Théorie et exercices I

Analyse 1a

Suites* - Fonctions - Dérivées

Michel Semon

30/01/2023

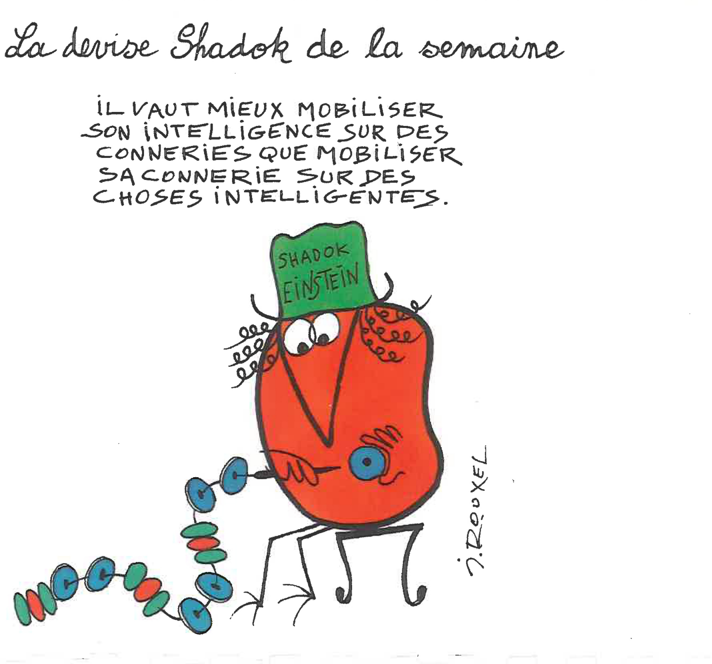

Table des matières

Index

Première partie

Suites* - Fonctions - Dérivée

Chapitre 1

Introduction et présentation

Dans cette brochure **Analyse 1a**, je traite les suites numériques, les fonctions et leurs propriétés et la notion de dérivée.

1.1 Suites

Les suites numériques sont la base de l'analyse, elles mènent à la notion de limite qui elle, mène à la notion de dérivée. L'étude des suites est le sujet le plus difficile de la deuxième année de maturité. Seuls les élèves de niveau renforcé le traitent.

1.2 Fonctions

Le mot fonction sème souvent la terreur parmi les élèves et c'est normal, c'est un terme qui est d'une telle richesse que même après des années d'études il est difficile à cerner.

1.3 Dérivée

La dérivée est sans aucun doute l'opérateur qui est le plus utilisé en mathématiques tout comme en physique. À mon avis, commencer à étudier la physique sans connaître la notion de dérivée est un non-sens qui malheureusement se retrouve partout, cela ne fait que prouver que ceux qui font les programmes ne savent pas ce qu'ils font.

Chapitre 2

Suites réelles*

2.1 Introduction

Une suite réelle est un ensemble de réels ordonné, de cardinalité [1] infinie. L'étude des suites réelles de leurs bornes et de leur limite est un domaine difficile des mathématiques. Il constitue cependant un pas indispensable vers la notion de continuité et de dérivée.

2.2 Suites réelles

Définition 2.2.1. ***Suite réelle***

Une suite réelle est une fonction à valeurs réelles définie sur l'ensemble des nombres naturels.

$$(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad n \mapsto a_n \tag{2.1}$$

Remarque 1. *On notera* (a_n) *pour la suite et* a_n *pour le nième élément de celle-ci.*

Remarque 2. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$.

Remarque 3. *L'ensemble des nombres naturels* $\mathbb{N}$ *est sert essentiellement à indexer une suite.*

2.2.1 Présentation d'une suite

Les suites peuvent se présenter sous **forme récurrente**, ou sous **forme explicite** .

Exemple 1. L'ensemble des entiers positifs $\mathbb{Z}_+$ forme une suite qui peut être donnée

a) sous forme récurrente par,

$$a_0 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 1, \forall n \in \mathbb{N} \tag{2.2}$$

b) sous forme explicite par

$$a_n = n + 1, \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.3}$$

$(a_n) = \mathbb{Z}_+ = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$.

