Théorie et exercices I

Analyse 1a

Etudes de fonctions

Michel Semon

03/02/2023

Table des matières

I Étude de fonctions 4

1 Introduction à l'étude de fonctions 5

2 Étude de fonctions 6

2.1 Généralités . . . 6
2.2 Introduction . . . 6
2.2.1 Ce que l'on veut savoir. . . . 6
2.2.1.1 Etapes . . . 6
2.3 Etudes de fonction . . . 7
2.3.1 Domaine de définition . . . 7
2.3.1.1 Notations . . . 7
2.3.2 Parité . . . 7
2.3.3 EXERCICES - Domaines de définition, parité . . . 7
2.3.4 SOLUTIONS - Domaines de définition, parité . . . 8
2.3.5 Asymptotes verticales et trous . . . 9
2.3.5.1 Prolongement par continuité* . . . 9
2.3.6 EXERCICES - Asymptotes verticales et trous . . . 10
2.3.7 SOLUTIONS - Asymptotes verticales et trous . . . 10
2.3.8 Zéros et signe de la fonction . . . 10
2.3.9 Asymptotes horizontales et obliques . . . 12
2.3.9.1 Asymptotes obliques* . . . 12
2.3.9.2 Cas des polynômes rationnels . . . 12
2.3.10 EXERCICES - Asymptotes horizontales et obliques . . . 13
2.3.11 SOLUTIONS exercices - Asymptotes horizontales et obliques . . . 13
2.3.12 Extremums et paliers, tableau des croissances . . . 15
2.3.13 Graphe . . . 16
2.4 Observations sur quelques fonctions particulières . . . 16
2.4.1 Fonction valeur absolue . . . 16
2.5 Étude complète I . . . 16
2.5.1 Domaine de définition . . . 17
2.5.2 Asymptotes obliques et trous . . . 17
2.5.3 Parité . . . 18
2.5.4 Zéros et signe de la fonction . . . 18
2.5.5 Asymptotes horizontales et obliques . . . 19
2.5.6 Extremums et paliers . . . 19
2.5.7 Graphe . . . 20
2.6 EXERCICES d'étude de fonction . . . 21
2.7 SOLUTIONS - Exercices d'étude de fonction . . . 22

Index

Asymptotes horizontales, 12
asymptotes obliques, 12
Asymptotes verticales et trous, 9

division euclidienne polynomiale, 12
Domaine de définition, 7
domaine de définition, 6

Extremums et paliers, 15

Fonction impaire, 7
Fonction paire, 7
Fonction valeur absolue, 16
fonctions rationnelles, 6

Graphe, 16

Parité, 7

tableau des croissances, 15

Zéros et signe de la fonction, 10

Étude de fonctions, 6

Première partie

Étude de fonctions

Chapitre 1

Introduction à l'étude de fonctions

Dans cette brochure **Analyse 1b**, je traite uniquement l'étude de fonctions. C'est "LE" sujet de maturité par excellence, on peut presque dire que les trois ans d'études de maths tournent autour de l'étude de fonctions. C'est un sujet facile pour autant que l'on comprenne les notions principales de limites, de continuité, d'extremum et la signification de la dérivée. Tout ce qui concerne l'estimation des primitives et le calcul des intégrales se retrouve dans le fascicule **Analyse 2** qui suit celui-ci.

Chapitre 2

Étude de fonctions

2.1 Généralités

L'étude des fonctions est le sujet le plus important de tout le programme de maturité, car il fait intervenir toutes les notions apprises. (Ensemble de départ = domaine de définition).

2.2 Introduction

2.2.1 Ce que l'on veut savoir.

La fonction à étudier est une fonction de la variable réelle x à valeur réelle $f(x)$ (ou $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$). La plupart des fonctions étudiées sont des fonctions rationnelles autrement dit des fonctions ayant des polynômes au numérateur et au dénominateur.
Logiquement, on commencera par se demander sur quelle partie de $\mathbb{R}$ la fonction $f(x)$ est définie. On l'appellera cette partie (ou sous-ensemble) de $\mathbb{R}$, **domaine de définition** de $f(x)$. On le note D_f ou $D_{f(x)}$.
Après on s'intéressera au comportement de la fonction aux points où elle n'est pas définie, c'est-à-dire les points que l'on a exclus de l'ensemble de définition, ils nous donneront les **asymptotes verticales** et les **trous**. L'étude du domaine de définition nous renseignera sur l'éventuelle parité de f, que l'on vérifiera le cas échéant. L'étude du comportement de $f(x)$ lorsque x tend vers plus ou moins l'infini nous amènera à calculer les éventuelles **asymptotes horizontales** ou **obliques**. L'étude au voisinage des points où la fonction s'annule ou n'est pas définie se fait à l'aide du tableau des signes (outil simple et puissant). On poursuivra en calculant les points critiques de la fonction c'est-à-dire les points où l'accroissement est nul (dérivée nulle). Ces points sont les **extremums** (maximums, minimums) ou encore les **paliers**. Autres points importants, les **points d'inflexion** (points ou la courbure change de signe). Finalement, on trace le graphe de la fonction.

2.2.1.1 Etapes

On n'est pas forcé de suivre l'ordre de manière exacte.

1. Domaine de définition.
2. Parité.
3. Asymptotes verticales. Trous
4. Zéros et signe de la fonction (tableau des signes.)
5. Asymptotes horizontales ou obliques.
6. Extremums et paliers.
7. Étude de la croissance de f (tableau des signes de la dérivée).
8. Graphe.

2.3 Etudes de fonction

Avant de faire une étude complète d'une fonction on va regarder de plus près chacune des étapes ci-dessus.

2.3.1 Domaine de définition

Il existe 3 opérations "interdites" :

-Prendre la racine carrée d'un réel négatif,

-diviser une expression par zéro,

-prendre le logarithme d'un réel non strictement positif.

2.3.1.1 Notations

On notera le domaine de définition D_f ou encore $D_{f(x)}$. Si on doit exclure par exemple les valeurs $2, 4$,et -3 du domaine de définition d'une fonction $h(x)$, on notera

$$\begin{aligned} D_{h(x)} = D_h &= \mathbb{R}\backslash\{2, 4, -3\} \\ \text{ou parfois} \quad D_h &=]-\infty; -3[\cup]-3; 2[\cup]2; 4[\cup]4; \infty[\end{aligned}$$

2.3.2 Parité

Définition 2.3.1. ***Fonction paire***

Une fonction f est dite paire si

$$f(x) = f(-x) \tag{2.1}$$

sur son domaine de définition D_f.

Géométriquement cela se traduit par une symétrie d'axe Oy.

Définition 2.3.2. ***Fonction impaire***

Une fonction f est dite impaire si

$$f(x) = -f(-x) \tag{2.2}$$

sur son domaine de définition D_f.

Géométriquement c'est une symétrie centrale par rapport à l'origine $(0; 0)$.

Remarque 1. *Si le domaine de définition n'est pas symétrique par rapport à l'origine, il n'est pas nécessaire de tester la parité de la fonction.*

2.3.3 EXERCICES - Domaines de définition, parité

Déterminer le domaine de définition et la parité des fonctions suivantes :

1. $f(x) = x^3 + 4x^2 + 3$
2. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$
3. $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{x + 1}$
4. $f(x) = \dfrac{x^4}{x^4 - 5x^2 + 4}$
5. $f(x) = \ln(\ln(\frac{x^2-2}{x+1}))$

2.3.4 SOLUTIONS - Domaines de définition, parité

1. $f(x) = x^3 + 4x^2 + 3$
   Le domaine de définition est l'ensemble des nombres réels, $D_f = \mathbb{R}$. La fonction n'est ni paire ni impaire, on dit alors qu'elle est **sans parité** ou encore **quelconque**. Il suffit de trouver des contre-exemples :

$$\begin{array}{rcl} f(x) \overset{?}{=} f(-x) & \overset{\hookrightarrow}{\longrightarrow} & f(1) = 8 \neq 6 = f(-1) \\ f(x) \overset{?}{=} -(f-x) & \overset{\hookrightarrow}{\longrightarrow} & f(1) = 8 \neq -6 = f(-1) \end{array}$$

2. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-4} = \dfrac{x^3}{(x-2)(x+2)}$

   Les valeurs $x = 2$ et $x = -2$ annulent le dénominateur, il faut donc les enlever, donc $D_f = \mathbb{R}\backslash\{2, -2\}$.
   La fonction est impaire, car

$$f(x) \overset{?}{=} -f(-x) \quad \overset{\hookrightarrow}{\longrightarrow} \quad \frac{x^3}{x^2-4} = -\left(\frac{(-x)^3}{(-x)^2-4}\right) = -\left(\frac{-x^3}{x^2-4}\right) = \frac{x^3}{x^2-4}$$

   Remarque 2. *Il n'est pas nécessaire de tester si la fonction est paire, car la seule fonction qui est à la fois paire et impaire est la fonction nulle $f(x) = 0$.*

3. $f(x) = \dfrac{x^2+x}{x+1}$
   La fonction peut-être factorisée puis simplifiée

$$\frac{x^2+x}{x+1} = \frac{x(x+1)}{x+1} = x$$

   Mais attention ! Il s'agit avant tout d'éliminer la valeur $x = -1$ qui provoque une division par zéro. Il faut bien voir que la fonction qu'on nous donne est $f_1(x) = \frac{x^2+x}{x+1}$ et non $f_2(x) = x$. Les valeurs de f_1 et f_2 sont identiques sauf en $x = -1$ où la valeur $f_1(-1)$ est une indéterminée de type $\frac{0}{0}$. Le domaine de définition est $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$.
   La fonction est quelconque, car le domaine de définition est asymétrique.

4. $f(x) = \dfrac{x^4}{x^4-5x^2+4}$
   On factorise le dénominateur,

$$\frac{x^4}{x^4-5x^2+4} = \frac{x^4}{(x^2-1)(x^2-4)} = \frac{x^4}{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)}$$

   et on déduit que $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-2, -1, 1, 2\}$. Le domaine de définition étant symétrique il faut tester la parité de la fonction. Dans ce cas, une rapide inspection permet de déterminer qu'elle est paire.

$$f(x) = \frac{x^4}{x^4-5x^2+4} = \frac{(-x)^4}{(-x)^4-5(-x)^2+4} = f(-x)$$

5. $f(x) = \ln(\ln(\frac{x^2-2}{2x+1}))$

   Nous avons la fonction composée $f(x) = g(h(k(x))) = (g \circ h \circ k)(x)$ avec $g(x) = h(x) = \ln(x)$ et $k(x) = \frac{x^2-2}{2x+1}$.
   La fonction logarithme n'accepte pas d'argument négatif ou nul. Mais la fonction logarithme peut retourner une valeur négative si $x \in]0; 1[$. Il faut donc que l'argument de la fonction h, c.à.d la valeur de la fonction $k(x)$ soit strictement plus grande que 1.

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{x^2-2}{2x+1} > 1 & \overset{\hookrightarrow}{\longrightarrow} & \dfrac{x^2-2}{2x+1} - 1 > 0 \\ & \overset{\hookrightarrow}{\longrightarrow} & \dfrac{x^2-2x-3}{2x+1} > 0 \\ & \overset{\hookrightarrow}{\longrightarrow} & \dfrac{(x-3)(x+1)}{2x+1} > 0 \end{array}$$

   Le tableau des signes nous donne rapidement la solution de cette inéquation :

x		-1		$-\frac{1}{2}$		3	
$x-3$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$2x+1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$

Le domaine de définition de $f(x)$ est

$$D_f = \left]-1; -\frac{1}{2}\right[\cup \left]3; \infty\right[$$

et la parité est quelconque.

