{aligned}$$

4. $\int_{2}^{0} \sqrt[3]{(2x+5)^2}\,\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}
\int_{2}^{0} \sqrt[3]{(2x+5)^2}\,\mathrm{d}x &= \int_{2}^{0}(2x+5)^{\frac{2}{3}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\left.\frac{(2x+5)^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}\right|_{2}^{0} \\
&= \left.\frac{3}{10}\sqrt[3]{(2x+5)^2}\right|_{2}^{0} \\
&\approx -7.29
\end{aligned}$$

5. $\int_{1}^{-1} \frac{3x}{(2x^4-4)^3}\,\mathrm{d}x$

La fonction $\frac{3x}{(2x^4-4)^3}$ est une fonction impaire et le domaine d'intégration est symétrique, donc l'intégrale est nulle. (Voir FIGURE 3.9).

$$\int_{1}^{-1} \frac{3x}{(2x^4-4)^3}\,\mathrm{d}x = 0$$

Remarque 4. *La primitive de* $\frac{3x}{(2x^4-4)^3}$ *est :*

$$\int \frac{3x}{(2x^4-4)^3}\,\mathrm{d}x = \frac{3\left(3\sqrt{2}\log\left(\sqrt{2}-x^2\right)-3\sqrt{2}\log\left(x^2+\sqrt{2}\right)+\frac{4\left(3x^4-10\right)x^2}{\left(x^4-2\right)^2}\right)}{2048}+C$$

(Le calcul a été fait par ordinateur.)

6. $\int_{-1}^{2} \frac{3x^2-1}{\sqrt{x^3-x+1}}\,\mathrm{d}x$

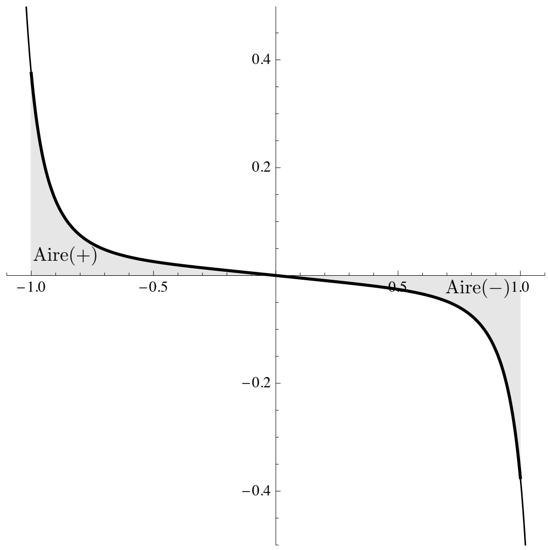


FIGURE 3.9 – Exercice 3.9.5

En posant $g(x) = x^3 - x + 1$, on a

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2} \frac{3x^2-1}{\sqrt{x^3-x+1}}\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{2} \frac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^{2} g'(x)g(x)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\cdot g(x)^{\frac{1}{2}}\Big|_{-1}^{2} \\ &= 2\left(\sqrt{g(2)}-\sqrt{g(-1)}\right) \\ &= 2\left(\sqrt{7}-1\right)\end{aligned}$$

Solution Ex 3.10. →3.10.

1. $\int_{-1}^{2} kx^2\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$ On calcule l'intégrale et on égale son évaluation sur $[-1;2]$ à $\frac{2}{3}$.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2} kx^2\,\mathrm{d}x &= k\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2} \\ &= \frac{8}{3}k+\frac{1}{3}k = 3k \\ &\overset{\looparrowright}{\longrightarrow} \quad 3k = \frac{2}{3} \quad \overset{\looparrowright}{\longrightarrow} \quad k = \frac{2}{9}\end{aligned}$$

La valeur de k est $\frac{2}{9}$.

2. $\int_4^k (x^2-3x+7)\,\mathrm{d}x = \frac{129}{2}$

$$\begin{aligned}\int_4^k (x^2-3x+7)\,\mathrm{d}x &= \left.\frac{x^3}{3}-3\frac{x^2}{2}+7x\right|_4^k \\ &= \left(\frac{k^3}{3}-3\frac{k^2}{2}+7k\right)-\left(\frac{4^3}{3}-3\frac{4^2}{2}+7(4)\right) \\ &= \frac{1}{6}\left(2k^3-9k^2+42k-152\right)\end{aligned}$$

En égalant à $\frac{129}{2}$:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{6}\left(2k^3-9k^2+42k-152\right)=\frac{129}{2} \\ &2k^3-9k^2+42k-539=0\end{aligned}$$

La solution est $k=7$.

Solution Ex 3.11. $\rightarrow$3.11.

On peut récrire l'intégrale avant de la calculer.

$$F(p)=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos(x)-\cos(p))\,\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(x)\,\mathrm{d}x-\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(p)\,\mathrm{d}x$$

La première intégrale du terme de droite est une constante et dans la seconde intégrale du même terme, $\cos(p)$ ne dépendant pas de la variable d'intégration x peut être sorti de l'intégrale :

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(x)\,\mathrm{d}x-\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(p)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\left(2+\sqrt{3}\right)-\cos(p)\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x \\ &= \left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\cos(p)\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right) \\ &= \left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{5\pi}{6}\cos(p)\end{aligned}$$

L'expression initiale pour $F(p)$ peut se récrire ainsi :

$$F(p)=\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{5\pi}{6}\cos(p)$$

On cherche les extremum en dérivant $F(p)$ et en égalant sa dérivée à zéro :

$$F'(p)=\frac{5\pi}{6}\sin(p)=0$$

Nous avons un extremum pour $p=0$.
Afin de savoir si c'est un minimum ou un maximum on peut appliquer le test de la dérivée seconde :

$$F''(p)=\frac{5\pi}{6}\cos(p)$$

Le calcul de $F''(0)$ donne $\frac{5\pi}{6}$ qui est une valeur positive. On en déduit que la courbe est convexe en zéro donc que l'extremum est un minimum.
Le maximum est à présent à chercher aux bornes de l'intervalle (il ne peut pas être ailleurs) :

$$\begin{aligned}F\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-0=\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ F\left(-\frac{\pi}{3}\right) &= \left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{5\pi}{6}\cdot\frac{1}{2}=\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{5\pi}{12}\end{aligned}$$

Le maximum est au point $p = \frac{\pi}{2}$ car $\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) > \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{5\pi}{12}$.

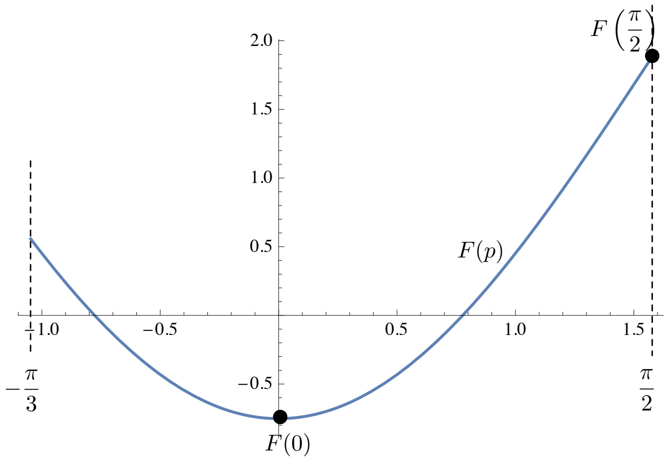


FIGURE 3.10 – Exercice 3.11

La fonction $F(p)$ possède un minimum en $p = 0$ ($F(0) = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5\pi}{6}$) et un maximum en $p = \frac{\pi}{2}$.

Solution Ex 3.12. →3.12.
Il faut commencer par déterminer les zéros de la fonction afin de connaître les bornes d'intégrations :

$$f(x) = x(4-x) = 0 \quad \xrightarrow{\text{↬}} \quad x = 0 \text{ et } x = 4$$

L'intervalle d'intégration est $[0; 4]$ donc l'aire cherchée est donnée par

$$\begin{aligned} A = \int_0^4 4x - x^2 \, \mathrm{d}x &= 2x^2 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^4 \\ &= \frac{32}{3}. \end{aligned}$$

L'aire cherchée est $\frac{32}{3}$.

Solution Ex 3.13. →3.13.

1. Calcul de $A + (-B) = \int_0^3 (x^3 - 5x^2 + 6x) \, \mathrm{d}x$
(Voir FIGURE 3.11).

$$\begin{aligned} A + (-B) = \int_0^3 (x^3 - 5x^2 + 6x) \, \mathrm{d}x &= \frac{x^4}{4} - 5\frac{x^3}{3} + 3x^2\Big|_0^3 \\ &= \frac{1}{12}x^2\left(3x^2 - 20x + 36\right)\Big|_0^3 \\ &= \frac{9}{4} \end{aligned}$$

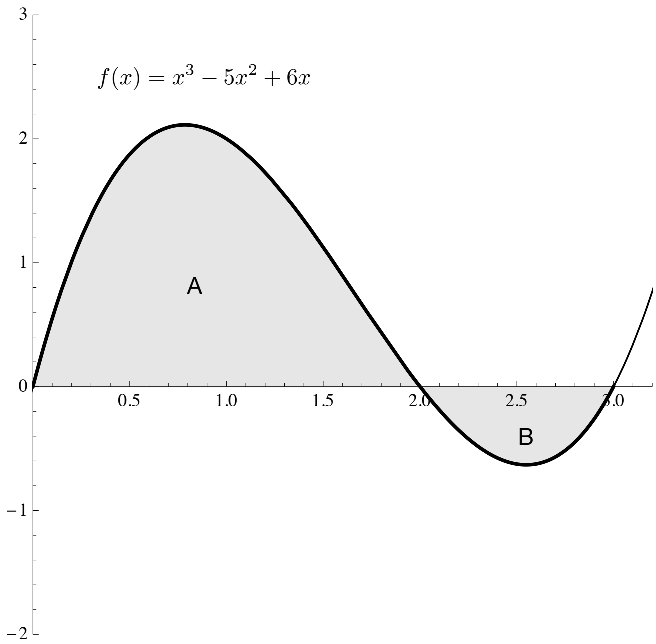


FIGURE 3.11 – Exercice 3.13

2. $A = \int_0^2 (x^3 - 5x^2 + 6x)\,\mathrm{d}x$ et $B = \left| \int_2^3 (x^3 - 5x^2 + 6x)\,\mathrm{d}x \right|$
   (Voir FIGURE 3.11).