Remarque 4. *Une suite réelle n'est pas toujours présentable sous forme explicite ou récurrente. La représentation sous forme explicite est souvent très compliquée si ce n'est impossible.*

1. cardinalité = nombre d'éléments d'un ensemble

Exemple 2. On ne peut pas donner la suite formée des décimales du nombre π sous forme récurrente ni sous forme explicite simple.

Exemple 3. La représentation pourtant simple de la suite de Fibonacci sous forme récurrente,

$$a_0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \qquad (a_n) = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...\} \tag{2.4}$$

devient plus complexe sous forme explicite,

$$a_n = \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^n - \left(1-\sqrt{5}\right)^n}{2^n \cdot \sqrt{5}} \tag{2.5}$$

2.2.2 Borne d'une suite

Définition 2.2.2. ***Suite bornée***

> *Une suite (a_n) est bornée si il existe 2 nombres réels m et M tels que :*
>
> $$m \leq a_n \leq M, \qquad \forall n \in \mathbb{N} \tag{2.6}$$
>
> *m est appelé minorant et M majorant .*

Remarque 5. *m et M ne sont pas unique.*

Remarque 6. *On peut poser $m = -M$, dans ce cas on a*

$$-M \leq a_n \leq M, \qquad \forall n \in \mathbb{N} \tag{2.7}$$

2.2.2.1 Raisonnement par récurrence

Intuitivement, l'idée est la suivante, soit une ligne infinie de dominos. Le premier domino fait tomber le second, c'est l'initialisation. Le raisonnement par récurrence nous affirme que si le domino n tombe (hypothèse) alors il fera tomber le domino $n+1$ et ceci pour n quelconque, c'est l'hérédité.

Définition 2.2.3. ***Proposition***

> *Une proposition P est une expression mathématique qui peut être soit vraie soit fausse.*

Définition 2.2.4. ***Raisonnement par récurrence***

> *Le raisonnement par récurrence sur une proposition P_n se base sur les caractéristiques des nombres naturels (axiomes de Peano) et se fait en deux étapes :*
>
> *i)* ***L'initialisation*** *: On vérifie que P_0 est vraie,*
>
> *ii)* ***L'hérédité :*** *On fait l'**hypothèse** que si P_n est vraie pour n quelconque cela entraîne que P_{n+1} est également vraie ou encore que*
>
> $$P_n \Rightarrow P_{n+1} \tag{2.8}$$
>
> *Si ces deux points sont vérifiés, on dira que la proposition P_n est vraie pour tous les nombres naturels n.*

Remarque 7. *P_n est en général une égalité ou une inégalité indicée par n.*

2.2.3 Suites monotones

Définition 2.2.5. ***Suites monotones***

Les suites (a_n) et (b_n) sont dites respectivement croissante et décroissante si

$$a_n \leq a_{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N} \tag{2.9}$$
$$b_n \geq b_{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N} \tag{2.10}$$

Les suites (a_n) et (b_n) sont dites respectivement, strictement croissante et strictement décroissante dans le cas où les inégalités sont strictes.
Les suites (strictement) croissantes (strictement) décroissantes sont dites ***monotones****.*

2.2.3.1 Raisonnement par l'absurde

Soit la proposition p. Le raisonnement pas l'absurde consiste à démontrer que

$$non(p) = \text{Faux}. \tag{2.11}$$

Ce qui permet de déduire que

$$p = \text{Vrai}. \tag{2.12}$$

2.2.4 Borne supérieure (supremum) et borne inférieure (infimum)**

En mathématiques, il est très facile de démontrer que quelque chose est faux, il suffit de trouver un contre-exemple. Par contre, démontrer qu'une chose est vraie est beaucoup plus difficile. Afin de pouvoir démontrer un théorème un peu plus loin il faut définir les deux notions suivantes.

Définition 2.2.6. ***Bornes supérieure et inférieure d'un ensemble***

Soit S un sous-ensemble non vide de l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$. Un nombre b (resp. a) vérifiant les deux propriétés suivantes :

1. *pour tout élément $x \in S$: $x \leq b$ (resp. $x \geq a$).*
2. *quel que soit le nombre réel $\epsilon > 0$, il existe un élément x_ϵ de S tel que $b - x_\epsilon \leq \epsilon$ (resp. $x_\epsilon - a \leq \epsilon$).*

est appelé borne supérieure (resp. borne inférieure) ou encore supremum (resp. infimum) de S.