2.3.5 Asymptotes verticales et trous

Les asymptotes verticales sont des droites d'équation $x = v_i$ où v_i est un des points qui a été enlevé dans le domaine de définition de la fonction. Il faut cependant être attentif au fait qu'un point v_i peut également être à l'origine d'un simple trou dans la fonction. Prenons par exemple la fonction

$$g(x) = \frac{x^2+5x+6}{x+2}.$$

On a $D_g = \mathbb{R}\backslash\{-2\}$.
En factorisant g on obtient

$$g(x) = \frac{x^2+5x+6}{x+2} = \frac{(x+3)(x+2)}{x+2}$$

On voit que la fonction $g(x)$ est identiquement la fonction $x+3$ pour tout x sauf $x=-2$ et que

$$\lim_{x\to-2} \frac{x^2+5x+6}{x+2} = \lim_{x\to-2} x+3 = 1$$

existe et donc que la fonction à un simple trou en -2.

2.3.5.1 Prolongement par continuité*

Soit les 2 fonctions :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x(x-3)} \\ g(x) &= \frac{x^2-x-6}{x-3} \end{aligned}$$

Pour ces fonctions on a $D_f = D_g = \mathbb{R}\backslash\{3\}$. En factorisant $g(x)$,

$$g(x) = \frac{x^2-x-6}{x-3} = \frac{(x+2)(x-3)}{x-3}$$

on voit que celle-ci a un trou en au point d'abscisse ,3 mais que la valeur de la limite en ce point existe et vaut

$$\lim_{x\to3} \frac{(x+2)(x-3)}{x-3} = \lim_{x\to3}(x+2) = 5.$$

ce qui n'est pas le cas de la fonction $f(x) = \frac{1}{x(x-3)}$, dont la limite n'existe pas en $x=3$. La fonction $g(x)$ peut être prolongée par continuité en la notant de la manière suivante :

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-x-6}{x-3} & \text{si } x \neq 3 \\ 5 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

Ce qui en fait une fonction continue dont le domaine de définition est $\mathbb{R}$.

2.3.6 EXERCICES - Asymptotes verticales et trous

Trouver les asymptotes verticales et/ou les trous des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{x}{1-x} + \dfrac{1}{x-1}$
2. $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x-1}$
3. $f(x) = \dfrac{(x-1)}{x^2 - 2x + 1}$

2.3.7 SOLUTIONS - Asymptotes verticales et trous

1. $f(x) = \dfrac{x}{1-x} + \dfrac{1}{x-1}$
   Le domaine de définition est $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$. Si on met au dénominateur commun,
   $$f(x) = \frac{x}{1-x} + \frac{1}{x-1} = \frac{x^2 - 2x + 1}{-x^2 + 2x - 1} = \frac{x^2 - 2x + 1}{-(x^2 - 2x + 1)} = -\frac{(x-1)^2}{(x-1)^2}.$$
   En calculant la limite lorsque x tend vers -1 et 1, on obtient :
   $$\lim_{x \to -1} -\frac{(x-1)^2}{(x-1)^2} = \lim_{x \to -1} -\frac{(x-1)^2}{(x-1)^2} = -1. \tag{2.3}$$
   La fonction n'a pas d'asymptote verticale mais deux points trous en $x = 1$ et $x = -1$.
2. $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x-1}$
   Le domaine de définition est $D_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}$. La factorisation donne,
   $$f(x) = \frac{(x+2)(x-1)^2}{x-1}$$
   et la limite
   $$\lim_{x \to 1} \frac{(x+2)(x-1)^2}{x-1} = \lim_{x \to 1} (x+2)(x-1) = 0$$
   La fonction a un point trou en $x = 1$.
3. $f(x) = \dfrac{(x-1)}{x^2 - 2x + 1}$
   La factorisation donne
   $$f(x) = \frac{(x-1)}{(x-1)^2},$$
   donc $D_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}$.
   Le calcul de la limite pour x tend vers 1 donne
   $$\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)}{(x-1)^2} = \lim_{x \to 1^{\pm}} \frac{1}{(x-1)} = \pm\infty.$$
   La limite n'existe pas on a une asymptote verticale en $x = 1$.

2.3.8 Zéros et signe de la fonction

On appelle zéro d'une fonction les points d'abscisse où elle s'annule. Après avoir supprimé les points trous, on obtient les zéros en annulant le numérateur.
Le tableau des signes permet, comme son nom l'indique, de connaître le signe de la fonction.
Le plus simple est de prendre un exemple. Soit la fonction rationnelle (déjà factorisée)

$$f(x) = \frac{-2 \cdot (x^2 + 1)(x-2)(x-3)^2(x+5)(x+1)}{(x-2)^2(x-3)(x+1)(x-1)}$$

Avant toute chose, on écrit le domaine de définition $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-1, 1, 2, 3\}$. On voit que certains facteurs se répètent au numérateur et au dénominateur. Intuitivement, on voit que $(x + 1) = 0$ donnera un point trou. $(x - 3)$ “gagne” au numérateur, on aura un zéro (troué) en $x = 3$! $(x - 2)$ “gagne” au dénominateur, on aura une asymptote verticale en $x = 2$. En tenant compte de ces résultats, on peut écrire une version simplifiée de $f(x)$, que l'on appellera $g(x)$.

$$g(x) = \frac{-2 \cdot (x^2 + 1)(x - 3)(x + 5)}{(x - 2)(x - 1)}$$

Le tableau des signes de la fonction simplifiée $g(x)$ est :

x		-5		1		2		3	
-2	$-$		$-$		$-$		$-$		$-$
$x^2 + 1$	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$
$x - 3$	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x + 5$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
$x - 2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x - 1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$g(x)$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$

Le graphe de $f(x)$ se trouve à la FIGURE 2.1. Nous avons :

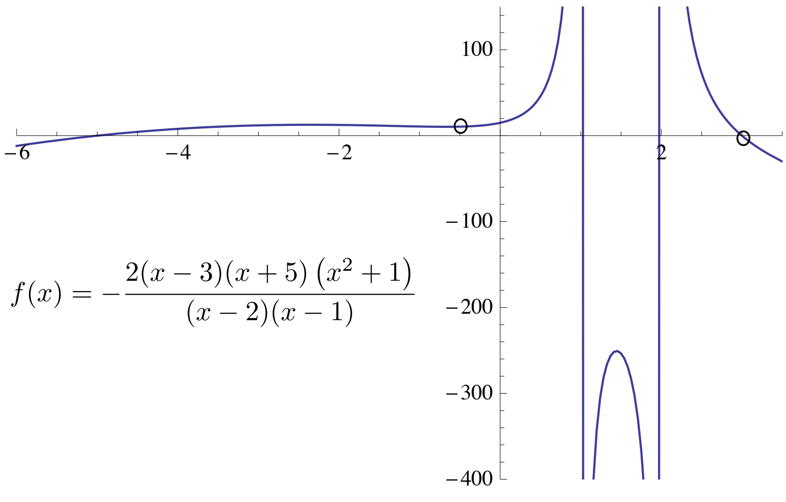

FIGURE 2.1 – Graphe de $f(x)$

des asymptotes verticales en $x = 1$ et $x = 2$,

un zéro en $x = -5$,

et des points trous (ou discontinuité de 1er ordre) en $x = -1$ et $x = 3$.

Remarque 3. *Le point $x = 3$ est à la fois un zéro et un point trou. Le point $x = -1$ n'apparait plus dans la fonction simplifiée $g(x)$, il ne faut cependant pas l'oublier.*

2.3.9 Asymptotes horizontales et obliques

Les asymptotes horizontales et obliques nous renseignent sur le comportement de la fonction lorsque x tend vers $\pm\infty$. Le calcul se fait à l'aide des limites.

2.3.9.1 Asymptotes obliques*

Deux fonctions sont dites asymptotiques lorsqu'elles se rapprochent sans jamais se toucher. On s'intéressera ici aux asymptotes obliques. On va calculer l'équation de la droite vers laquelle une fonction ayant un comportement asymptotique va tendre (voir FIGURE 2.2).

On voit que l'on doit commencer par chercher la limite formée par la différence de la fonction $f(x)$ et son

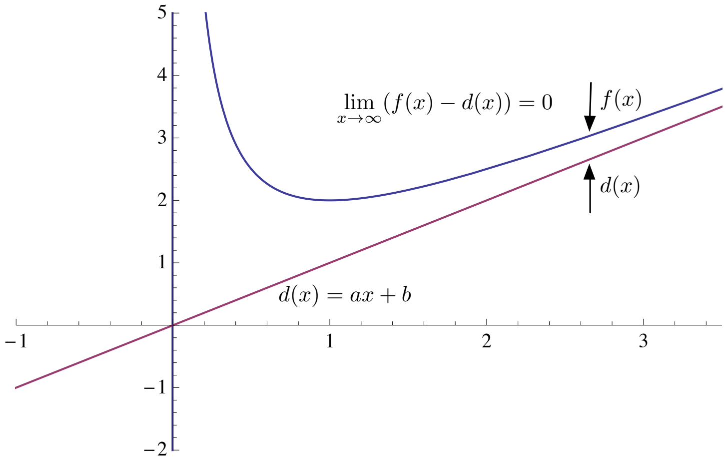

FIGURE 2.2 – L'asymptote oblique est la droite $y = ax + b$

asymptote $d(x)$ lorsque cette différence tend vers zéro et voir ce que l'on obtient :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}(f(x)-d(x)) &= \lim_{x\to\infty}(f(x)-ax)) - \lim_{x\to\infty} b = 0 \\
&= \lim_{x\to\infty}(f(x)-ax)) - b = 0
\end{aligned}$$

d'où

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x)-ax)).$$

On a obtenu une manière de calculer b, mais qui dépend de a. On cherche a,

$$\begin{aligned}
\frac{0}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{(f(x)-d(x))}{x} &= \lim_{x\to\infty}\frac{(f(x)-ax-b)}{x} = 0 \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} - \lim_{x\to\infty}\frac{ax}{x} - \lim_{x\to\infty}\frac{b}{x} = 0 \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} - a - 0 = 0
\end{aligned}$$

D'où l'on tire que

$$a = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} \quad \text{et} \quad b = \lim_{x\to\infty}(f(x)-ax)). \tag{2.4}$$

2.3.9.2 Cas des polynômes rationnels

Soit un polynôme rationnel de forme $P(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$ dont le degré du numérateur $N(x)$ est de un plus élevé que celui du dénominateur $D(x)$, la division euclidienne polynomiale $\frac{N(x)}{D(x)}$ donnera un quotient $Q(x)$ dont le degré sera celui d'une droite $d(x) = ax + b$, c.à.d un.

$$P(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)} \tag{2.5}$$

où le polynôme $R(x)$ est le reste de la division euclidienne.

Le polynôme $Q(x)$ est l'asymptote oblique et le polynôme $\delta(x) = \frac{R(x)}{D(x)}$ est la différence $P(x) - d(x)$ c'est-à-dire la valeur de l'écart entre la fonction et son asymptote. Cet écart tendra vers zéro lorsque la valeur d'abscisse x tendra vers l'infini.

Une fonction rationnelle a une asymptote horizontale lorsque le degré de son numérateur est égal à celui de son dénominateur. L'équation de cette asymptote horizontale sera le rapport des coefficients des deux termes de degré le plus élevé.

L'asymptote horizontale sera confondue avec l'axe des abscisses si le degré du dénominateur est strictement supérieur à celui du numérateur.
Dans tout les cas les asymptotes horizontales peuvent simplement être trouvées en calculant la limite suivante, si elle existe :

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x).$$

2.3.10 EXERCICES - Asymptotes horizontales et obliques

Trouver les asymptotes horizontales ou obliques des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$
2. $f(x) = x + 1 + \dfrac{1}{x}$
3. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - \frac{1}{x}}$
4. $f(x) = \dfrac{2x^2 - 1}{x^2 - 2x + 2}$
5. * $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$
6. * $f(x) = 1 + \dfrac{\sin(5x)}{2x}$

2.3.11 SOLUTIONS exercices - Asymptotes horizontales et obliques

Remarque 4. *On peut se demander si l'on aura toujours un comportement asymptotique lorsque le degré du numérateur sera supérieur de un à celui du dénominateur, la réponse est non, par exemple la fonction*

$$f(x) = \frac{(x^2 + 5x + 6)}{x + 3} = \frac{(x + 3)(x + 2)}{x + 3}$$

est elle même une droite, avec un point trou en $x = -3$. On ne peut donc pas parler de comportement asymptotique de f.