$$
\begin{aligned}
A = \int_0^2 (x^3 - 5x^2 + 6x)\,\mathrm{d}x &= \frac{x^4}{4} - 5\frac{x^3}{3} + 3x^2 \Big|_0^2 \\
&= \frac{1}{12}x^2\left(3x^2 - 20x + 36\right)\Big|_0^2 \\
&= \frac{8}{3} \\
B = \int_3^2 (x^3 - 5x^2 + 6x)\,\mathrm{d}x &= \frac{x^4}{4} - 5\frac{x^3}{3} + 3x^2 \Big|_3^2 \\
&= \frac{1}{12}x^2\left(3x^2 - 20x + 36\right)\Big|_3^2 \\
&= \frac{5}{12}
\end{aligned}
$$

3. L'aire géométrique total est $A+B = \frac{8}{3} + \frac{5}{12} = \frac{37}{12}$. Elle diffère de l'aire calculée sous 1. Sous 1. l'aire de la surface B a été sommée avec un signe négatif, cette aire est appelée aire algébrique. L'aire algébrique peut être nulle même si l'aire géométrique ne l'est pas. L'inverse est faux, si l'aire géométrique est nulle alors l'aire algébrique aussi.

Solution Ex 3.14. $\rightarrow$3.14.

1. Les bornes d'intégrations sont données par les points d'intersections des graphes des fonctions.

$$x^4 - 4x^2 = 4x^2 \quad \xrightarrow{\Leftrightarrow} \quad x \in \{0, -2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\}.$$

On remaque que les deux fonctions sont paires, il suffit donc de calculer l'aire qu'elles forment sur l'intervalle $[0; 2\sqrt{2}]$ et de multiplier le résultat par 2.(Voir FIGURE 3.12).

$$\begin{aligned}
\text{Aire géométrique} &= 2 \cdot \left| \int_0^{2\sqrt{2}} ((x^4 - 4x^2) - (4x^2))\, \mathrm{d}x \right| \\
&= 2 \cdot \left| \int_0^{2\sqrt{2}} (x^4 - 8x^2)\, \mathrm{d}x \right| \\
&= 2 \cdot \left| \frac{x^5}{5} - 8\frac{x^3}{3} \right| \Bigg|_0^{2\sqrt{2}} \\
&= \left| -\frac{2}{15} \left(256\sqrt{2} \right) \right| \\
&\approx 48.2718
\end{aligned}$$

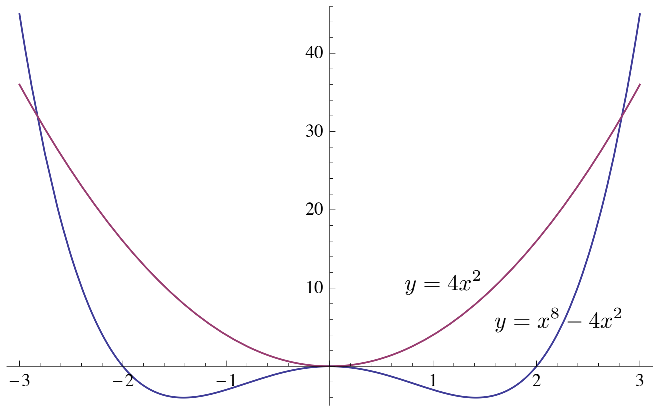


FIGURE 3.12 – Exercice 3.14

2. L'aire est limitée par l'axe des x ($y = 0$), la fonction $\sqrt{x}$ et la droite verticale d'équation $x = 4$.

$$\begin{aligned}
\text{Aire géométrique} &= \int_0^4 \sqrt{x}\, \mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^4 \\
&= \frac{2}{3} \sqrt{x^3} \Big|_0^4 \\
&= \frac{16}{3}
\end{aligned}$$

Solution Ex 3.15. →3.15.

1. Posons $f(x) = 2$ et $g(x) = 6 - x^2$. Les bornes de l'intervalle d'intégration sont données par l'intersection des graphes (voir FIGURE 3.13) :

$$f(x) = g(x) \quad \xrightarrow{\text{\Leftrightarrow}} \quad 6 - x^2 = 2 \quad \xrightarrow{\text{\Leftrightarrow}} \quad x \in \{-2; 2\}$$

Le volume est donné par :

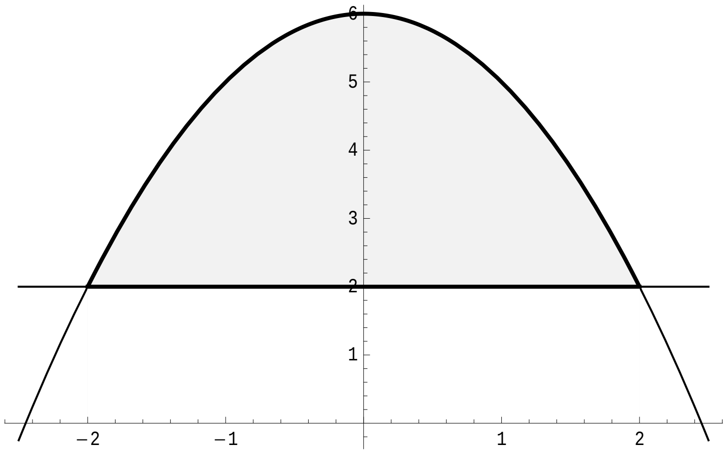


FIGURE 3.13 – Exercice 3.15.1

$$\begin{aligned}
\text{Volume} &= \pi \int_{-2}^{2} g(x)^2 \,\mathrm{d}x - \pi \int_{-2}^{2} f(x)^2 \,\mathrm{d}x \\
&= \pi \int_{-2}^{2} \left[g(x)^2 - f(x)^2\right] \mathrm{d}x \\
&= \pi \int_{-2}^{2} \left[(6-x^2)^2 - (2)^2\right] \mathrm{d}x \\
&= \pi \int_{-2}^{2} \left(x^4 - 12x^2 + 32\right) \mathrm{d}x \\
&= 2 \cdot \pi \left[\frac{x^5}{5} - 4x^3 + 32x\right]\Bigg|_0^2 \\
&= \frac{384\pi}{5}.
\end{aligned}$$

(Voir FIGURE 3.14).

2. Posons $f(x) = x^2$ et $g(x) = \sqrt{x}$. Les bornes de l'intervalle d'intégration sont données par l'intersection des graphes (voir FIGURE 3.15) :

$$f(x) = g(x) \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad x^2 = \sqrt{x} \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad x \in \{0; 1\}$$

Le volume est donné par :

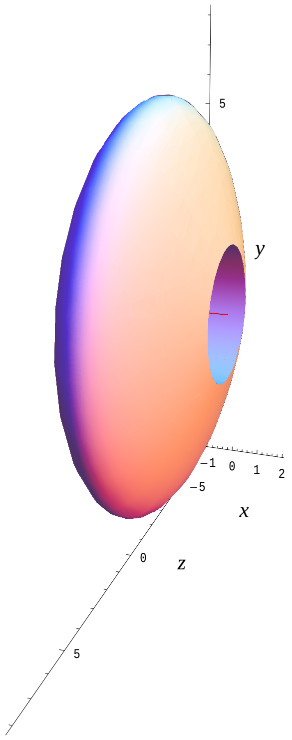


FIGURE 3.14 – Exercice 3.15.1

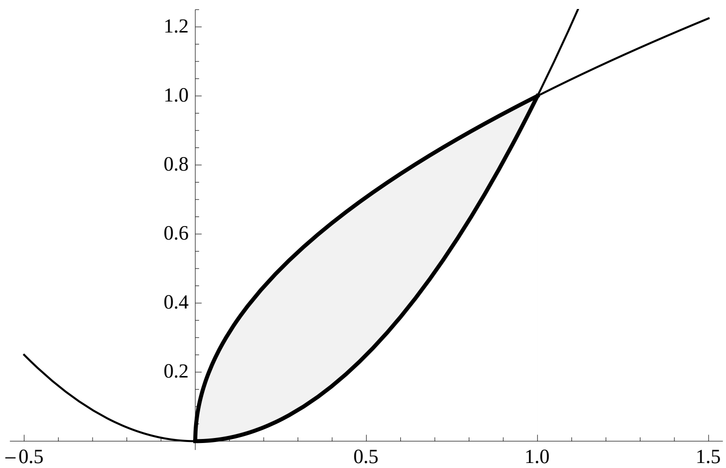


FIGURE 3.15 – Exercice 3.15.2

$$
\begin{aligned}
\text{Volume} &= \pi \int_{-2}^{2} g(x)^2 \, \mathrm{d}x - \pi \int_{-2}^{2} f(x)^2 \, \mathrm{d}x \\
&= \pi \int_{0}^{1} \left[g(x)^2 - f(x)^2\right] \mathrm{d}x \\
&= \pi \int_{0}^{1} \left[(\sqrt{x})^2 - (x^2)^2\right] \mathrm{d}x \\
&= \pi \int_{0}^{1} \left(x - x^4\right) \mathrm{d}x \\
&= \pi \left[\frac{1}{10}(5x^2 - 2x^5)\right]\Big|_0^1 \\
&= \frac{3\pi}{10}
\end{aligned}
$$

Solution Ex 3.16. →3.16.
Il s'agit dans un premier temps de déterminer les bornes d'intégration en calculant les abscisses des points d'intersection des graphes des deux fonctions, commençons par poser

$$f(x) = \frac{x^2}{24} + 3 \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x}{2} + 3.$$

Le calcul des intersections de f et g est :

$$\begin{aligned} f = g \quad \overset{\text{ℴ}}{\longrightarrow} \quad \frac{x^2}{24} + 3 = \frac{x}{2} + 3 \quad & \overset{\text{ℴ}}{\longrightarrow} \quad x^2 + 72 = 12x + 72 \\ & \overset{\text{ℴ}}{\longrightarrow} \quad 12x = x^2 \\ & \overset{\text{ℴ}}{\longrightarrow} \quad x(x-12) = 0 \\ & \overset{\text{ℴ}}{\longrightarrow} \quad x \in \{0, 12\}. \end{aligned}$$

La borne d'intégration inférieure est 0 et la supérieure est 12.