Ce qui signifie également que le supremum est le plus petit des majorants et l'infimum est le plus grand des minorants. En première lecture la définition est difficile à cerner. Intuitivement, cela veut dire (pour la borne supérieure) qu'il sera toujours possible de "glisser" un élément dans S aussi près que l'on veut de son maximum sans pour autant en faire un nouveau maximum. Autrement dit si l'on peut "glisser" un élément avant la borne supérieure, cet élément est **dans** S. Le mur d'une piscine n'est pas un supremum car les molécules d'eau ont une grandeur finie, à partir de quelques nanomètres il n'y aura plus la place d'insérer une molécule d'eau supplémentaire entre l'eau existante et le mur.

2.2.5 Convergence, limite d'une suite

Définition 2.2.7. ***Convergence, limite d'une suite***

Une suite (a_n) a pour limite le réel l, si pour tout intervalle $\epsilon > 0$, il existe un nombre naturel $N_{(\epsilon)}$ tel que pour tout $n > N_{(\epsilon)}$, on a $|a_n - l| < \epsilon$. On notera

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l \tag{2.13}$$

et on dira que la suite (a_n) converge vers l.

2.2.6 Unicité de la limite

Théorème 2.2.1. ***Unicité de la limite d'une suite***

Si une suite a une limite, celle-ci est unique.

Démonstration 2.2.1.

2.3 Calcul de limites de suites

2.3.1 Grandeurs indéterminées

On appelle grandeurs indéterminées les quantités suivantes :

1. $\dfrac{0}{0}$
2. $0 \cdot \infty$
3. $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$
4. $+\infty + (-\infty)$

Les grandeurs suivantes sont déterminées :

1. $+\infty + \infty = +\infty$
2. $-\infty - \infty = -\infty$
3. $\pm\infty \cdot \pm\infty = \pm\infty$
4. $\dfrac{0}{\pm\infty} = 0$

Le calcul de la limite d'une suite réelle est toujours l'opération suivante :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n$$

On ne calculera jamais la valeur de la limite d'une suite pour un argument autre que ∞. Par la suite lorsque l'on verra le calcul des limites pour les fonctions réelles on s'intéressera à la valeur en un point autre que l'infini. Il n'y a pas de théorie à proprement parler, le calcul de limites se fait par des astuces mathématiques assez faciles à retenir (voir exercices).

2.3.2 Théorème des deux gendarmes

Théorème 2.3.1. ***Théorème des deux gendarmes***

Soit 3 suites a_n, b_n et c_n telles que pour tout $n \geq N$ on a la relation $a_n \leq b_n \leq c_n$.

Si $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$ alors,

$$\lim_{n\to\infty} b_n = L. \tag{2.14}$$

Démonstration 2.3.1. *On sait qu'à partir d'une certaine valeur N de n (et pour toutes les valeurs suivantes) :*

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

donc à partir de N,

$$a_n - L \leq b_n - L \leq c_n - L.$$

On sait par hypothèse que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$$

donc pour tout $\epsilon > 0$

$$\exists N_1 \mid \forall n \geq N_1, |a_n - L| < \epsilon$$
$$\exists N_2 \mid \forall n \geq N_2, |c_n - L| < \epsilon$$

On choisit maintenant N' comme étant le plus grand nombre $\{N, N_1, N_2\}$. On est alors sûr que pour N', $|b_n - L| < \epsilon$ donc que

$$\lim_{n\to\infty} b_n = L. \quad \square$$

2.4 EXERCICES sur les suites

Ex 2.1. Donner les suites suivantes de manière explicite et récurrente :

a) $\{0, 3, 6, 9, 12, 15, ...\}$

b) $\left\{\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \frac{16}{81}, ...\right\}$

c) $\{0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, ...\}$

d) $\{1, -1, 1, -1, 1, -1, ...\}$

f) $\{1, 3, 5, 7, 9\}$

Solution

Ex 2.2. Montrer par un raisonnement par récurrence que la suite

$$u_0 = 0, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n + 4}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{2.15}$$

est bornée.

Solution

Ex 2.3. Montrer par un raisonnement par récurrence que la suite

$$u_0 = \frac{3}{2}, \quad u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{2.16}$$

est bornée.