1. $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$

   Le degré du numérateur est de un supérieur à celui du dénominateur, on a donc une chance d'avoir une asymptote oblique. Après division euclidienne on peut écrire f de la manière suivante :

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \frac{\left(x^2 + x + 1\right)(x - 1)}{(x + 1)(x - 1)} \overbrace{=}^{x\to\infty} \underbrace{\frac{\left(x^2 + x + 1\right)}{(x + 1)}}_{\frac{N(x)}{D(x)}} = \underbrace{x}_{Q(x)} + \underbrace{\frac{1}{x + 1}}_{\delta(x) = \frac{R(x)}{D(x)}} .$$

$Q(x)$ est l'asymptote oblique et $\delta(x) = \frac{R(x)}{D(x)}$ représente la valeur de l'écart entre la fonction et son asymptote. On peut voir, sans faire un tableau des signes que $\delta(x) = f(x) - Q(x)$ est positive pour des x positifs et négatif pour des x négatif. (Voir FIGURE 2.3)

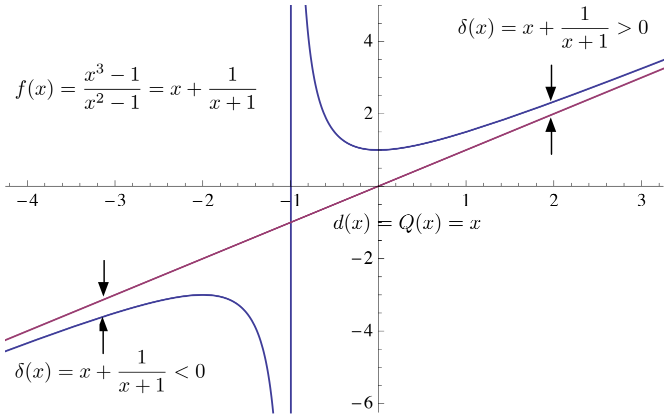

FIGURE 2.3 – Exercice 1. Asymptote oblique

2. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - \frac{1}{x}}$

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - \frac{1}{x}} = \frac{x^2}{x^3 - 1}$$

La fonction est sous forme rationnelle simple (degré du numérateur plus petit que celui du dénominateur) on en prend la limite lorsque x tend vers $\pm\infty$.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^3-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x^3}{x^2} + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

On a une asymptote horizontale d'équation $y = 0$, c.-à-d. confondue avec l'axe des abscisses.

3. $f(x) = \dfrac{2x^2-1}{x^2-2x+2}$

On peut effectuer une division euclidienne, si l'on désire

$$f(x) = \frac{2x^2-1}{x^2-2x+2} = 2 + \frac{4x-5}{x^2-2x+2}$$

ou alors prendre la limite

$$\lim_{x\to\pm\infty} = \frac{2x^2-1}{x^2-2x+2} = 2.$$

Dans les deux cas, l'asymptote obtenue est horizontale et d'équation $y = 2$.

4. * $f(x) = \sqrt{1+x^2}$

On ne peut pas effectuer de division euclidienne, on utilise alors les formules vues en 2.4. On cherche l'asymptote oblique sous la forme d'une droite affine $d(x) = ax + b$ avec

$$a_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = 1$$
$$a_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = -1$$

$$\begin{aligned} b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax)) &= \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{x^2+1} - x \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0 \end{aligned}$$

On obtient une asymptote oblique à gauche $d_1(x) = -x$ et une asymptote oblique à droite $d_2(x) = x$ comme le montre la FIGURE 2.4.

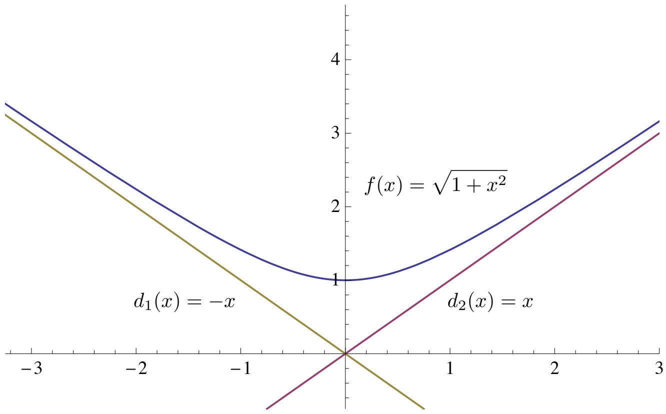

FIGURE 2.4 – Exercice 4. Asymptotes obliques de l'hyperbole $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

5. * $f(x) = 1 + \dfrac{\sin(5x)}{2x}$

   On cherche la limite à gauche et à droite pour $x \to \pm\infty$.

$$\lim_{x\to\pm\infty} 1 + \frac{\sin(5x)}{2x} = 1 + \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sin(5x)}{2x} = 1 + 0 = 1. \tag{2.6}$$

   On a une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ (voir FIGURE 2.5)

2.3.12 Extremums et paliers, tableau des croissances

Après s'être occupé du comportement des fonctions à l'infini on va s'intéresser à leur comportement local aux points dits critiques. Les points critiques sont les points où la dérivée première d'une fonction s'annule. Le tableau des signes de la fonction dérivée est important. Il permet de déterminer si un point critique est un maximum, un minimum ou un replat. Il est possible d'utiliser la dérivée seconde pour déterminer la nature d'un point critique, mais nous avons à faire à des fonctions rationnelles dont la dérivée seconde peut s'avérer difficile à manier.
La valeur des signes dans la dernière ligne du tableau traduit la croissance (+), la décroissance (-) ou l'absence de l'une et de l'autre (0).

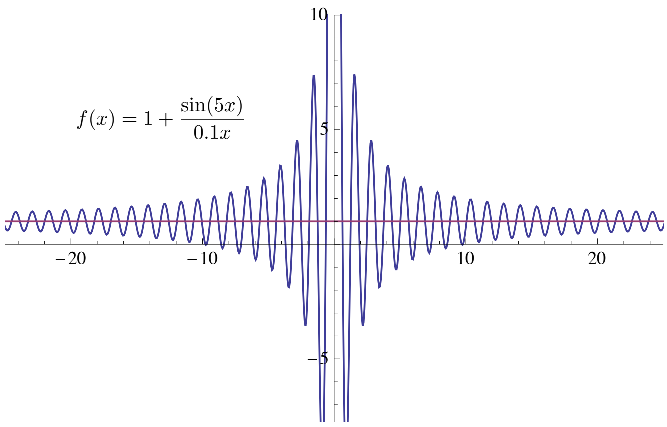

FIGURE 2.5 – Exercice 5.

2.3.13 Graphe

Pour finir l'exercice, on trace le graphe de la fonction en s'aidant de tout le travail effectué dans les points précédents. Ne pas oublier les points trous !

2.4 Observations sur quelques fonctions particulières

2.4.1 Fonction valeur absolue

Définition 2.4.1. ***Valeur absolue***

La fonction ***valeur absolue*** *est définie par morceaux :*

$$|x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{cases} \tag{2.7}$$

Les fonctions contenant une valeur absolue doive être séparées en morceaux distincts.

Exemple 1. La fonction $f(x) = |x-3|$ (FIGURE 2.6) est définie par morceaux par

$$f(x) = |x-3| \begin{cases} (x-3) = x-3 & \text{si } (x-3) \geq 0 \text{ ou } x \geq 3 \\ -(x-3) = 3-x & \text{si } (x-3) < 0 \text{ ou } x < 3 \end{cases}$$

Exemple 2. La fonction $f(x) = \left|x^2+x\right| - x + 2$ (FIGURE 2.7) est définie par morceaux par

$$\left|x^2+x\right| - x + 2 = \begin{cases} (x^2+x) - x + 2 = x^2+2 & \text{si } (x^2+x) \geq 0 \text{ ou } x \leq -1 \vee x \geq 0 \\ -(x^2+x) - x + 2 = -x^2 - 2x + 2 & \text{si } (x^2+x) < 0 \text{ ou } -1 < x < 0 \end{cases}$$

L'étude d'une fonction contenant une valeur absolue se transforme en une étude de fonction de chacun des morceaux de la fonction originale sur son ensemble de définition propre.
Il peut être intéressant de tester en premier lieu la parité de la fonction, cela peut éviter quelques calculs inutiles, car pour une fonction paire ou impaire l'étude se limite aux valeurs de $\mathbb{R}_+$. Le reste peut être déduit par symétrie axiale selon Oy (fonctions paires) ou centrale par rapport à l'origine (fonctions impaires).

2.5 Étude complète I

Faire l'étude complète de la fonction $f(x) = \dfrac{x^5 - 5x^4 + 4x^3}{x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 5x - 4}$.

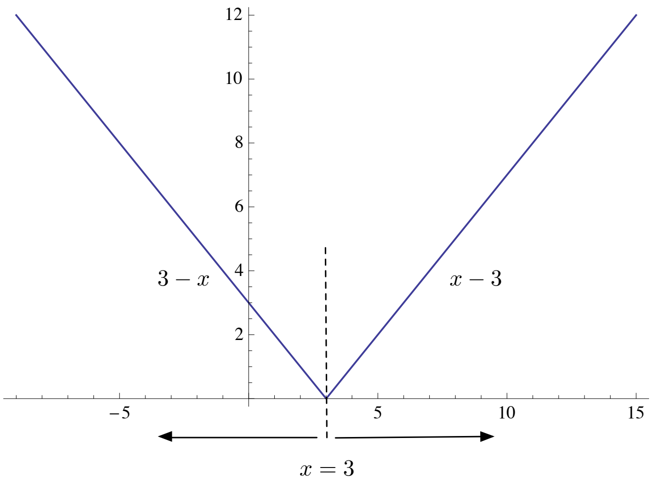

FIGURE 2.6 – Fonction $|x-3|$

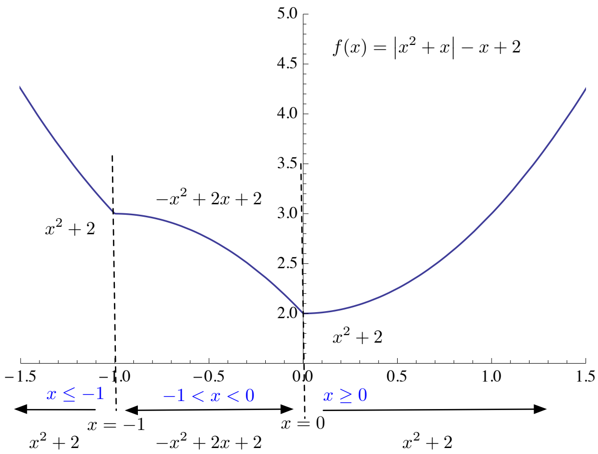

FIGURE 2.7 – Fonction $f(x) = \left|x^2+x\right| - x + 2$

2.5.1 Domaine de définition

On commence toujours par factoriser complètement la fonction rationnelle (division euclidienne, résolution quadratique, etc..),

$$f(x) = \frac{x^5-5x^4+4x^3}{x^4-5x^3+3x^2+5x-4} = \frac{(x-4)(x-1)x^3}{(x-4)(x-1)^2(x+1)}$$

Avant de simplifier, on détermine le domaine de définition, c'est-à-dire que l'on enlève toute les valeurs qui entraîneraient une indétermination, dans notre cas, toutes les valeurs qui annulent le dénominateur.

$$D_f = \mathbb{R}\backslash\{-1, 1, 4\}$$

Ayant enlevé les valeurs interdites on peut simplifier la fonction

$$f(x) = \frac{(x-4)(x-1)x^3}{(x-4)(x-1)^2(x+1)} \quad \xrightarrow{\text{simplification}} \quad f_s(x) = \frac{x^3}{(x+1)(x-1)}$$