1. Si l'axe de rotation est $y = 3$ (voir FIGURE 3.16) alors les fonctions à intégrer deviendront

$$f_3 = f(x) - 3 = \frac{x^2}{24} \quad \text{et} \quad g_3 = g(x-3) = \frac{x}{2}.$$

(On a simplement effectué un changement de variable sur la variable dépendante y). Le volume cherché est donné par l'intégrale :

$$\begin{aligned} \pi \int_0^{12} \left[g_3(x)^2 - f_3(x)^2\right] \mathrm{d}x &= \pi \int_0^{12} \left[\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x^2}{24}\right)^2\right] \mathrm{d}x \\ &= \pi \int_0^{12} \left[\frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{576}\right] \mathrm{d}x \\ &= \pi \left[\frac{x^3}{12} - \frac{x^5}{2280}\right]\Bigg|_0^{12} \\ &= \frac{288\pi}{5} \end{aligned}$$

Le volume de révolution autour de l'axe de rotation $y = 3$ est $\frac{288\pi}{5}$.

2. Si l'axe de rotation est $y = 9$ (voir FIGURE 3.17) alors les fonctions à intégrer deviendront

$$f_9 = f(x) - 9 = \frac{x^2}{24} - 6 \quad \text{et} \quad g_9 = g(x) - 9 = \frac{x}{2} - 6.$$

(On a simplement effectué un changement de variable sur la variable dépendante y). Le volume cherche est donné par l'intégrale :

$$\begin{aligned} \pi \int_0^{12} \left[f_9(x)^2 - g_9(x)^2\right] \mathrm{d}x &= \pi \int_0^{12} \left[\left(\frac{x^2}{24} - 6\right)^2 - \left(\frac{x}{2} - 6\right)^2\right] \mathrm{d}x \\ &= \pi \left[\frac{x^5}{2880} - \frac{x^3}{4} + 3x^2\right]\Bigg|_0^{12} \\ &= \frac{432\pi}{5} \end{aligned}$$

Le volume de révolution autour de l'axe de rotation $y = 9$ est $\frac{432\pi}{5}$.

On remarquera que les volumes sont différents, ce qui est normal, car dans le deuxième cas le côté bombé est à l'extérieur.

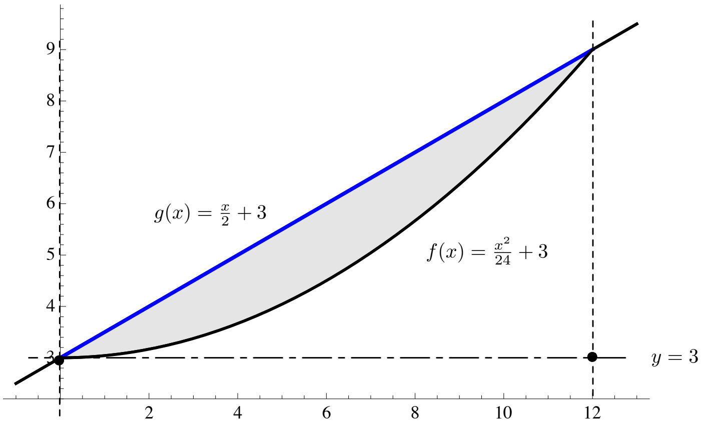


FIGURE 3.16 – Exercice 3.16

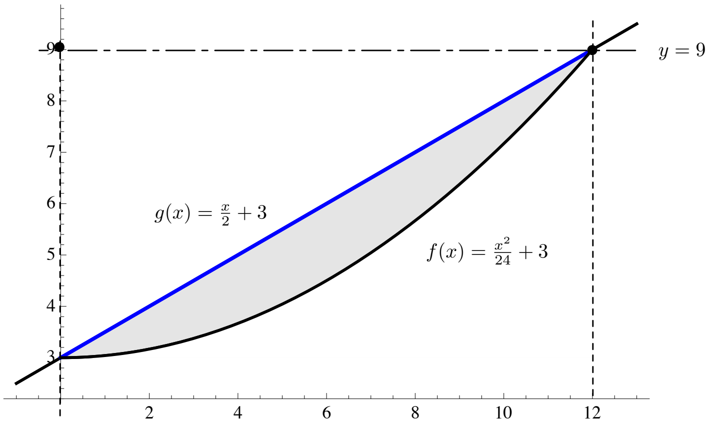


FIGURE 3.17 – Exercice 3.16

Solution Ex 3.17. →3.17.
On transforme l'équation de l'ellipse en une fonction de x :

$$x^2 + 9y^2 = 9 \quad \longrightarrow \quad y = \sqrt{\frac{9 - x^2}{9}} = \frac{\sqrt{9 - x^2}}{3} = f(x).$$

La fonction $f(x)$ coupe l'axe des abscisse en -3 et 3, (FIGURE 3.18). Une coupe transversale du chocolat

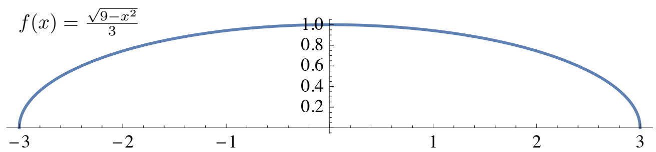


FIGURE 3.18 – Exercice 3.17

entre $x = -3$ et $x = 3$ à une forme de triangle équilatéral dont la hauteur est $h = f(x)$, la base du même triangle est $b = 2 \cdot \frac{f(x)}{\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{2}{\sqrt{3}} f(x)$. L'aire du triangle $A(x)$ est :

$$\begin{aligned}
A(x) = \frac{b \cdot h}{2} &= \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} f(x) f(x)}{2} \\
&= \frac{f(x)^2}{\sqrt{3}} \\
&= \frac{\frac{9-x^2}{9}}{\sqrt{3}} \\
&= \frac{9-x^2}{9\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

On peut à présent considérer le chocolat comme étant formé d'une infinité de petit triangles équilatéraux de volume $A(x)\Delta x$, où Δx est une quantité infinitésimale qui représente l'épaisseur de chacun des triangles. En language d'intégrale on a :

$$\begin{aligned}
V = \int_{-3}^{3} A(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-3}^{3} \frac{9-x^2}{9\sqrt{3}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{9\sqrt{3}} \int_{0}^{3} (9-x^2)\,\mathrm{d}x \quad \text{(la fonction est paire)} \\
&= \frac{2}{9\sqrt{3}} \left[9x - \frac{x^3}{3}\right]\Bigg|_0^3 \\
&= \frac{4}{\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

Le volume du chocolat est $\frac{4}{\sqrt{3}}$.

Chapitre 4

Nombres complexes*

4.1 Définition

Les nombres complexes (ou imaginaires) forment l'ensemble noté $\mathbb{C}$. Un nombre complexe z est l'association de deux nombres réels x et y.

$$z = 1 \cdot x + i \cdot y = x + iy, \text{ avec } \{x; y\} \in \mathbb{R} \text{ et } z \in \mathbb{C}. \tag{4.1}$$

Le nombre i qui apparait dans la définition ci-dessus est l'unité complexe (ou le vecteur de base de l'axe imaginaire). On définit $i = \sqrt{-1}$, donc $i^2 = -1$. x est la partie réelle de z, on note $x = \mathrm{Re}\,(z)$. y est la partie imaginaire de z, on note $y = \mathrm{Im}\,(z)$. Attention ! x et y sont des réels, c'est le groupe complet $z = x + iy$ qui est un complexe. Dans le cas où $x = 0$, z est un complexe pur et dans le cas où $y = 0$, z est un réel pure.
Les nombres complexes et le plan $\mathbb{R}^2$ forment un isomorphisme, c'est-à-dire qu'ils peuvent être mis en relation de manière bijective tout en étant deux ensembles différents. Plus simplement, chaque point de $\mathbb{C}$ à son "jumeau" dans $\mathbb{R}^2$.
La représentation d'un nombre complexe est la suivante :

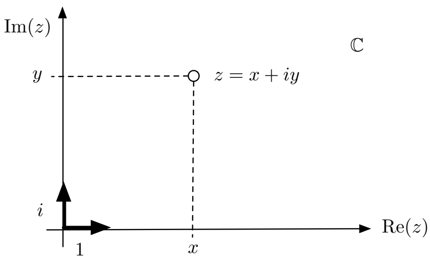


FIGURE 4.1 – Ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.

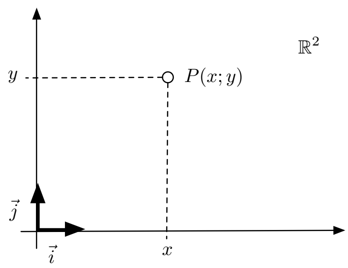


FIGURE 4.2 – Espace $\mathbb{R}^2$.

4.1.1 Nombre complexe conjugué

On appelle nombre complexe conjugué de $z = x + iy$, le nombre complexe noté $\overline{z}$ et défini par

$$\overline{z} = x - iy.$$

4.1.2 Forme algébrique

La forme algébrique d'un nombre complexe est :

$$z = x + iy \tag{4.2}$$

4.1.2.1 Opérations de base sur les nombres complexes.

Soit les nombres complexes $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$.

1. Addition :
$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

   Exemple 8.
$$(34 + 23i) + (23 - 45i) = 57 - 22i$$

2. Multiplication :
$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) \\ &= x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2 \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2) \end{aligned}$$

   Exemple 9.
$$\begin{aligned} (-3 + 2i)(4 + i) &= (-12 - 3) + i(-3 + 8) \\ &= -15 + 5i \end{aligned}$$

3. Division : $(z_2 \neq 0 + 0i)$
$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} &= \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} \\ &= \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2} \end{aligned}$$

   Exemple 10.
$$\begin{aligned} \frac{3 + 2i}{1 - i} &= \frac{(3 + 2i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} \\ &= \frac{1 + 5i}{2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i \end{aligned}$$

4.1.3 Forme polaire ou trigonométrique

La FIGURE 4.3 montre clairement la relation entre les formes polaire et algébrique d'un nombre complexe :

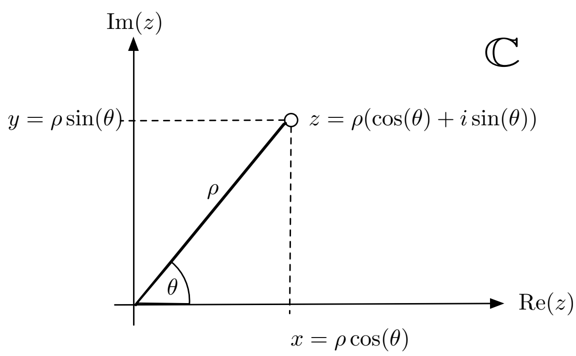


FIGURE 4.3 – Forme polaire d'un nombre complexe

4.1.3.1 Passage de la forme algébrique à la forme polaire (trigonométrique)

Les grandeurs ρ et θ sont appelée respectivement le module et l'argument du nombre complexe et sont définies comme suit. Soit le nombre complexe $z = x + iy$,

$$z = x + iy = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

$$\text{avec } \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ et } \arg(z) = \theta = \begin{cases} \cos(\theta) = \frac{x}{\rho} \\ \sin(\theta) = \frac{y}{\rho} \end{cases} \qquad \theta \in [0; 2\pi]$$

Si on veut être très rigoureux, on doit tenir compte de la périodicité de l'argument :

$$z = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \Rightarrow \left(\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad \arg(z) = \theta + 2k\pi\right) \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Remarque 5. *Dans la littérature on trouve parfois la notion d'argument principal d'un nombre complexe définie par*

$$\theta = \text{Arg}(z) \qquad \textit{avec} \qquad \theta \in]-\pi; \pi].$$

Exemple 11. La forme polaire du nombre complexe $z = x + iy = 2 - 2\sqrt{3}i$ est :

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$$

$$\theta = \begin{cases} \cos^{-1}\left(\frac{x}{\rho}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{2}{4}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \\ \sin^{-1}\left(\frac{y}{\rho}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{-2\sqrt{3}}{4}\right) = \sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{cases} \qquad \text{d'où} \quad \theta = -\frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}.$$

La forme polaire de $z = 2 - 2\sqrt{3}i$ est $z = 4(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)) = [\rho; \theta] = [4; \frac{5\pi}{3}]$.

4.1.4 Forme exponentielle

C'est la forme de loin la plus utile de toutes. Elle a été découverte par Euler qui a eu le génie de remarquer le fait suivant.
Les développements infinis en série de Taylor des fonctions $\cos(x)$ et $\sin(x)$ sont :

$$\begin{aligned} \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{40320} - \dots \\ \sin(x) &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \dots \end{aligned}$$

Si maintenant on multiplie par i la série du sinus on obtient :

$$i\sin(x) = ix - i\frac{x^3}{6} + i\frac{x^5}{120} - i\frac{x^7}{5040} + \dots$$

et que l'on additionne les séries $\cos(x) + i\sin(x)$ on a,

$$\cos(x) + i\sin(x) = 1 + ix - \frac{x^2}{2} - \frac{ix^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{ix^5}{120} - \frac{x^6}{720} - \frac{ix^7}{5040} + \frac{x^8}{40320} + \dots$$

Le développement de la série donnée par la fonction e^{ix} est :

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2} - \frac{ix^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{ix^5}{120} - \frac{x^6}{720} - \frac{ix^7}{5040} + \frac{x^8}{40320} + \dots$$

Les développements de e^{ix} et $\cos(x) + i\sin(x)$ sont identiques donc on obtient la formule d'Euler pour les nombres complexes qui est :

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x) \tag{4.3}$$

Ainsi pour tout nombre complexe $z = x + iy$ on a :

$$z = x + iy = \rho \cdot e^{i\theta} \quad \text{avec} \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad \theta = \arg(z).$$

Exemple 12. Sous sa forme exponentielle, le nombre complexe $z = x + iy = 2 - 2\sqrt{3}i$ est

$$z = x + iy = 2 - 2\sqrt{3}i = 4 \cdot e^{i\frac{5\pi}{3}}$$

4.1.5 Formule de De Moivre

$$z^n = (x + iy)^n = (\rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \rho^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Exemple 13.

$$\begin{aligned} \sin 3\theta &= \operatorname{Im}(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) \\ &= \operatorname{Im}(\cos\theta + i\sin\theta)^3 \\ &= \operatorname{Im}\left(-i\sin^3\theta + \cos^3\theta + 3i\sin\theta\cos^2\theta - 3\sin^2\theta\cos\theta\right) \\ &= 3\sin(x)\cos^2\theta - \sin^3\theta \end{aligned}$$

4.1.6 Racines d'un nombre complexe

Pour trouver les n racines ω_n du nombre complexe $\sqrt[n]{z}$ on utilise la formule suivante :

$$\omega_k = |z|^{\frac{1}{n}} \cdot e^{\frac{i\,\theta}{n}} \cdot e^{\frac{i\,2k\pi}{n}} \text{ avec } k = (0..(n-1))$$

ou encore

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}e^{\frac{\theta+2k\pi}{n}} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$

Exemple 14. Pour $\sqrt[3]{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}$
On a : $n = 3$, $|z| = 2$ et $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$\left(\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right)} \qquad \text{pour k = 0, 1, 2.}$$

Les trois racines sont :

1. $k = 0 \quad \xrightarrow{\varphi} \quad \sqrt[3]{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{12}} = 1.2170 + 0.32609i$
2. $k = 1 \quad \xrightarrow{\varphi} \quad \sqrt[3]{2} \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}} = -0.89090 + 0.89090i$
3. $k = 2 \quad \xrightarrow{\varphi} \quad \sqrt[3]{2} \cdot e^{i\frac{17\pi}{12}} = -0.32609 - 1.2170i$

4.2 EXERCICES - Nombres complexe

Ex 4.1. Calculer :

1. $(2+i)+(3-2i)$
2. $((2+3i)+(3-3i))(-1+2i)$
3. $(2+3i)(-1+2i)+(3-3i)(-1+2i)$

Solution

Ex 4.2. Démontrer les égalités suivantes :

1. $\overline{(z+w)}=\overline{z}+\overline{w}$
2. $\overline{(zw)}=\overline{z}\cdot\overline{w}$
3. $z\cdot\overline{z}\in[0;+\infty[$
4. $z+\overline{z}=2\,\mathrm{Re}\,(z)$
5. $z-\overline{z}=2\,\mathrm{Im}\,(z)$
6. $\frac{|z|}{z}=\frac{\overline{z}}{|z|}$ avec $|z|=\sqrt{z\overline{z}}$

Solution

Ex 4.3. Calculer :

1. $\frac{-1-3i}{2+2i}$
2. $\frac{2-i}{-2+3i}+\frac{-1-3i}{1-3i}$

Solution

Ex 4.4. Résoudre dans $\mathbb{C}$:

1. $x^2+1=0$
2. $x^2+2x+3=0$
3. $2x^3-x^2+2x-1=0$
4. $x^3+4x^2+6x+4=0$

Solution

Ex 4.5. Décrire de manière géométrique l'action des fonctions complexes suivantes :

1. $f(z)=z-(1+i)$
2. $f(z)=2z$
3. $f(z)=iz$
4. $f(z)=(1+i)z$
5. $f(z)=\overline{z}$

Solution

Ex 4.6. Ecrire les nombres complexes suivants sous la forme $r(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi))$.

1. $\sqrt{3}-i$
2. $\frac{1}{2}(\sqrt{3}-i)$
3. $i(1-i)$
4. $(1-i)(\sqrt{3}-i)$

Solution

Ex 4.7. Ecrire les nombres complexes suivant sous la forme $re^{i\varphi}$ et les placer sur le plan complexe.

1. $\left(\frac{2}{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}i\right)$
2. $\left(\frac{2}{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}i\right)^2$

3. $\left(\frac{2}{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}i\right)^3$
4. $\left(\frac{2}{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}i\right)^4$
5. $\left(\frac{2}{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}i\right)^5$
6. $\left(\frac{2}{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}i\right)^6$
7. $\left(\frac{2}{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}i\right)^7$
8. $\left(\frac{2}{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}i\right)^8$

Solution

Ex 4.8. Trouver la forme $a+ib$ des nombres complexes.

1. $\sqrt{-8-8\sqrt{3}\cdot i}$
2. $\sqrt[4]{-8-8\sqrt{3}\cdot i}$

Solution

Ex 4.9. Donner le lieu géométrique défini par les expressions complexes suivantes :

1. $\operatorname{Re}(z)=0$
2. $|z|=5$
3. $2\operatorname{Re}(z)+\operatorname{Im}(z)=-2$
4. $|z+(2-3i)|=4$
5. $|z-1|=\operatorname{Re}(z)+1$

Solution

Ex 4.10. Calculer le module des nombres complexes suivants :

1. $3-4i$
2. $7i$
3. $\cos(t)+i\sin(t)$

Solution

Ex 4.11. Calculer :

1. $(\overline{2-5i})+i-5(\overline{2+3i})$

Solution

Ex 4.12. Soit $z_1=43-11i$ et $z_2=8-i$. Calculer le nombre complexe conjugué de :

1. z_1z_2
2. $(z_1+z_2)^2$
3. $\dfrac{z_1}{z_2}$

Solution

Ex 4.13. Mettre les nombres complexes suivants sous la forme trigonométrique :

1. $z=3+4i$
2. $z=1$
3. $z=-i$
4. $z=-1-i$
5. $z=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}i}{2}$

Solution

Ex 4.14. Mettre les nombres complexes suivants sous forme algébrique :

1. $[4; \frac{\pi}{2}]$
2. $[\sqrt{2}; \frac{\pi}{4}]$
3. $[2; 330°]$

Solution

Ex 4.15. Calculer et donner la réponse sous forme algébrique.