2.5.2 Asymptotes obliques et trous

Le facteur $(x-4)$ se répètent au numérateur et au dénominateur une seule fois, donc sa valeur numérique n'aura aucune influence sur celle de la fonction sauf en $x=4$ où $(x-4)$ provoque une indétermination de type $\frac{0}{0}$. Cependant, si on calcule la limite

$$\lim_{x\to 4^{\pm}} \frac{x^5-5x^4+4x^3}{x^4-5x^3+3x^2+5x-4} = \lim_{x\to 4^{\pm}} \frac{(x-4)(x-1)x^3}{(x-4)(x-1)^2(x+1)} = \lim_{x\to 4^{\pm}} \frac{x^3}{(x-1)(x+1)} = \frac{64}{15}$$

on voit que celle-ci existe donc que la fonction tend vers une valeur finie (converge) en $x=4$. On dit dans ce cas que l'on a un trou en $x=4$. Quant au facteur $(x-1)$, un "exemplaire" de celui-ci se retrouve au dénominateur même après simplification. On aura une asymptote verticale en , , $x=1$ car la limite

$$\lim_{x\to 1^{\pm}} \frac{x^5-5x^4+4x^3}{x^4-5x^3+3x^2+5x-4} = \lim_{x\to 1^{\pm}} \frac{x^3}{(x-1)(x+1)} = \text{e.p.}$$

n'existe pas (elle est non seulement infinie mais encore différente de part et d'autre de $x=1$), on dit que la fonction diverge. En résumé, la classification en un point trou ou asymptote verticale peut être déterminée avec un calcul de limite.
L'asymptote verticale est une discontinuité plus "grave" que le point trou, en effet on peut facilement boucher un point trou par un prolongement par continuité, ce qui n'est pas possible pour une asymptote verticale.
On prolonge f par continuité au point $x=4$ en définissant une nouvelle fonction g de la manière suivante :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{(x-1)(x+1)} & \text{si } x \neq 4 \\ \\ \frac{64}{15} & \text{si } x = 4 \end{cases}$$

g est continue en $x=4$.

2.5.3 Parité

Le domaine de définition de la nouvelle fonction est $D_g = \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$. On voit que celui-ci est symétrique, car le trou en $x=4$ a été bouché. On effectue un test de parité (ne pas confondre avec un test de paternité) et on voit que la fonction est impaire, car

$$g(x) = -g(-x) \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad \frac{x^3}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^3}{x^2-1} = -\frac{(-x)^3}{(-x)^2-1} = \frac{x^3}{x^2-1}$$

Sachant que la fonction est impaire on peut se permettre de faire son étude que pour les valeurs de x négatives (par exemple), les valeurs positives pouvant être obtenue par symétrie centrale.

2.5.4 Zéros et signe de la fonction

On fait le tableau des signes de la fonction "simplifiée" pour l'axe négatif des abscisses,

$$g :]-\infty;0] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x^3}{(x-1)(x+1)}$$

x		-1		0
x^3	$-$		$-$	0
$x-1$	$-$		$-$	
$x+1$	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-$	$\|\|$	$+$	0

2.5.5 Asymptotes horizontales et obliques

On peut écrire :

$$g(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{x^3}{(x-1)(x+1)}$$

En effectuant la division euclidienne, on obtient quelque chose de la forme

$$g(x) = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)} = Q(x) + \delta(x) = x + \frac{x}{x^2-1}$$

Par identification on déduit qu'il y a une asymptote oblique d'équation $Q(x) = x$ et que l'écart entre la fonction et cette dernière est donné par $\delta(x) = \frac{x}{x^2-1}$.
Il peut être utile de connaître la (ou les) intersection(s) d'une fonction avec son asymptote. Le calcul de ces éventuelles intersections se fait en égalant l'expression de la fonction à celle de son asymptote, $g(x) = Q(x)$,

$$\frac{x^3}{(x-1)(x+1)} = x$$

La solution (unique dans ce cas) est le point $(0,0)$.

On fait le tableau des signes de $\delta(x) = \frac{x}{x^2-1}$ (uniquement pour les valeurs de x négatives).

x		-1		0
x	$-$		$-$	0
$x-1$	$-$		$-$	
$x+1$	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-$	$\|$	$+$	0

La fonction est en dessous de son asymptote jusqu'à $x = -1$, puis en dessus entre $x = -1$ et $x = 0$.

2.5.6 Extremums et paliers

La dérivée de $g(x)$ est,

$$g'(x) = \frac{3x^2(x^2-1) - 2x(x^3)}{(x^2-2)^2} = \frac{x^2\left(x^2-3\right)}{\left(x^2-1\right)^2} \tag{2.8}$$

et son domaine de définition $D'_g = \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$.

Remarque 5. *La dérivée d'une fonction impaire est paire et vice-versa.*

On utilise la dérivée pour déterminer la croissance et les points critiques de la fonction. On cherche ceux-ci en égalant l'expression de la dérivée à zéro (la dérivée d'une fonction donne son taux d'accroissement instantané, si celui-ci est nulle, la fonction est minimum, maximum ou subit un replat).

$$g'(x) = \frac{x^2\left(x^2-3\right)}{\left(x^2-1\right)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x \in \{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\}$$

Afin de déterminer les caractéristiques des points critiques, on fait le tableau des signes de la fonction g' (pour mieux observer les résultats on ne tient pas compte ici de la parité de la fonction).

x		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$	
x^2	$+$		$+$		$+$	0	$+$		$+$		$+$
$(x-\sqrt{3})$	$-$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$
$(x+\sqrt{3})$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$
$(x^2-1)^2$	$+$		$+$	0	$+$		$+$	0	$+$		$+$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$

La fonction a un maximum en $x=-\sqrt{3}$ (elle croît $(+)$, puis décroît (-)), un replat en $x=0$ et un minimum en $x=\sqrt{3}$.

2.5.7 Graphe

En effectuant une symétrie centrale et en se rappelant que l'on a un point trou en $x=4$, on obtient le graphe de notre fonction (FIGURE reffig :etudfoncex2) :

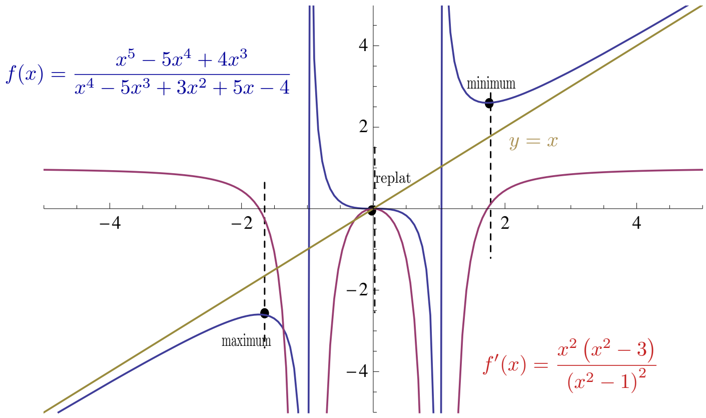

FIGURE 2.8 – Graphe de la fonction $f(x)=\dfrac{x^5-5x^4+4x^3}{x^4-5x^3+3x^2+5x-4}$ (bleu), de sa dérivée (rouge) et de son asymptote oblique.

2.6 EXERCICES d'étude de fonction

Ex 2.1. Faire l'étude complète de la fonction donnée par

$$f(x)=\frac{3}{x-1}-\frac{3}{x+3}$$

Solution

Ex 2.2. Faire l'étude complète de la fonction donnée par

$$f(x)=\frac{2\left(x^{2}+1\right)}{(x-1)^{2}}$$

Solution

Ex 2.3. Faire l'étude complète de la fonction donnée par

$$f(x)=\frac{5(x+3)(2x-3)}{9(3-x)}$$

Solution

Ex 2.4. Faire l'étude complète de la fonction donnée par

$$f(x)=\frac{1}{2}(x+1)^{2}|x-2|$$

Solution

Ex 2.5. Faire l'étude complète de la fonction donnée par

$$f(x)=\left|4-x^{2}\right|$$

Solution

Ex 2.6. Faire l'étude complète de la fonction donnée par

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^{2}-4x+3}}{x-1}$$

Solution

Ex 2.7. Faire l'étude complète de la fonction donnée par

$$f(x)=\frac{\cos(x)}{1-\cos(x)}$$

Solution

Ex 2.8. Faire l'étude complète de la fonction donnée par

$$f(x)=\ln\left(\frac{3x}{x^{2}-4}\right)$$

Solution

2.7 SOLUTIONS - Exercices d'étude de fonction

Solution Ex 2.1. →2.1.

Étudier la fonction : $f(x) = \dfrac{3}{x-1} - \dfrac{3}{x+3}$

L'étude d'une fonction se fait d'après cette liste.

1. Domaine de définition :
2. Parité :
3. Asymptotes verticales. Trous :
4. Zéros et signe de la fonction (tableau des signes.) :
5. Asymptotes horizontales ou obliques. :
6. Extremums et paliers. :
7. Étude de la croissance de f (tableau des signes de la dérivée) :
8. Graphe :

1. *Domaine de définition :*
$$f(x) = \frac{3}{x-1} - \frac{3}{x+3} = \frac{12}{(x-1)(x+3)}$$
$D_f = \mathbb{R}\backslash\{1, -3\}$
2. *Parité :* La fonction est de parité quelconque, car le domaine de définition est asymétrique.
3. *Asymptotes verticales. Trous :* Il y a deux asymptotes verticales, d'équations $x = 1$ et$x = -3$. Il n'y a pas de trous, car aucun facteur identique ne se retrouve au numérateur et au dénominateur.
4. *Zéros et signe de la fonction (tableau des signes.) :*

x		-3		1	
12	$+$		$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$x+3$	$-$	0	$+$		$+$
$f(x)$	$+$	‖	$-$	‖	$+$

La fonction ne s'annule en aucun point du domaine de définition.
5. *Asymptotes horizontales ou obliques :*
$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{12}{(x-1)(x+3)} = 0^+$$
Il y a une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.
6. *Extremums et paliers :* La dérivée de f est
$$f'(x) = -\frac{24(x+1)}{(x-1)^2(x+3)^2}$$
La dérivée f' a deux valeurs non définies en $x = 1$ et $x = -3$, ce qui n'apporte rien de nouveau qu'on ne savait déjà. Par contre, la dérivée s'annule en $x = -1$ (point critique). On fait le tableau des signes pour déterminer le type de ce point critique.

x		-3		-1		1	
-24	$-$		$-$		$-$		$-$
$x+1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$(x-1)^2$	$+$		$+$		$+$	0	$+$
$(x+3)^2$	$+$	0	$+$		$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$-$

La dérivée croit de -3 à -1 puis décroit ensuite après être passée par 0. On est en présence d'un maximum en -1.

7. Graphe : Voir FIGURE 2.9, FIGURE 2.10, FIGURE 2.11.

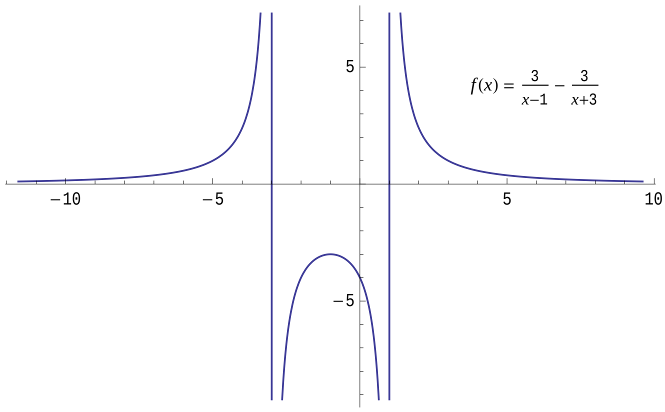

FIGURE 2.9 – Ex 2.1 Graphe de f.