1. $[2; \frac{\pi}{4}] \cdot [3; \frac{\pi}{6}]$
2. $\left(1 + i\sqrt{3}\right)^3$
3. $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{1+i\sqrt{3}}\right)^9$

Solution

Ex 4.16. Calculer les formes algébriques des deux racines carrées complexes de :

1. $z = 1$
2. $z = i$
3. $z = -i$
4. $z = 1 - \sqrt{3}i$

Solution

Ex 4.17. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2 = 25$
2. $z^2 = 6i$
3. $z^2 + z + 1 = 0$
4. $2iz^2 + 3(1 + i)z + 3 - i = 0$

Solution

Ex 4.18. Déterminer toutes les valeurs que peut prendre z dans les équations suivantes :

1. $z^4 = 1$
2. $z^3 = 1 + i$

Solution

Ex 4.19. Vérifier que i est une solution de

$$x^3 + (-5 - 6i)x^2 + (-5 + 18i)x + 13 = 0$$

et calculer les deux solutions restantes dans $\mathbb{C}$.

Solution

4.3 SOLUTIONS - Exercices Nombres complexes

Solution Ex 4.1. →4.1.

1. $(2 + i) + (3 - 2i) = (2 + 3) + i(1 - 2) = 5 - i$

2.
$$((2+3i)+(3-3i))(-1+2i) = 5(-1+2i) = -5+10i$$

3.
$$\begin{aligned}(2+3i)(-1+2i)+(3-3i)(-1+2i) &= ((-2-6)+i(-3+4))+((-3+6)+i(3+6))\\ &= (-8+i)+(3+9i)\\ &= -5+10i\end{aligned}$$

Solution Ex 4.2. →4.2.
Soit $z = x_1 + iy_1$ et $w = x_2 + iy_2$.

1. $\overline{(z+w)} = \overline{z} + \overline{w}$

$$\begin{aligned}\overline{(z+w)} &= \overline{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)}\\ &= (x_1+x_2)-i(y_1+y_2)\\ &= (x_1-iy_1)+(x_2-iy_2)\\ &= \overline{x_1+iy_1}+\overline{x_2+iy_2}\\ &= \overline{z}+\overline{w}\end{aligned}$$

2. $\overline{(zw)} = \overline{z}\cdot\overline{w}$

$$\begin{aligned}\overline{z}\cdot\overline{w} &= \overline{(x_1+iy_1)}\cdot\overline{x_2+iy_2}\\ &= (x_1-iy_1)\cdot(x_2-iy_2)\\ &= (x_1x_2-y_1y_2)+i(-y_1x_2-x_1y_2)\\ &= (x_1x_2-y_1y_2)-i(y_1x_2+x_1y_2)\\ &= \overline{(x_1x_2-y_1y_2)+i(y_1x_2+x_1y_2)}\\ &= \overline{(x_2+iy_1)(x_2+iy_2)}\\ &= \overline{zw}\end{aligned}$$

3. $z\cdot\overline{z}\in[0;+\infty[$

$$\begin{aligned}z\cdot\overline{z} &= (x_1+iy_1)(x_1-iy_1)\\ &= (x_1^2-ix_1y_1+iy_1x_1-i^2y_2^2)\\ &= (x_1^2-i^2y_1^2)\\ &= (x_1^2+y_1^2)\end{aligned}$$

La somme de deux carré est toujours positive donc $z\cdot\overline{z}\in[0;+\infty[$.

4. $z+\overline{z} = 2\,\mathrm{Re}\,(z)$

$$z+\overline{z} \;=\; (x_1+iy_1)+(x_1-iy_1) = 2x_1 = 2\,\mathrm{Re}\,(z).$$

5. $z-\overline{z} = 2\,\mathrm{Im}\,(z)$

$$z-\overline{z} \;=\; (x_1+iy_1)-(x_1-iy_1) = i2y_1 = 2\,\mathrm{Im}\,(z).$$

6. $\dfrac{|z|}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|}$ avec $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$

   Commençons par remarquer que :

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{(x-iy)}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

   Ensuite,

$$\frac{|z|}{z} = |z|\frac{1}{z} = |z|\frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{\overline{z}}{|z|}.$$

Solution Ex 4.3. →4.3.

1. $\dfrac{-1-3i}{2+2i}$

$$\begin{aligned}\frac{-1-3i}{2+2i} &= \frac{(-1-3i)(2-2i)}{(2+2i)(2-2i)} \\ &= \frac{(-8-4i)}{8} \\ &= -1-\frac{i}{2}\end{aligned}$$

2. $\dfrac{2-i}{-2+3i} + \dfrac{-1-3i}{1-3i}$

$$\begin{aligned}\frac{(2-i)(-2-3i)}{(-2+3i)(-2-3i)} + \frac{(-1-3i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)} &= \frac{-1-8i}{13} + \frac{8-6i}{10} \\ &= \frac{-1-8i}{13} + \frac{4-3i}{5} \\ &= \frac{-57}{65} + \frac{i}{65}\end{aligned}$$

Solution Ex 4.4. →4.4.
Résoudre dans $\mathbb{C}$:

1. $x^2+1=0$

$$x^2+1=0 \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad x = \pm\sqrt{-1} \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad x \in \{-i, i\}.$$

2. $x^2+2x+3=0$

   $x^2+2x+3=0 \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad (x+1)^2+2=0 \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad (x+1)^2-(\sqrt{-2})^2 \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad (x+1)^2-i(\sqrt{2})^2$

   On factorise :

$$(x+1-i\sqrt{2})(x+1+i\sqrt{2})=0 \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad (x-(-1+i\sqrt{2}))(x-(-1-i\sqrt{2}))$$

   Les solutions sont complexes

$$x \in \{(-1+i\sqrt{2}), (-1-i\sqrt{2})\}$$

   .

3. $2x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0$
   Par inspection on remarque que $x = \frac{1}{2}$ est une solution du polynôme. En divisant celui-ci par $(x - \frac{1}{2})$ on obtient :

$$
\begin{array}{rrrr|ll}
2x^3 & -x^2 & +2x & -1 & x - \frac{1}{2} & \\ \cline{5-6}
2x^3 & -x^2 & & & 2x^2 & +2 \\ \cline{1-2}
 & 0 & +2x & -1 & & \\
 & 0 & +2x & -1 & & \\ \cline{3-4}
 & & 0 & 0 & & \\
\end{array}
$$

   Donc,

$$2x^3 - x^2 + 2x - 1 = 2(x^2 + 1)\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$$

   Dans l'ensemble des nombres réels cette équation n'a que la solution $x = \frac{1}{2}$, mais dans l'ensemble des nombres complexes, il faut lui ajouter les deux solutions de $x^2 + 1 = 0$. De l'exercice précédent on connait les solutions de $x^2 + 1 = 0$. Les solutions de $2x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0$ sont

$$x \in \{\frac{1}{2}, (-1 + i\sqrt{2}), (-1 - i\sqrt{2})\}.$$

4. $x^3 + 4x^2 + 6x + 4 = 0$
   On remarque que -2 est une racine réelle du polynôme, donc,

$$
\begin{array}{rrrr|lll}
x^3 & +4x^2 & +6x & +4 & x + 2 & & \\ \cline{5-7}
x^3 & +2x^2 & & & x^2 & +2x & +2 \\ \cline{1-2}
 & 2x^2 & +6x & & & & \\
 & 2x^2 & +4x & & & & \\ \cline{2-3}
 & & 2x & +4 & & & \\
 & & 2x & +4 & & & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 & & & \\
\end{array}
$$

   On peut résoudre $x^2 + 2x + 2 = 0$ en utilisant la méthode du discriminant. Posons $a = 1$, $b = 2$ et $c = 2$.

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
&= \frac{-2 + \sqrt{-4}}{2} \\
&= \frac{-2 + 2i}{2} \\
&= -1 + i
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_2 &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
&= \frac{-2 - \sqrt{-4}}{2} \\
&= \frac{-2 - 2i}{2} \\
&= -1 - i
\end{aligned}
$$

   Les solution de $x^3 + 4x^2 + 6x + 4 = 0$ sont $S = \{-2, -1 + i, -1 - i\}$.

Solution Ex 4.5. →4.5. Décrire de manière géométrique l'action des fonctions complexes suivantes :

1. $f(z) = z - (1+i)$ On peut récrire f de la manière suivante :

$$f(z) = f(x+iy) = x + iy - (1+i) = (x-1) + i(y-1)$$

La fonction correspond à une translation de vecteur $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ dans le plan géométrique.

2. $f(z) = 2z$
La partie imaginaire et la partie réelle du nombre complexe z sont multipliées par 2, il s'agit d'une homothétie de rapport 2 par rapport à l'origine.

3. $f(z) = iz$
Pour se rendre compte de l'effet de la multiplication d'un nombre complexe par i on le met sous forme exponentiel, soit $z = \rho e^{i\theta}$, où ρ est le module et θ l'argument de z et on le multiplie par$i = e^{i\frac{\pi}{2}}$,

$$iz = e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot e^{i\theta} = e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)}$$

Le nombre z a subit une rotation de 90° dans le sens direct.