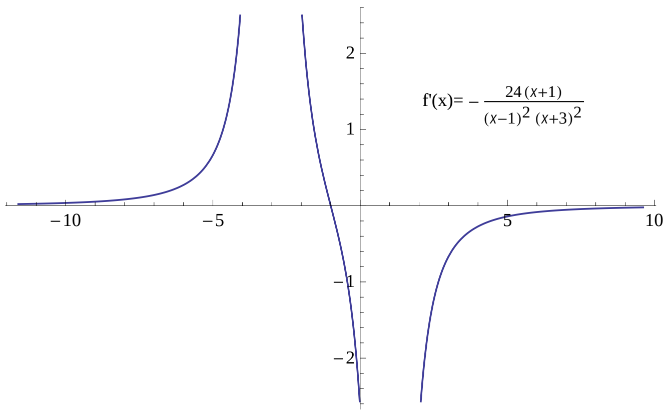

FIGURE 2.10 – Ex 2.1 Graphe de la dérivée

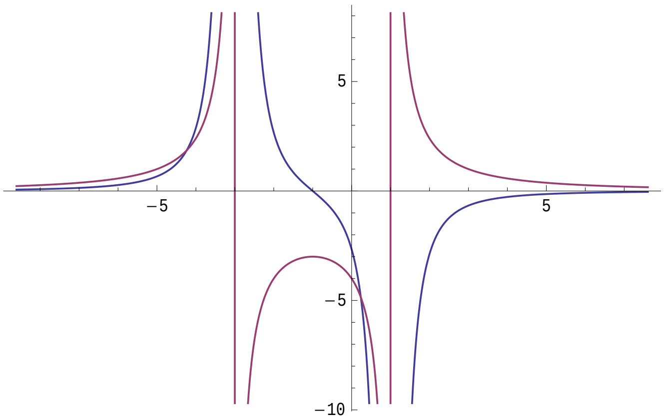

FIGURE 2.11 – Ex 2.1 Graphe de la fonction (rouge) et de sa dérivée (bleu)

Solution Ex 2.2. →2.2.

Étudier : $f(x) = \dfrac{2\left(x^2+1\right)}{(x-1)^2}$

L'étude d'une fonction se fait d'après cette liste (a peu près !)

1. Domaine de définition :
2. Parité :
3. Asymptotes verticales. Trous :
4. Zéros et signe de la fonction (tableau des signes.) :
5. Asymptotes horizontales ou obliques. :
6. Extremums et paliers. :
7. Étude de la croissance de f (tableau des signes de la dérivée) :
8. Graphe :

1. *Domaine de définition :*
$$f(x) = \frac{2\left(x^2+1\right)}{(x-1)^2}$$
$D_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}$
2. *Parité :* aucune
3. *Asymptotes verticales. Trous :* Une asymptote verticale en $x = 1$.
4. *Zéros et signe de la fonction (tableau des signes.) :*

x		1	
$2(x^2+1)$	$+$		$+$
$(x-1)^2$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+$	‖	$+$

La fonction est toujours positive.
5. *Asymptotes horizontales ou obliques :* Utilisons la division euclidienne pour changer.(Voir théorie 2.3.9.2).
$$f(x) = \frac{2\left(x^2+1\right)}{(x-1)^2} = 2 + \frac{4x}{(x-1)^2}$$
On a une asymptote horizontale $Q(x) = 2$ et un $\delta(x) = \frac{R(x)}{D(x)} = +\frac{4x}{(x-1^2)}$. Pour x tendant vers $+\infty$ la différence $\delta(x)$ et positive c.à.d que f est en dessus de l'asymptote. Pour x tendant vers $-\infty$ la différence est négative et la fonction approche l'asymptote horizontale par-dessous.
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{4x}{(x-1)^2} = 0^+$$
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{4x}{(x-1)^2} = 0^-$$
On est en droit de se demander si l'asymptote horizontale coupe la fonction f en un point. On peut

le savoir en égalant f à son asymptote.

$$
\begin{aligned}
f(x) = Q(x) : \qquad & \overset{\hookrightarrow}{\longrightarrow} \quad \frac{2\left(x^2+1\right)}{(x-1)^2} = 2 \\
& \overset{\hookrightarrow}{\longrightarrow} \quad \frac{2\left(x^2+1\right)}{(x-1)^2} - 2 = 0 \\
& \overset{\hookrightarrow}{\longrightarrow} \quad \frac{4x}{(x-1)^2} = 0 \\
& \overset{\hookrightarrow}{\longrightarrow} \quad x = 0
\end{aligned}
$$

La fonction et son asymptote se coupent au point $(0; f(0)) = (0; 2)$

6. *Extremums et paliers :* La dérivée de f est

$$f'(x) = \frac{4x}{(x-1)^2} - \frac{4\left(x^2+1\right)}{(x-1)^3} = \frac{-4(x+1)}{(x-1)^3}$$

et son tableau des signes est

x		-1		1	
-4	$-$		$-$		$-$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$(x-1)$	$-$		$-$	0	$+$
$(x-1)$	$-$		$-$	0	$+$
$(x-1)$	$-$		$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$

On remarque un minimum au point $x = -1$.

7. Graphe :
   (a) FIGURE 2.12 : Fonction
   (b) FIGURE 2.13 : Dérivée
   (c) FIGURE 2.14 : Fonction et dérivée
   (d) FIGURE 2.15 : Détail point critique $x = -1$

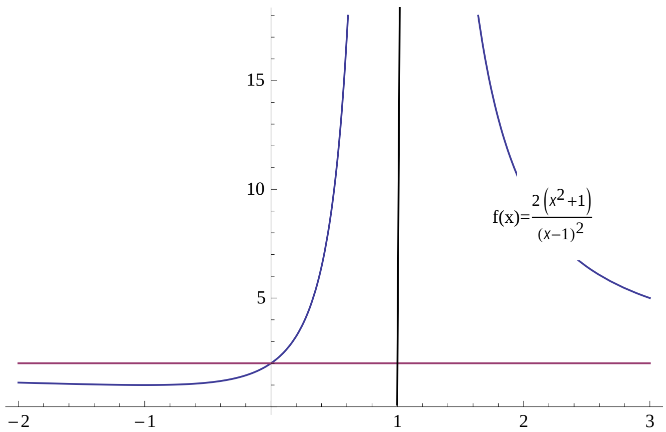

FIGURE 2.12 – Ex 2.2 Graphe de f.

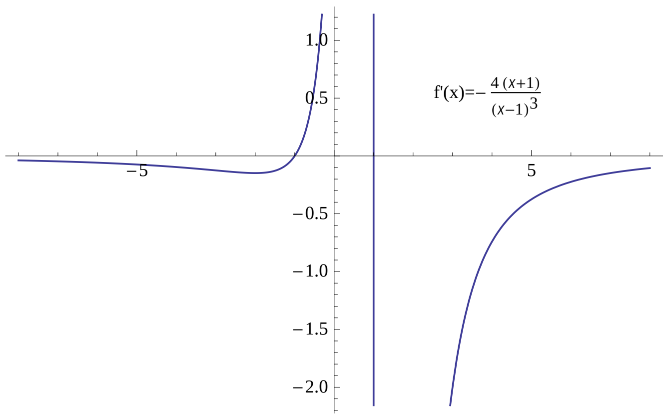

FIGURE 2.13 – Ex 2.2 Graphe de la dérivée

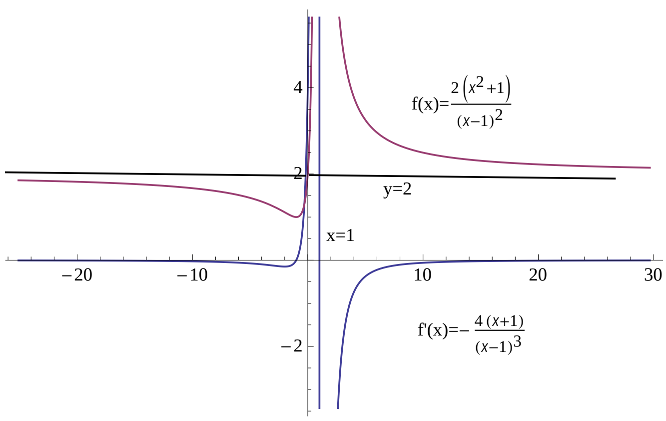

FIGURE 2.14 – Ex 2.2 Graphe de la fonction (rouge) et de sa dérivée (bleu)

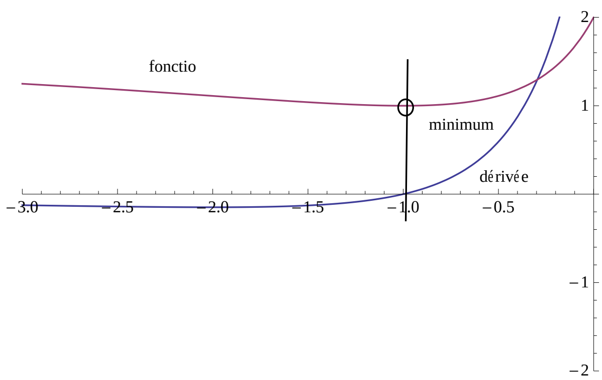

FIGURE 2.15 – Ex 2.2 Détail point critique, la fonction dérivée passe par zéro lorsque la fonction est au minimum.

Solution Ex 2.3. →2.3.

Étudier : $\dfrac{5(x+3)(2x-3)}{9(3-x)}$

L'étude d'une fonction se fait d'après cette liste (a peu près !)

1. Domaine de définition :
2. Parité :
3. Asymptotes verticales. Trous :
4. Zéros et signe de la fonction (tableau des signes.) :
5. Asymptotes horizontales ou obliques. :
6. Extremums et paliers. :
7. Étude de la croissance de f (tableau des signes de la dérivée) :
8. Graphe :

1. *Domaine de définition :*
$$f(x)=\frac{5(x+3)(2x-3)}{9(3-x)}$$
$D_f=\mathbb{R}\backslash\{3\}$
2. *Parité :* aucune
3. *Asymptotes verticales. Trous :* Une asymptote verticale en $x=3$.
4. *Zéros et signe de la fonction (tableau des signes.) :*

x		-3		$\frac{3}{2}$		3	
$x+3$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$2x-3$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$3-x$	$+$		$+$		$+$	0	$-$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	‖	$-$

La fonction passe l'axe des abscisses en $x=-3$ et $x=\frac{3}{2}$.

5. *Asymptotes horizontales ou obliques :* Si on développe la fonction, on remarque que le degré de son numérateur est de un supérieur à celui de son dénominateur. Il y a une asymptote oblique et on la trouve à l'aide de la division euclidienne (voit théorie plus bas 2.3.9.2).
$$f(x)=\frac{5(x+3)(2x-3)}{9(3-x)}=\frac{5\left(2x^2+3x-9\right)}{9(3-x)}=-\frac{10x}{9}-5+\frac{10}{(3-x)}$$
On pose $Q(x)=-\frac{10x}{9}-5$ qui est l'asymptote et $\delta(x)=\frac{10}{(3-x)}$ qui représente l'espacement entre la fonction et son asymptote. On test si l'asymptote et la fonction se coupent en un ou plusieurs points.
$$\begin{aligned} f(x)=Q(x):\quad &\longrightarrow\quad \frac{5\left(2x^2+3x-9\right)}{9}=-\frac{(10x+45)(3-x)}{9}\\ &\longrightarrow\quad 10x^2+15x-45-10x^2-15x+135=0\\ &\longrightarrow\quad \text{pas de solution.}\end{aligned}$$
La fonction et son asymptote ne se coupent pas. On fait le tableau des signes de la fonction $\delta(x)$ afin de connaître les comportements relatifs de f et de Q.

x		3	
10	$+$		$+$
$(3-x$	$+$	0	$-$
$\delta(x)$	$+$	‖	$-$

La fonction est en dessus de son asymptote jusqu'à $x = 3$ puis en dessous.