4. $f(z) = (1+i)z$
On fait la même chose qu'au point précédent, $z = \rho e i\theta$ et $(1+i) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

$$f(z) = (1+i)z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot \rho e^{i\theta} = \sqrt{2}\rho e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)}$$

Géométriquement parlant c'est une homothétie de rapport $\sqrt{2}$ suivie d'une rotation de 45° dans le sens direct (ou l'inverse).

5. $f(z) = \overline{z}$
Prendre le conjugué d'un nombre complexe consiste à multiplier sa partie imaginaire par -1, donc de lui faire subir une symétrie axiale par rapport à l'axe horizontal.

Solution Ex 4.6. →4.6.

1. $\sqrt{3} - i$

On calcule le module r et l'argument φ :

$$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2 \quad \text{et} \quad \varphi = \begin{cases} \cos(\varphi) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\varphi) = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{6}$$

La forme trigonométrique est :

$$2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2\left(\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right)$$

2. $\frac{1}{2}(\sqrt{3}-i)$

   On peut se baser sur le résultat précédent. L'argument ne change pas et le module est divisé par deux. La forme trigonométrique est donc

$$\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)$$

3. $i(1-i)=(i-i^2)=i+1=1+i$

   Une rapide inspection permet de déterminer $r=\sqrt{2}$ et $\varphi=\frac{\pi}{4}$. La forme trigonométrique est :

$$\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

4. $(1-i)(\sqrt{3}-i)$

   On sait déjà que

$$\sqrt{3}-i=2\left(\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right)$$

   D'autre part :

$$\begin{aligned}1-i &= \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\\ &= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right)\end{aligned}$$

   Multiplier deux nombres complexes entre eux revient à multiplier leurs modules et additionner leurs arguments. Donc

$$\begin{aligned}(1-i)(\sqrt{3}-i) &= 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{11\pi}{6}+\frac{7\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{11\pi}{6}+\frac{7\pi}{4}\right)\right)\\ &= 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{43\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{43\pi}{12}\right)\right)\\ &= 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{43\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{43\pi}{12}\right)\right)\end{aligned}$$

   Les résultats se donnent avec un argument compris entre $[0;2\pi]$ donc,

$$(1-i)(\sqrt{3}-i) = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{19\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{19\pi}{12}\right)\right)$$

Solution Ex 4.7. $\rightarrow$4.7.
On commence par écrire la forme exponentielle de $\frac{2}{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}i$. On cherche le module et l'argument :

$$r=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{4}{3}\quad \text{et}\quad \varphi=\begin{cases}\cos(\varphi)=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}}=\frac{1}{2}\\ \sin(\varphi)=\frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\frac{4}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}\quad \Rightarrow \varphi=\frac{\pi}{3}$$

La forme exponentielle est :

$$\left(\frac{2}{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}i\right)=\frac{4}{3}\cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$$

Donc :

1. $\left(\frac{2}{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}i\right)=\frac{4}{3}\cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$
2. $\left(\frac{2}{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}i\right)^2=\left(\frac{4}{3}\cdot e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2=\frac{16}{9}\cdot e^{i\frac{2\pi}{3}}$
3. $\left(\frac{2}{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}i\right)^3=\left(\frac{4}{3}\cdot e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^3=\frac{64}{27}\cdot e^{i\pi}=-\frac{64}{27}$ (c'est un réel pur)
4. $\left(\frac{2}{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}i\right)^4=\left(\frac{4}{3}\cdot e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^4=\frac{256}{81}\cdot e^{i\frac{4\pi}{3}}$
5. $\left(\frac{2}{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}i\right)^5=\left(\frac{4}{3}\cdot e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^5=\frac{1024}{243}\cdot e^{i\frac{5\pi}{3}}$
6. $\left(\frac{2}{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}i\right)^6=\left(\frac{4}{3}\cdot e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^6=\frac{4096}{729}\cdot e^{i2\pi}=\frac{4096}{729}\cdot e^{i0}=\frac{4096}{729}$ (c'est un réel pur)
7. $\left(\frac{2}{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}i\right)^7=\left(\frac{4}{3}\cdot e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^7=\frac{16384}{2187}\cdot e^{i\frac{7\pi}{3}}=\frac{16384}{2187}\cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$
8. $\left(\frac{2}{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}i\right)^8=\left(\frac{4}{3}\cdot e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^8=\frac{65536}{6561}\cdot e^{i\frac{8\pi}{3}}=\frac{65536}{6561}\cdot e^{i\frac{2\pi}{3}}$

Voir FIGURE 4.4

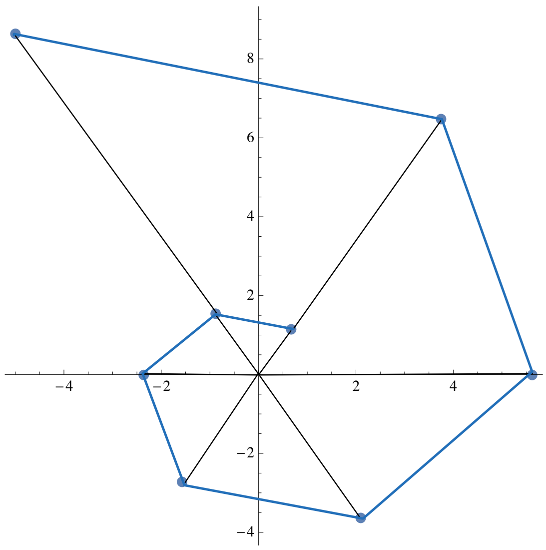


FIGURE 4.4 – Exercice 4.7

Solution Ex 4.8. →4.8. On commence par récrire l'expression sous la racine

$$-8-8\sqrt{3}\cdot i \quad = \quad 8(-1-\sqrt{3}i)$$

Calculons le module et l'argument de $(-1-\sqrt{3}i)$:

$$r=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}=2, \quad \varphi=\begin{cases}\cos(\varphi)=-\frac{1}{2}\\ \sin(\varphi)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases} \quad \Rightarrow \quad \varphi=\frac{4\pi}{3}$$

En substituant les valeurs obtenues $r=2$ et $\varphi=\frac{4\pi}{3}$ dans $r(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi))$ on obtient :

$$\begin{aligned} 8(-1-\sqrt{3}i) \quad &\xrightarrow{\varphi} \quad 8\left(2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)\right) \\ &= \quad 16\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) \end{aligned}$$

On peut maintenant récrire les énoncés de cette manière :

1. $\sqrt{8(-1-\sqrt{3}i)} = \left(16\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)\right)^{\frac{1}{2}}$
2. $\sqrt[4]{8(-1-\sqrt{3}i)} = \left(16\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)\right)^{\frac{1}{4}}$

Dont les résultats sont (en appliquant la formule de De Moivre [4.1.5]) :

1. $4\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 4\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2 + 2\sqrt{3}i.$
2. $2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + \sqrt{3}i$

Solution Ex 4.9. $\rightarrow$4.9.

Dans cet exercice on utilise l'isomorphisme qui existe entre le plan z des nombres complexes $\mathbb{C}$ et l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$. On établit la correspondance entre les deux espaces en posant $z = x + iy$ et en utilisant ensuite x et y comme on le fait en géométrie.

Les égalités suivantes sont importantes :

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(z) &= \operatorname{Im}(x+iy) = y \in \mathbb{R} \\ \operatorname{Re}(z) &= \operatorname{Re}(x+iy) = x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Remarque 6. *Ne pas oublier la relation :*

$$(x;y) \in \mathbb{R}^2 \quad \overset{\textit{isomorphisme}}{\longrightarrow} \quad (1\cdot x + i\cdot y) \in \mathbb{C}$$

La lettre i est l'unité de la partie imaginaire du nombre complexe z, elle n'apparait pas lorsque l'on prend la partie imaginaire d'un nombre complexe :

$$\operatorname{Im}(x+iy) = y \quad \textit{et non} \quad iy.$$

La partie imaginaire $\operatorname{Im}(z)$ du nombre complexe z est un nombre réel !

1. $\operatorname{Re}(z) = 0 \quad \overset{\looparrowright}{\longrightarrow} \quad \operatorname{Re}(x+iy) = 0 \quad \overset{\looparrowright}{\longrightarrow} \quad x = 0.$
   Le lieu est l'axe imaginaire (tout les nombres ont une partie réelle nulle).

2. <u>Rappel :</u> En géométrie l'expression $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ est l'expression d'un cercle de rayon r centré au point $(a;b)$.

   $|z| = 5 \quad \overset{\looparrowright}{\longrightarrow} \quad |x+iy| = 5 \quad \overset{\looparrowright}{\longrightarrow} \quad \sqrt{x^2+y^2} = 5 \quad \overset{\looparrowright}{\longrightarrow} \quad x^2 + y^2 = 25.$
   Le lieu cherché est le cercle de rayon 5 centré à l'origine.

3. $2\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) = -2 \quad \overset{\looparrowright}{\longrightarrow} \quad 2\operatorname{Re}(x+iy) + \operatorname{Im}(x+iy) = -2 \quad \overset{\looparrowright}{\longrightarrow} \quad 2x + y = -2.$
   C'est la droite d'équation cartésienne $2x + y + 2 = 0$ ou d'équation cartésienne réduite $y = -2x - 2$.

4. $|z + (2-3i)| = 4 \quad \overset{\looparrowright}{\longrightarrow} \quad |x + iy + 2 - 3i| = 4 \quad \overset{\looparrowright}{\longrightarrow} \quad |(x+2) + i(y-3)| = 4$ d'où :

   $$\sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2} = 4 \quad \overset{\looparrowright}{\longrightarrow} \quad (x+2)^2 + (y-3)^2 = 16.$$

   Il s'agit du cercle de rayon $r = 4$ centré au point $(-2;3)$.

5. $|z-1| = \mathrm{Re}\,(z)+1$.

$$\begin{aligned}
|z-1| = \mathrm{Re}\,(z)+1 \quad &\xrightarrow{z\,=\,x+iy} \quad |x+iy-1| = \mathrm{Re}\,(x+iy)+1 \\
&\xrightarrow{\looparrowright} \quad \sqrt{(x-1)^2+y^2} = x+1 \\
&\xrightarrow{\looparrowright} \quad (x-1)^2+y^2 = (x+1)^2 \\
&\xrightarrow{\looparrowright} \quad x^2-2x+1+y^2 = x^2+2x+1 \\
&\xrightarrow{\looparrowright} \quad y^2 = 4x \\
&\xrightarrow{\looparrowright} \quad x = \frac{y^2}{4}.
\end{aligned}$$

Le lieu est la parabole dessinée à la FIGURE 4.5.

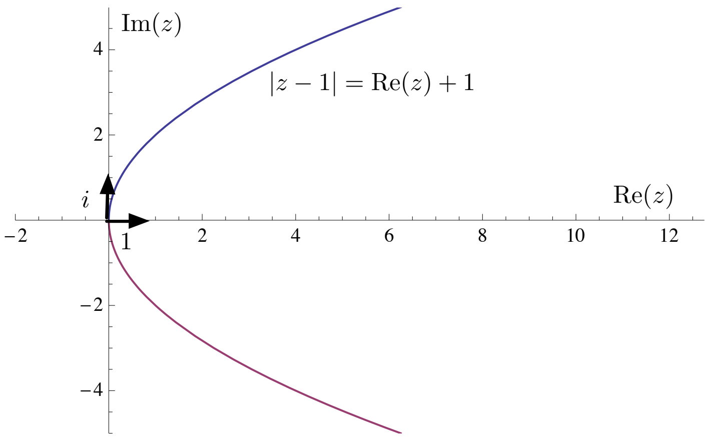


FIGURE 4.5 – Exercice 4.9

Solution Ex 4.10. →4.10.
Le module ρ d'un nombre complexe $z = x+iy$ est donné par

$$\rho = |z| = |x+iy| = \sqrt{x^2+y^2}$$

1. $3-4i \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad \rho = \sqrt{3^2+(-4)^2} = 5.$
2. $7i = 0+7i \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad \rho = \sqrt{0^2+7^2} = 7$
3. $\cos(t)+i\sin(t) \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad \rho = \sqrt{\sin^2(t)+\cos^2(t)} = 1$

Solution Ex 4.11. →4.11.
Le nombre complexe conjugué de $z = x+iy$ est le nombre $\overline{z} = \overline{x+iy} = x-iy$.

1. On récrit $(\overline{2-5i})+i-5(\overline{2+3i})$ en appliquant la définition ci-dessus :

$$(\overline{2-5i})+i-5(\overline{2+3i}) = (2+5i)+i-5(2-3i) = 2+5i+i-10+15i = -8+21i$$

Solution Ex 4.12. →4.12.
Rappel :

$\forall z, z_1,\ z_2 \neq 0 \in \mathbb{C}$:

- **a)** $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- **b)** $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
- **c)** $\overline{\dfrac{z_1}{z_2}} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$
- **d)** $\operatorname{Im}(z_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{z_1} = z_1$
- **e)** $|\overline{z_1}| = |z|$
- **f)** $z \cdot \overline{z} = |z|^2$
- **g)** $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$

1. On utilise la propriété **b)**.

$$\overline{(43-11i)(8-i)} = \overline{(43-11i)} \cdot \overline{(8-i)}$$
$$\overline{(333-131i)} = (43+11i)(8+i)$$
$$(333+11i) = (333+11i)$$

2. On utilise les propriétés a) et b)

$$\begin{aligned} \overline{(z_1+z_2)^2} &= \overline{(z_1+z_2)(z_1+z_2)} \\ &= \overline{(z_1+z_2)} \cdot \overline{(z_1+z_2)} \\ &= (\overline{z_1}+\overline{z_2}) \cdot (\overline{z_1}+\overline{z_2}) \\ &= (\overline{z_1}+\overline{z_2})^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{((43-11i)+(8-i))^2} &= \left(\overline{(43-11i)} + \overline{(8-i)}\right)^2 \\ \overline{(51-12i)^2} &= ((43+11i)+(8+i))^2 \\ \overline{(2457-1224i)} &= (51+12i)^2 \\ (2457+1224i) &= (2457+1224i) \end{aligned}$$

3. On utilise la propriété **c)**.

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

$$\begin{aligned} \overline{\left(\frac{43-11i}{8-i}\right)} &= \frac{\overline{43-11i}}{\overline{8-i}} \\ \overline{\left(\frac{(43-11i)(8+i)}{(8-i)(8+i)}\right)} &= \frac{43+11i}{(8+i)} \\ \overline{\left(\frac{71}{13} - \frac{9i}{13}\right)} &= \frac{(43+11i)(8-i)}{(8+i)(8-i)} \\ \frac{71}{13} + \frac{9i}{13} &= \frac{71}{13} + \frac{9i}{13} \end{aligned}$$

Solution Ex 4.13. →4.13.
La forme trigonométrique est définie par

$$[\rho, \theta] = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

où

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad \theta, \text{ tel que} \begin{cases} \cos(\theta) = \frac{x}{\rho} \\ \sin(\theta) = \frac{y}{\rho} \end{cases}$$

Donc :

1. $z = 3 + 4i$

$$\rho = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5, \quad \theta = \begin{cases} \cos(\theta) = \frac{3}{5} \\ \sin(\theta) = \frac{4}{5} \end{cases} \qquad \Rightarrow \quad \theta \approx 53°.$$

La forme trigonométrique cherchée est $[5, 53°]$

2. $z = 1 + 0i$

$$\rho = \sqrt{1^2 + 0^1} = 1, \quad \theta = \begin{cases} \cos(\theta) = \frac{1}{1} \\ \sin(\theta) = \frac{0}{1} \end{cases} \qquad \Rightarrow \quad \theta = 0.$$

La forme trigonométrique cherchée est $[1, 0]$.

3. $z = 0 - i$

$$\rho = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1, \quad \theta = \begin{cases} \cos(\theta) = \frac{0}{1} \\ \sin(\theta) = \frac{-1}{1} \end{cases} \qquad \Rightarrow \quad \theta = -\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

La forme trigonométrique cherchée est $[1, -\frac{\pi}{2}]$ ou $[1, \frac{3\pi}{2}]$.

4. $z = -1 - i$

$$\rho = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}, \quad \theta = \begin{cases} \cos(\theta) = \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \sin(\theta) = \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{cases} \qquad \Rightarrow \quad \theta = \frac{5\pi}{4}$$

La forme trigonométrique cherchée est $[1, \frac{5\pi}{4}]$.

5. $z = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}i}{2}$

$$\rho = \sqrt{\frac{1}{2}^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{1} = 1, \quad \theta = \begin{cases} \cos(\theta) = \frac{1}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \qquad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{3}$$

La forme trigonométrique cherchée est $[1, \frac{\pi}{3}]$.

Solution Ex 4.14. →4.14.
On obtient la forme algébrique en effectuant la transformation :

$$x + iy = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = [\rho;\theta]$$

1. $[4; \frac{\pi}{2}] \quad \overset{\hookrightarrow}{\longrightarrow} \quad 4(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)) = 0 + 4i = 4i$
2. $[\sqrt{2}; \frac{\pi}{4}] \quad \overset{\hookrightarrow}{\longrightarrow} \quad \sqrt{2}(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + i$
3. $[2; 330°] = [2; \frac{11\pi}{6}] \quad \overset{\hookrightarrow}{\longrightarrow} \quad (\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) = 2(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}) = \sqrt{3} - i$

Solution Ex 4.15. →4.15.

1. 1ère méthode :
   On peut transformer les deux nombres complexes sous la forme trigonométrique :
   $$[2;\frac{\pi}{4}] = 2(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)) = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2} = \sqrt{2}(1+i)$$
   $$[3;\frac{\pi}{6}] = 3(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)) = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = \frac{3}{2}\left(\sqrt{3} + i\right)$$
   Puis on effectue la multiplication :
   $$\begin{aligned}\sqrt{2}\frac{3}{2}\left((1+i)(\sqrt{3}+i)\right) &= \frac{3}{\sqrt{2}}\left((\sqrt{3}-1) + i(\sqrt{3}+1)\right)\\ &= \frac{3\left(\sqrt{3}-1\right)}{\sqrt{2}} + i\frac{3}{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)\\ &\approx 1.55\ + 5.8i\end{aligned}$$
   2ème méthode :
   On transforme les deux nombres complexes sous leur forme exponentielle :
   $$[2;\frac{\pi}{4}] = 2\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$$
   $$[3;\frac{\pi}{6}] = 3\cdot e^{i\frac{\pi}{6}}$$
   Puis on effectue la multiplication qui s'avère beaucoup plus simple :
   $$\begin{aligned}2\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}\cdot 3\cdot e^{i\frac{\pi}{6}} &= 6\cdot e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)}\\ &= 6e^{\frac{5\pi}{12}}\end{aligned}$$
   On passe à la forme trigonométrique par le théorème d'Euler ($e^{i\theta} = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))$) :
   $$6e^{\frac{5\pi}{12}} = 6\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right) \approx 1.55\ + 5.8i.$$
2. 1ère méthode : Formule de De Moivre
   On récrit le nombre complexe dans sa forme trigonométrique :
   $$\left(1 + i\sqrt{3}\right)^3 = \left(2(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right))\right)^3$$
   En appliquant la formule de De Moivre ($(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = (\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$), on obtient :
   $$\begin{aligned}\left(2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\right)^3 &= 2^3\cdot(\cos(\pi) + i\sin(\pi))\\ &= 8(-1+0i) = -8.\end{aligned}$$

2ème méthode : Formule d'Euler
On récrit le nombre complexe sous sa forme exponentielle à l'aide de la formule d'Euler :

$$\left(1+i\sqrt{3}\right)^3 = \left(2\cdot e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^3$$

puis,

$$\left(2\cdot e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^3 = 8\cdot e^{i\pi} = 8\cdot -1 = -8$$