6. *Extremums et paliers :* La dérivée de f est

$$f'(x) = \frac{10x(6-x)}{9(x-3)^2}$$

et son tableau des signes est

x		0		3		6	
x	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$6-x$	$+$		$+$		$+$	0	$-$
$(x-3)^2$	$+$		$+$	0	$+$		$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$

On remarque un minimum au point $x = 0$ et un maximum au point $x = 6$.

7. Graphe :
   (a) FIGURE 2.16 : Fonction.
   (b) FIGURE 2.17 : Dérivée.
   (c) FIGURE 2.18 : Fonction et dérivée.

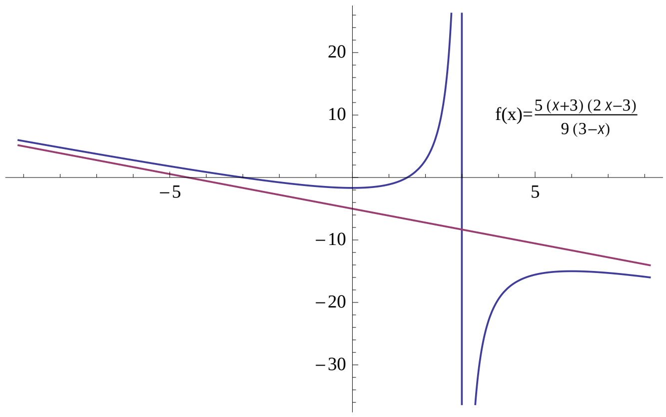

FIGURE 2.16 – Ex 2.3 Graphe de f.

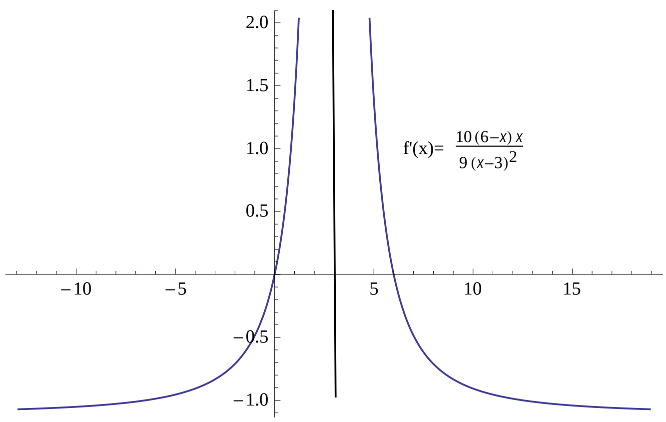

FIGURE 2.17 – Ex 2.3 Graphe de la dérivée

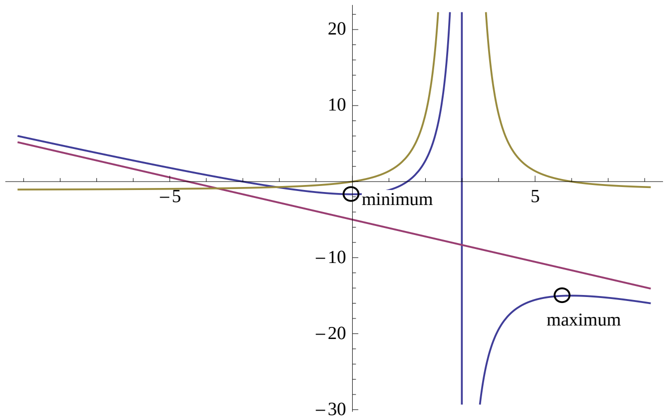

Figure 2.18 – Ex 2.3 Graphe de la fonction (rouge) et de sa dérivée (bleu)

Solution Ex 2.4. →2.4.

Étudier : $f(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2\,|x-2|$

L'étude d'une fonction se fait d'après cette liste (à peu près !)

1. Domaine de définition :
2. Parité :
3. Asymptotes verticales. Trous :
4. Zéros et signe de la fonction (tableau des signes.) :
5. Asymptotes horizontales ou obliques. :
6. Extremums et paliers. :
7. Étude de la croissance de f (tableau des signes de la dérivée) :
8. Graphe :

La fonction possède une valeur absolue, il faut la partitionner.

$$\begin{cases} f_1 = \frac{1}{2}(x+1)^2(x-2) & \text{si } (x-2) \geq 0 \text{ c.à.d. } x \geq 2 \\ f_2 = \frac{1}{2}(x+1)^2(-1)(x-2) = \frac{1}{2}(x+1)^2(2-x) & \text{si } (x-2) < 0 \text{ c.à.d. } x < 2 \end{cases}$$

1. Domaine de définition :

   Les domaines de définitions des fonctions f_1 et f_2 sont :

   $$\begin{aligned} D_{f_1} &= [2;\infty[\\ D_{f_2} &=]-\infty;2[\end{aligned}$$

   et celui de la fonction f est $D_f = D_{f_1} \cup D_{f_2} = \mathbb{R}$.
2. Parité :

   Le domaine de définition de la fonction f est $\mathbb{R}$ entier. Il faut tester la parité. Les deux contre-exemples,

   $$f(2) = 0 \neq -2 = -f(-2) \text{ et}$$
   $$f(2) = 0 \neq 2 = f(-2)$$

   montrent que la fonction n'est respectivement ni impaire ni paire.
3. Asymptotes verticales. Trous :

   Il n'y a ni asymptote verticale ni trous, car les fonctions f_1 et f_2 sont définies en tout point de leur domaine.
   En $x = 2$ la fonction est continue, car

   $$\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{2}(x+1)^2(x-2) = 0$$
   $$\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{2}(x+1)^2(2-x) = 0$$
   $$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) = 0$$

   Les limites sont les mêmes à gauche et à droite et l'image $f(2)$ existe et a la même valeur que les deux limites.
4. Zéros et signe de la fonction (tableau des signes.) :

   Pour $f_1 = \frac{1}{2}(x+1)^2(x-2)$ avec $(x \geq 2)$, on remarque que le signe sera celui du facteur $(x-2)$ donc partout positif et nul en $x = 2$.
   Pour $f_2 = \frac{1}{2}(x+1)^2(2-x)$ avec $(x < 2)$, le signe est donné par le facteur $(2-x)$ qui est positif sur tout le domaine de définition et nul en $x = -1$.

5. Asymptotes horizontales ou obliques. :

   Les fonctions f_1 et f_2 sont toutes deux des fonctions polynomiales, elles tendent vers l'infini à chaque extrémité de l'axe des abscisses.

6. Extremums et paliers. :

   Les deux dérivées de f, f_1' et f_2' sont :

$$f_1'(x) = (x+1)(x-2) + \frac{1}{2}(x+1)^2 = \frac{3}{2}\left(x^2-1\right)$$
$$f_2'(x) = (x+1)(2-x) - \frac{1}{2}(x+1)^2 = -\frac{3}{2}\left(x^2-1\right) = \frac{3}{2}(1-x)(x+1)$$

   Si on pose $f_1' = 0$ on voit que la dérivée s'annule pour $x = 1$ et $x = -1$. Ces deux valeurs ne font cependant pas partie du domaine de définition de f_1. f_1 n'a donc aucun extremum.
   Si on pose $f_1' = 0$ on voit que la dérivée s'annule pour $x = 1$ et $x = -1$. Ces valeurs appartiennent au domaine de définition de f_2, donc ce sont des extremums.

7. Étude de la croissance de f (tableau des signes de la dérivée) :

   Il est inutile de faire le tableau des signes de f_1 car elle n'a pas d'extremum sur son domaine de définition. Le tableau des signes de la dérivée de f_2 est :

x		-1		1	
$1-x$	$+$		$+$	0	$-$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$f_2'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

   On note un minimum en $x = -1$ et un maximum en $x = 1$.

8. Graphe : Voir FIGURE 2.19.

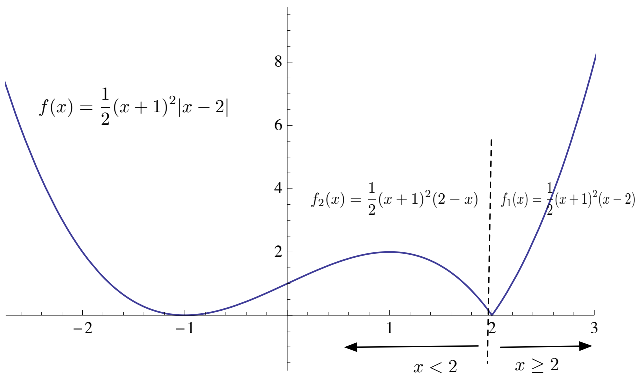

FIGURE 2.19 – Exercice 2.4 Graphe

Solution Ex 2.5. →2.5.

Étudier : $\left|4 - x^2\right|$

L'étude d'une fonction se fait d'après cette liste (a peu près !)

1. Domaine de définition :
2. Parité :
3. Asymptotes verticales. Trous :
4. Zéros et signe de la fonction (tableau des signes.) :
5. Asymptotes horizontales ou obliques. :
6. Extremums et paliers. :
7. Étude de la croissance de f (tableau des signes de la dérivée) :
8. Graphe :

La fonction possède une valeur absolue, il faut la partitionner en deux fonctions.

$$\begin{cases} f_1 = (4 - x^2) & \text{si } (4 - x^2) \geq 0 \text{ c.à.d. } -2 \leq x \leq 2 \\ f_2 = -(4 - x^2) = x^2 - 4 & \text{si } (4 - x^2) < 0 \text{ c.à.d. } (x < -2) \vee (x > 2) \end{cases}$$

1. Domaine de définition :

   Les domaines de définitions des fonctions f_1 et f_2 sont :

$$\begin{array}{rcl} D_{f_1} & = & [-2; 2] \\ D_{f_2} & = &]-\infty; -2[\cup]2; \infty[\end{array}$$

   et celui de la fonction f est $D_f = D_{f_1} \cup D_{f_2} = \mathbb{R}$.

2. Parité :

   Le domaine de définition de la fonction f est $\mathbb{R}$ entier. Il faut tester la parité. f_1 et f_2 sont paires les deux :

$$\begin{array}{lcl} f_1(x) = f_1(-x) & \xrightarrow{\looparrowright} & (4 - x^2) = (4 - (-x)^2) \\ f_2(x) = f_2(-x) & \xrightarrow{\looparrowright} & (x^2 - 4) = ((-x)^2 - 4) \end{array}$$

3. Asymptotes verticales. Trous :

   Il n'y a ni asymptote verticale ni trous, car les fonctions f_1 et f_2 sont définies en tout point de leur domaine.
   En $x = 2$ et $x = -2$ f est continue, car

$$\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^+} (4 - x^2) = 0 \\ \lim\limits_{x \to -2^-} (x^2 - 4) = 0 \\ \lim\limits_{x \to -2} f(x) = f(2) = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} (4 - x^2) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} (4 - x^2) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2) = 0 \end{array}$$

   Les limites sont les mêmes à gauche et à droite et les images $f(2)$ et $f(-2)$ existent et ont la même valeur que les limites.

4. Zéros et signe de la fonction (tableau des signes.) :

   La fonction f sera toujours positive car elle est sous le signe valeur absolue. Elle s'annule en deux points qui sont $x = -2$ et $x = 2$.

5. Asymptotes horizontales ou obliques. :

   La fonction f_2 est une fonction polynomiale qui tend vers l'infini à chaque extrémité de l'axe des abscisses.

6. Extremums et paliers. :

   Les deux dérivées de f, f_1' et f_2' sont :

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= -2x \\ f_2'(x) &= 2x \end{aligned}$$

   Les deux dérivées s'annulent en zéro, mais seule f_1 possède 0 dans son ensemble de définition. La dérivée seconde $f_1''(x) = -2$ est négative, la fonction est concave en $x = 0$ donc il y a un maximum en ce point.

7. Graphe : Voir FIGURE 2.20.

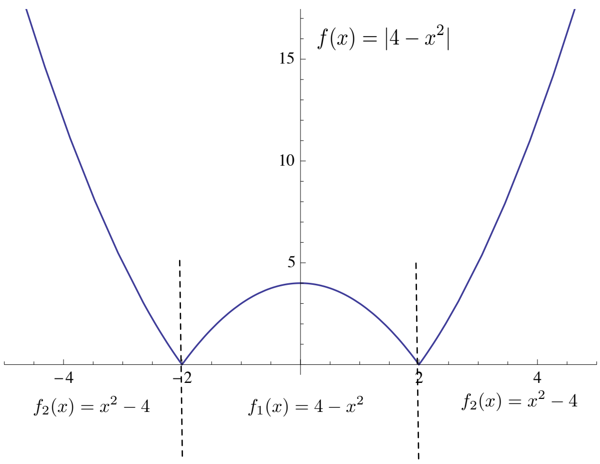

FIGURE 2.20 – Exercice 2.5 Graphe

Solution Ex 2.6. →2.6.

Étudier : $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x+1}$

L'étude d'une fonction se fait d'après cette liste (à peu près !)

1. Domaine de définition :
2. Parité :
3. Asymptotes verticales. Trous :
4. Zéros et signe de la fonction (tableau des signes.) :
5. Asymptotes horizontales ou obliques. :
6. Extremums et paliers. :
7. Étude de la croissance de f (tableau des signes de la dérivée) :
8. Graphe :

1. <u>Domaine de définition :</u>

   Le dénominateur s'annule en $x = -1$ alors que pour la même valeur de l'argument le numérateur a pour valeur $\sqrt{8}$. La division par zéro n'ayant aucun sens on élimine $x = -1$.
   La valeur se situant sous une racine ne peut être négative, donc il faut que

   $$x^2 - 4x + 3 > 0$$

   On factorise,

   $$x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$$

   et on fait un tableau des signes.

x		1		3	
$x-1$	$-$	0	$+$		$+$
$x-3$	$-$		$-$	0	$+$
$(x-1)(x-3)$	$+$	0	$-$	0	$+$

   Il faut retirer l'intervalle $]1;3[$ de l'ensemble de définition. Ce qui finalement donne

   $$D_f = \mathbb{R} \backslash \left(\{-1\} \cup]1;3[\right)$$

2. <u>Parité :</u>

   Le domaine de définition est asymétrique, la fonction est quelconque.

3. <u>Asymptotes verticales. Trous :</u>

   Il y a une asymptote verticale en d'équation $x = -1$.

4. <u>Zéros et signe de la fonction (tableau des signes.) :</u>

   Les zéros sont obtenus lorsque le numérateur de la fonction s'annule :

   $$x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3) = 0 \quad \longrightarrow \quad x \in \{1, 3\}.$$

   Il y a un zéro en $x = 1$ et un autre en $x = 3$. Le tableau des signes de f est :

x		-1		1		3	
$\sqrt{x^2-4x+3}$	$+$		$+$	0	$\oslash$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$f(x)$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$\oslash$	0	$+$

5. Asymptotes horizontales ou obliques. :

   À première vue il n'y a pas d'asymptote oblique, mais on n'en est pas sûr. Commençons par les asymptotes horizontales en calculant les limites de f lorsque l'argument tend vers plus ou moins l'infini.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x+1} &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{|x|\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}}{x(1+\frac{1}{x})} \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{|x|}{x} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|}{x} = -1 \\ \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|}{x} = +1 \end{cases}
\end{aligned}$$

   Il y a deux asymptotes horizontales d'équations $y = 1$ et $y = -1$ (donc il n'y a pas d'asymptote oblique).

6. Intersection de du graphe de f avec les asymptotes : Il s'agit de trouver les solutions des deux équations :

$$\begin{aligned}
\text{i) } f(x) = 1 \quad & \xrightarrow{\looparrowright} \quad \frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x+1} = 1 \\
\text{ii) } f(x) = -1 \quad & \xrightarrow{\looparrowright} \quad \frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x+1} = -1 \quad \xrightarrow{\looparrowright}
\end{aligned}$$

   Résolution :

$$\begin{aligned}
\text{i)} \qquad & \frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x+1} = 1 \\
& \frac{\sqrt{x^2-4x+3}-(x+1)}{x+1} = 0 \\
& \frac{(\sqrt{x^2-4x+3}+(x+1))(\sqrt{x^2-4x+3}-(x+1))}{(\sqrt{x^2-4x+3}+(x+1))(x+1)} = 0 \\
& \frac{-6x+2}{(\sqrt{x^2-4x+3}+(x+1))(x+1)} = 0 \\
& x = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

   ii) La solution n'existe pas

   Le graphe de f intersecte l'asymptote horizontale $y = 1$ en $x = \frac{1}{3}$.

7. Extremums et paliers. :

   La dérivée de f est :

$$f'(x) = \frac{3x-5}{(x+1)^2\sqrt{x^2-4x+3}}$$

   La dérivée s'annule en $x = \frac{5}{3}$. Mais $x = \frac{5}{3}$ ne fait pas partie du domaine de définition. La dérivée ne s'annule pas dans $D_f = \mathbb{R}\setminus(\{-1\}\cup]1;3[)$.

8. Étude de la croissance de f (tableau des signes de la dérivée) :

   Le domaine de définition de la dérivée est $D_{f'} = \mathbb{R}\setminus(\{-1\}\cup[1;3])$ Le tableau des signes de la dérivée est

x		-1		1		$\frac{5}{3}$		3	
$3x-5$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
$(x+1)^2$	$+$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
$\sqrt{x^2-4x+3}$	$+$		$+$	0	$\oslash$	$\oslash$	$\oslash$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	$\oslash$	$\oslash$	$\oslash$	$\|\|$	$+$

f est décroissante de $]-\infty;1[$ et de $]-1;1[$, puis croissante sur $]3;\infty[$.

9. Graphe : Voir FIGURE 2.21, FIGURE 2.22.

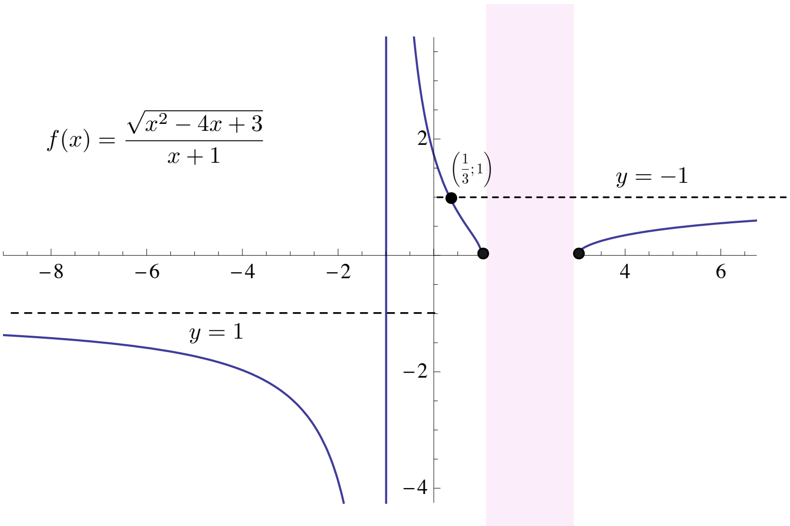

FIGURE 2.21 – Exercice 2.6 Graphe de f

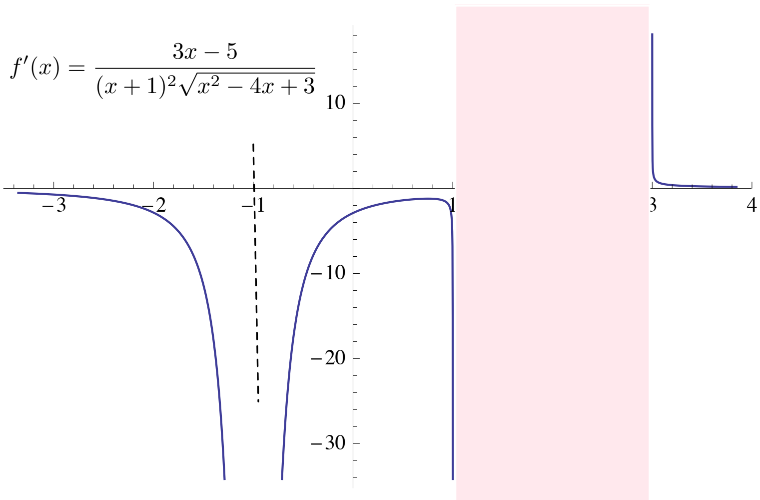

FIGURE 2.22 – Exercice 2.6 Graphe de f'

Solution Ex 2.7. →2.7.
Étudier : $f(x) = \frac{\cos(x)}{1-\cos(x)}$

L'étude d'une fonction se fait d'après cette liste.

1. Domaine de définition :
2. Parité :
3. Asymptotes verticales. Trous :
4. Zéros et signe de la fonction (tableau des signes.) :
5. Asymptotes horizontales ou obliques. :
6. Extremums et paliers. :
7. Étude de la croissance de f (tableau des signes de la dérivée) :
8. Graphe :

1. Domaine de définition :

   Le dénominateur ne peut pas être nul, il faut chercher les valeurs de x qui annulent ce dernier.

$$\begin{array}{lcl} 1-\cos(x)=0 & \xrightarrow{\looparrowright} & \cos(x)=1 \\ & \xrightarrow{\looparrowright} & \cos(x)=\cos(0) \\ & \xrightarrow{\looparrowright} & \cos(x)=\cos(0) \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad \begin{cases} x=0+2k\pi, \\ x=2\pi+2k\pi, \end{cases} \end{array}$$

   Le domaine de définition est $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0+2k\pi\}$. La fonction étant trigonométrique il faut calculer sa période, autrement dit il faut trouver une valeur T telle que $f(x+T) = f(x)$. On est en droit de penser que la période sera 2π.

$$f(x+T) = f(x)$$

$$\begin{array}{lcl} f(x+T) & = & \dfrac{\cos(x+T)}{1-\cos(x+T)} \\ & = & \dfrac{\cos(T)\cos(x)-\sin(T)\sin(x)}{1-(\cos(T)\cos(x)-\sin(T)\sin(x))} \\ & \xrightarrow{T=2\pi} & \dfrac{1\cdot\cos(x)-0\cdot\sin(x)}{1-(1\cdot\cos(x)-0\cdot\sin(x))} \\ & = & \dfrac{\cos(x)}{1-\cos(x)} \\ & = & f(x). \end{array}$$

   La période de f est 2π.

2. Parité :

   Le domaine de définition est symétrique par rapport à l'origine, il faut tester la parité. La fonction est paire car $f(x) = f(-x)$, en effet

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{1-\cos(x)} = \frac{\cos(-x)}{1-\cos(-x)} = f(-x)$$

3. Asymptotes verticales. Trous :

   En regardant l'ensemble de définition on déduit qu'il y aura des asymptotes verticales à $x = 0 + 2k\pi$, c'est-à-dire à 0 et à 2π pour la période $]0; 2\pi[$. En effet

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\cos(x)}{1-\cos(x)} = ((\frac{1}{0^+})) = +\infty$$
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(x)}{1-\cos(x)} = ((\frac{1}{0^+})) = +\infty$$

4. Zéros et signe de la fonction (tableau des signes.) :

   Le tableau des signes est

x		0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{7\pi}{4}$		2π	
$\cos(x)$	$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$1-\cos(x)$	$+$	0	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	0	$+$
$f(x)$	$+$	$\Vert$	$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	$\Vert$	$+$

   Sur la période $]0;2\pi[$, la fonction est positive sur $]0;\frac{\pi}{2}]$, négative sur $]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}]$ et à nouveau positive sur $]\frac{3\pi}{2};2\pi[$.

5. Asymptotes horizontales ou obliques. :

   Il n'y a ni asymptote oblique ni asymptote horizontale, la limite pour f tendant vers $\pm\infty$ n'est pas définie pour une fonction périodique.