3. On récrit le dénominateur et le numérateur sous leur forme exponentielle :

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sqrt{3}-i}{1+i\sqrt{3}}\right)^9 &= \left(\frac{2\cdot e^{-i\frac{\pi}{6}}}{2\cdot e^{i\frac{\pi}{3}}}\right)^9\\ &= \left(e^{i\left(-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)}\right)^9\\ &= \left(e^{-i\frac{\pi}{2}}\right)^9\\ &= e^{-i\frac{9\pi}{2}}\\ &= e^{-i\frac{\pi}{2}}\end{aligned}$$

On met sous forme algébrique en passant par la forme trigonométrique,

$$\begin{aligned}e^{-i\frac{\pi}{2}} &= \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\\ &= 0-i\\ &= -i\end{aligned}$$

Solution Ex 4.16. →4.16.
Rappel :
Pour trouver les k racines ω_k du nombre complexe $\sqrt[k]{z}$ on utilise la formule suivante :

$$\omega_n = |z|^{\frac{1}{k}}\cdot e^{\frac{i\,\theta}{k}}\cdot e^{\frac{i\,2n\pi}{k}} \text{ avec } n=(0..(k-1))$$

Dans notre cas on cherche les racines carrées, donc $k=2$. La formule se réduit aux deux valeurs

$$\begin{aligned}\omega_0 &= |z|^{\frac{1}{2}}\cdot e^{\frac{i\,\theta}{2}}\\ \omega_1 &= |z|^{\frac{1}{2}}\cdot e^{\frac{i\,\theta}{2}}\cdot e^{i\pi}\\ &= |z|^{\frac{1}{2}}\cdot e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)}\end{aligned}$$

La première racine carrée d'un nombre complexe z donné sous forme exponentielle est égale à la racine carrée de son module multipliée par l'exponentielle complexe de la moitié de son argument. La deuxième racine est obtenue en ajoutant la valeur π à l'argument de la première racine.

1. $z=1$
   La forme exponentielle de 1 est $z=e^{i\cdot 0}$, donc

$$\omega_0 = \sqrt{1}e^{i\frac{0}{2}} = 1$$
$$\omega_1 = \sqrt{1}e^{i(0+\pi)} = -1$$

   Les deux racines sont 1 et -1.

2. $z = i$
   La forme exponentielle de i est $z = e^{i\frac{\pi}{2}}$, donc

$$\omega_0 = \sqrt{1}e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$$
$$\omega_1 = \sqrt{1}e^{i\left(\frac{5\pi}{4}\right)} = \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1-i)$$

   Les deux racines carrées de i sont $\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ et $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1-i)$.

3. $z = -i$
   La forme exponentielle de $-i$ est $z = e^{-i\frac{\pi}{2}}$, donc

$$\omega_0 = \sqrt{1}e^{-i\frac{\pi}{4}} = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$$
$$\omega_1 = \sqrt{1}e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)$$

   Les deux racines carrées de $-i$ sont $\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$ et $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)$.

4. $z = 1-\sqrt{3}i$
   La forme exponentielle de $1-\sqrt{3}i$ est $z = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$, donc

$$\omega_0 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\omega_1 = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{6}\right)} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{\frac{3}{2}} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

   Les deux racines carrées de $1-\sqrt{3}i$ sont $\sqrt{\frac{3}{2}} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $-\sqrt{\frac{3}{2}} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Solution Ex 4.17. →4.17.

1. $z^2 = 25$
   Le polynôme est de degré 2, on connait déjà deux solutions 5 et -5, il ne peut pas y en avoir d'autre.

2. $z^2 = 6i$
   Les racines carrées de $6i$ sont faciles à calculer de tête, leur module sera $\sqrt{6}$ et les arguments seront $\frac{\pi}{4}$ (la moitié de $\frac{\pi}{2}$) et $\frac{5\pi}{4}$ ($\frac{\pi}{4}+\pi$). Donc on a,

$$z_1 = \sqrt{6}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{6}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{3} + i\sqrt{3} = \sqrt{3}(1+i)$$
$$z_2 = \sqrt{6}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{6}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\sqrt{3} - i\sqrt{3} = \sqrt{3}(-1-i)$$

   Les solutions sont $z_1 = \sqrt{3}(1+i)$ et $z_2 = \sqrt{3}(-1-i)$.

3. $z^2+z+1=0$
   On peut utiliser la méthode du début du carré, on commence par factoriser z^2+z+1

$$z^2+z+1=\left(z-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+1=\left(z-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{3}{4}\right)$$

les 2 racines carrées de $-\frac{3}{4}$ sont $\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. La factorisation est donc égale à

$$\left(z-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(z-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\left(z-\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)\left(z-\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$

En égalant l'expression ci-dessus à zéro, on trouve les deux racines :

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ z_2 &= \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

4. $2iz^2+3(1+i)z+3-i=0$ On peut poser :

$$\begin{aligned} a &= 2i \\ b &= 3(1+i)=3+3i \\ c &= 3-i \end{aligned}$$

et résoudre à l'aide de la formule de Viète. Le discriminant est :

$$\Delta=b^2-4ac=(3+3i)^2-(4\cdot 2i\cdot(3-i))=18i-24i+8=-8-6i$$

On remarque que $-8-6i=1-6i-9=1-6i+9i^2$ donc que $8-6i=(1-3i)^2=\Delta$.

$$\begin{aligned} x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} &= \frac{-3-3i+\sqrt{(1-3i)^2}}{4i} \\ &= \frac{-3-3i+1-3i}{4i} \\ &= \frac{(-2-6i)(-4i)}{(4i)(-4i)} \\ &= -\frac{3}{2}+\frac{i}{2} \\ x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} &= \frac{-3-3i-\sqrt{(1-3i)^2}}{4i} \\ &= \frac{-3-3i-1+3i}{4i} \\ &= \frac{-4}{4i}=-\frac{1}{i}=-\frac{-i}{i(-i)}=\frac{i}{1} \\ &= i \end{aligned}$$

Les solutions de l'équation sont $x_1=-\frac{3}{2}+\frac{i}{2}$ et $x_2=i$.

Solution Ex 4.18. $\rightarrow$4.18.

1. $z^4 = 1$
   Sous forme exponentielle $1 = 1 \cdot e^{i \cdot 0} = e^{i2\pi}$. Les racines sont données par l'expression :

$$\omega_n = |z|^{\frac{1}{k}} \cdot e^{\frac{i\,\theta}{k}} \cdot e^{\frac{i\,2n\pi}{k}} \text{ avec } n = (0..(k-1))$$

   avec $k = 4$ dans le cas présent.

$$\begin{aligned}
z_1 &= e^{i\frac{2\pi}{4}} \cdot e^{i\frac{2\cdot 0\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i \\
z_2 &= e^{i\frac{2\pi}{4}} \cdot e^{i\frac{2\cdot 1\pi}{4}} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)} = e^{i\pi} = -1 \\
z_3 &= e^{i\frac{2\pi}{4}} \cdot e^{i\frac{2\cdot 2\pi}{4}} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\pi\right)} = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i \\
z_4 &= e^{i\frac{2\pi}{4}} \cdot e^{i\frac{2\cdot 3\pi}{4}} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{2}\right)} = e^{i2\pi} = 1
\end{aligned}$$

2. $z^3 = 1 + i$
   Sous forme exponentielle $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. z est au cube il y a donc trois racines.

$$\begin{aligned}
z_1 &= 2^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{\pi}{12}} \cdot e^{i\frac{0\pi}{3}} = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{12}} \\
z_2 &= 2^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{\pi}{12}} \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}} = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} \\
z_3 &= 2^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{\pi}{12}} \cdot e^{i\frac{4\pi}{3}} = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{17\pi}{12}}
\end{aligned}$$

Solution Ex 4.19. $\rightarrow$4.19.

1. Vérification que i est une racine du polynôme :

$$\begin{aligned}
x^3 + (-5-6i)x^2 + (-5+18i)x + 13 = 0 \quad &\xrightarrow{x=i} \quad i^3 + (-5-6i)i^2 + (-5+18i)i + 13 = 0 \\
&\longrightarrow \quad -i + 5 + 6i - 5i - 18 + 13 = 0 \\
&\longrightarrow \quad (5 - 18 + 13) + (-1 + 6 - 5)i = 0 \\
&\longrightarrow \quad (0 + 0i) = 0 \quad \checkmark
\end{aligned}$$

   Donc, $(x - i)$ est un facteur du polynôme et $x_0 = i$ (première solution).

2. Division euclidienne par $(x - i)$:

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & +(-5-6i)x^2 & +(-5+18i)x & +13 & x - i \\ \cline{5-5}
x^3 & +(\quad -i)x^2 & & & x^2 \ +(-5-5i)x \ +13i \\ \cline{1-2}
 & (-5-5i)x^2 & +(-5+18i)x & & \\
 & (-5-5i)x^2 & +(-5+\ \ 5i)x & & \\ \cline{2-3}
 & & 13ix & +13 & \\
 & & 13ix & +13 & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

3. Résolution de l'équation quadratique $x^2 + (-5-5i)x + 13i = 0$
   On pose : $a = 1$, $b = (-5 - 5i)$ $c = 13i$.

$$\begin{aligned}
\Delta = b^2 - 4ac &= (-5(1+i))^2 - (4 \cdot 1 \cdot 13i) \\
&= 50i - 52i \\
&= -2i
\end{aligned}$$

On applique la formule de Viète :

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad = \quad \frac{(5+5i) \pm \sqrt{-2i}}{2}$$
$$= \quad \frac{(5+5i) \pm \left(\sqrt{2}\sqrt{-i}\right)}{2}$$
$$= \quad \frac{(5+5i) \pm \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}i}\right)}{2}$$
$$= \quad \frac{(5+5i) \pm (-1+i)}{2}$$

D'où

$$x_1 = 2+3i$$
$$x_2 = 3+2i$$

Les 3 solutions sont $\{i, 2+3i, 3+2i\}$.