6. Extremums et paliers. :

   La dérivée est :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-\sin(x)(1-\cos(x)) - (\sin(x)\cos(x))}{(1-\cos(x))^2} \\ &= -\frac{\sin(x)}{(1-\cos(x))^2} \end{aligned}$$

   La solution de $f'(x)=0$ est

$$-\frac{\sin(x)}{(1-\cos(x))^2} = 0 \quad \xrightarrow{\cdot} \quad \sin(x) = 0$$

   Cette équation a deux solutions qui sont $x = 0 + 2k\pi$ et $x = \pi + 2k\pi$. La première n'appartient pas au domaine de définition de la fonction, on ne garde que la deuxième. La dérivée seconde de f est

$$\begin{aligned} f''(x) = \left(-\frac{\sin(x)}{(1-\cos(x))^2}\right)' &= -\frac{-2\sin^2(x)+\cos^2(x)-\cos(x)}{(\cos(x)-1)^3} \\ &= \frac{2\sin^2(x)-\cos^2(x)+\cos(x)}{(\cos(x)-1)^3} \end{aligned}$$

   La valeur de f'' au point ou la dérivée s'annule vaut

$$\begin{aligned} f''(\pi) &= \frac{2\sin^2(\pi)-\cos^2(\pi)+\cos(\pi)}{(\cos(\pi)-1)^3} \\ &= \frac{2\cdot 0-(-1)^2-1}{(-2)^3} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

   La dérivée seconde au point ou la dérivée première s'annulle est positive, donc la courbe est convexe et de ce fait il y a un minimum en $x = \pi + 2k\pi$.

7. Graphe : Voir FIGURE 2.23.

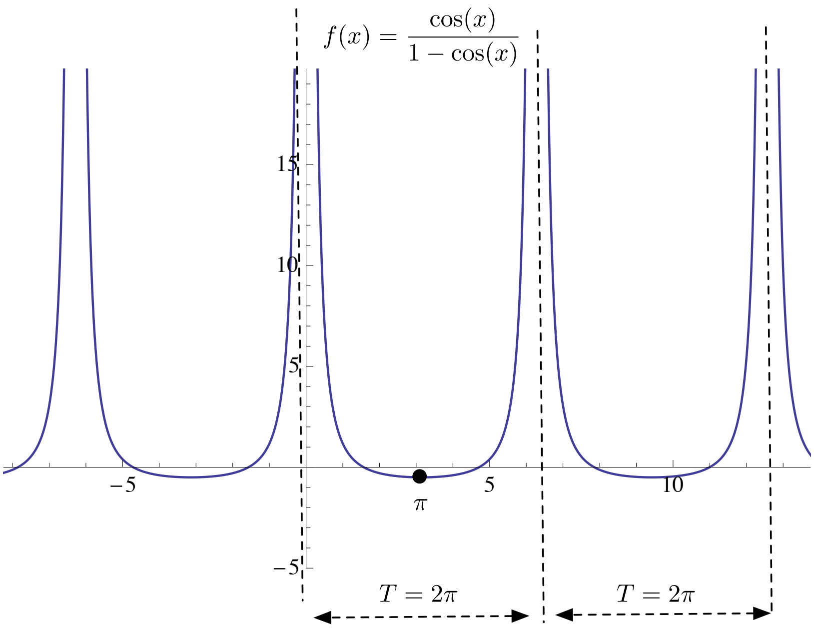

Figure 2.23 – Exercice 2.7 Graphe

Solution Ex 2.8. →2.8.

Étudier : $f(x) = \ln\left(\dfrac{3x}{x^2-4}\right)$

L'étude d'une fonction se fait en général en suivant le menu suivant :

1. Domaine de définition :
2. Parité :
3. Asymptotes verticales. Trous :
4. Zéros et signe de la fonction (tableau des signes.) :
5. Asymptotes horizontales ou obliques. :
6. Extremums et paliers. :
7. Étude de la croissance de f (tableau des signes de la dérivée) :
8. Graphe :

Lorsqu'il s'agit d'une fonction logarithmique comme ici, c'est un peu plus casse-pieds. Il s'agit en fait de travailler avec la fonction composée

$$f(x) = \ln(g(x)) \quad \text{avec} \quad \left[f(x) = \ln\left(\frac{3x}{x^2-4}\right) \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{3x}{x^2-4}\right]$$

dans le cas qui nous intéresse.
On ne peut pas donner de procédure bien définie pour l'étude de ces fonctions, car il s'agit en fait de l'étude de deux fonctions (f et g) à la fois. Mais de manière générale on peut procéder comme ci-dessous.

1. Intersection avec l'axe y ($f(0)$).

$$f(0) = \ln\left(\frac{3\cdot 0}{0^2-4}\right) = \ln(0) \quad \Rightarrow \quad f(0) \text{ n'existe pas}$$

La fonction n'a pas d'intersection avec l'axe des ordonnées.

2. Domaine de définition :

On cherche le domaine de définition de $f(x)$ et de $g(x)$. Pour $g(x)$ le domaine est :

$$D_g = \mathbb{R}\backslash\{-2; 2\}.$$

$f(x)$ étant une fonction logarithmique, il faut que sont argument, en l'occurence $g(x)$, soit strictement plus grand que zéro, autrement dit il faut que $\dfrac{3x}{x^2-4} = \dfrac{3x}{(x-2)(x+2)} > 0$. On doit faire un tableau des signes de $g(x)$.

x		-2		0		2	
$3x$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$g(x)$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$

De ce tableau on déduit le domaine de définition de $f(x)$:

$$D_f =]-2;0[\ \cup \ ]2;\infty[$$

3. Parité :

La fonction $g(x)$ est une fonction impaire car :

$$\begin{aligned} -g(-x) &= -\frac{3(-x)}{(-x)^2-4} \\ &= -\frac{-3x}{x^2-4} \\ &= \frac{3x}{x^2-4} \\ &= g(x). \end{aligned}$$

Le domaine de définition de la fonction f étant asymétrique, celle-ci est une fonction sans parité ou de parité quelconque.

4. Asymptotes verticales. Trous :

On analyse le comportement de la fonction aux frontières définies du domaine de définition.

Il y a une asymptote verticale en $x = 2$ et $x = -2$. On calcule les valeurs de f à droite des valeurs d'abscisse 2 et -2 (à l'intérieur du domaine de définition).

$$\lim_{x\to -2^+} = \ln\left(\frac{3x}{x^2-4}\right) = \ln\left(\frac{3(-2^+)}{(-2^+)-4}\right) = \ln\left(\frac{-6}{0^-}\right) = +\infty$$
$$\lim_{x\to 2^+} = \ln\left(\frac{3x}{x^2-4}\right) = \ln\left(\frac{3(2^+)}{(2^+)-4}\right) = \ln\left(\frac{6}{0^+}\right) = +\infty$$

La fonction f tend vers plus l'infini dans les deux cas.
Il faut également analyser la limite lorsque x tend vers 0 depuis la gauche.

$$\lim_{x\to 0^-} \ln\left(\frac{3x}{x^2-4}\right) = \ln\left(\frac{0^-}{-4}\right) = \ln\left(0^+\right) = -\infty$$

La fonction f tend vers $-\infty$ lorsqu'elle s'approche de zéro par la gauche.

5. Zéros et signe de la fonction (tableau des signes.) :

On cherche les valeurs de l'abscisse pour lesquels la fonction f croise l'axe x.

La fonction f s'annule lorsque son argument $(g(x))$ est égal à 1 :

$$\begin{aligned} g(x) = \frac{3x}{x^2-4} = 1 \quad &\Rightarrow \quad x^2 - 3x - 4 = 0 \\ &\Rightarrow \quad (x-4)(x+1) = 0 \end{aligned}$$

Les zéros de la fonction f sont $\{4; -1\}$.

6. Asymptotes horizontales ou obliques. :

On étudie le comportement de f aux bornes non définies du domaine de définition, dans ce cas il n'y a que $+\infty$ car $-\infty$ ne fait pas partie du domaine de définition.

Pour la fonction g on a :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x}{x^2-4} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3}{x}}{1-\frac{4}{x^2}} = 0+$$

Pour $f(x)$:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \quad = \quad \ln\left(\lim_{x\to\infty} g(x)\right) = -\infty.$$

La fonction f tend vers $-\infty$ lorsque $x \to \infty$.

7. Extremums et paliers. :

   On cherche les points critiques, c'est-à-dire les points d'abscisse pour lesquels la dérivée première de f s'annule.

$$f'(x) = \frac{x^2-4}{3x} \cdot \frac{3(x^2-4)-2x(3x)}{(x^2-4)^2} = \frac{x^2+4}{x(4-x^2)} = \frac{x^2+4}{x(2-x)(2+x)}$$

   L'équation

$$f'(x) = \frac{x^2+4}{x(2-x)(2+x)} = 0$$

   n'a pas de solution.
   La fonction f ne s'annule pas sur son domaine de définition.
   On fait à présent le tableau des signes de f' afin de pouvoir étudier la croissance de f.

x		-2		0		2	
x^2+4	$+$		$+$		$+$		$+$
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$2-x$	$+$		$+$		$+$	0	$-$
$2+x$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$f'(x)$	$\oslash$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$\oslash$	$\Vert$	$-$

   La fonction f n'étant définie que sur $D_f =]-2;0[\ \cup\ ]2;\infty[$ on peut affirmer qu'elle est décroissante sur tout son domaine de définition.

8. Graphe : Voir figure (2.24) Pour finir on fait le graphe :

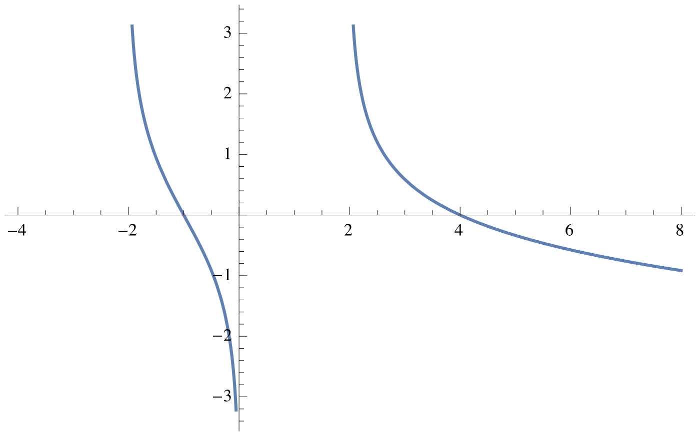

FIGURE 2.24 – Exercice 2.8 - Graphe de f

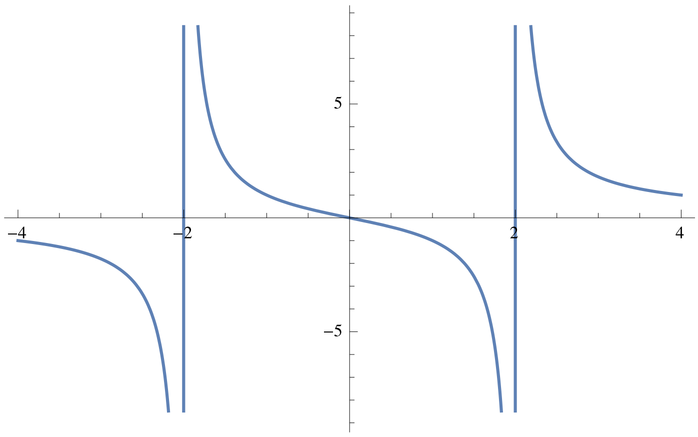

FIGURE 2.25 – Exercice 2.8 - Graphe de g

Index

Asymptotes horizontales, 12
asymptotes obliques, 12
Asymptotes verticales et trous, 9

division euclidienne polynomiale, 12
Domaine de définition, 7
domaine de définition, 6

Extremums et paliers, 15

Fonction impaire, 7
Fonction paire, 7
Fonction valeur absolue, 16
fonctions rationnelles, 6

Graphe, 16

Parité, 7

tableau des croissances, 15

Zéros et signe de la fonction, 10

Étude de fonctions, 6

Bibliographie