Solution

Ex 2.4. Démontrer par un raisonnement par récurrence que si on donne

$$u_0 = 0, \quad u_{n+1} = 2u_n + 1 \tag{2.17}$$

alors

$$u_n = 2^n - 1, \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.18}$$

Solution

Ex 2.5. Montrer que la suite $u_0 = 1, \ u_{n+1} = u_n + n + 2$ n'est pas bornée et étudier sa croissance.

Solution

Ex 2.6. Soit la suite $u_n = \frac{1}{n+1}$. Est-elle monotone, est-elle bornée ?

Solution

Ex 2.7. La suite $u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$. Est-elle monotone, est-elle bornée ?

Solution

Ex 2.8. Montrer par un raisonnement par récurrence que la suite donnée sous forme récurrente par

$$u_0 = 1; \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 1}, \tag{2.19}$$

peut être donnée, sous forme explicite, par

$$w_n = \frac{1}{n+1}. \tag{2.20}$$

Solution

Ex 2.9. Soit la suite $u_n = (-1)^n$. Calculer sa limite, si celle-ci existe.

Solution

Ex 2.10. Calculer la limite de la suite donnée par

$$u_0 = 1,\ u_{n+1} = \frac{1}{u_n + 1},\ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.21}$$

Solution

Ex 2.11. Montrer les limites suivantes en utilisant la définition 2.13.

i)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \tag{2.22}$$

ii)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n+1} = 1 \tag{2.23}$$

Solution

Ex 2.12. Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{10^{300}n^3 - n^2 + 1}{10^{-300}n^4 + 10n^3}$
2. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^5}}{n^3 + 1}$
3. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\left(n + \dfrac{1}{n}\right)$
4. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{(n-1)^2}{4n^2 + 1}$
5. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^2 + \sqrt{n+2}}{3n + 1}$
6. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{(1 - 2\sqrt{n})^2}{4n - 4\sqrt{n} + 1}$
7. $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2}{n+1} - \dfrac{n^2}{n-1}\right)$

Solution

Ex 2.13. Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$
2. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n+1}}$

3. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n\sin(n\frac{\pi}{2})}{\sqrt{n^2+1}}$

Solution

Ex 2.14. Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2-1}-n\right)$
2. $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n-1}-\sqrt{3n}\right)$
3. $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+3n}-n\right)$

Solution

Ex 2.15. Montrer que les suites suivantes sont monotones, bornées et trouver leurs limites.

1. $u_0 = 1;\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2}$
2. $u_0 = \dfrac{1}{2};\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{1+u_n}$
3. $u_0 = 2;\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2+4}{5}$

Solution

2.5 SOLUTIONS des exercices sur les suites

Il n'y a pas de méthode spécifique pour résoudre ce type d'exercices. Il est cependant toujours utile de faire une liste des premiers termes de la suite.

Solution Ex 2.1. <2.1>

a)

$$\begin{array}{ll}
\underline{\text{forme récurrente}} & \underline{\text{forme explicite}} \\
a_0 = 0 & a_0 = 0 = 3\cdot 0 \\
a_1 = 3 = a_0 + 3 & a_1 = 3 = 3\cdot 1 \\
a_2 = 6 = a_1 + 3 & a_2 = 6 = 3\cdot 2 \\
a_3 = 9 = a_2 + 3 & a_3 = 9 = 3\cdot 3 \\
\vdots & \vdots \\
a_{n+1} = a_n + 3 & a_n = 3\cdot n
\end{array} \tag{2.24}$$

La forme récurrente est

$$a_0 = 0,\ a_{n+1} = a_n + 3 \tag{2.25}$$

et la forme explicite :

$$a_n = 3n. \tag{2.26}$$

b)

$$\begin{array}{ll} \underline{\text{forme récurrente}} & \underline{\text{forme explicite}} \\ b_0 = \frac{2}{3} & b_0 = \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^1 \\ b_1 = \frac{4}{9} = b_0 \cdot \frac{2}{3} & b_1 = \frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \\ b_2 = \frac{8}{27} = b_1 \cdot \frac{2}{3} & b_2 = \frac{8}{27} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \\ b_3 = \frac{16}{81} = b_2 \cdot \frac{2}{3} & b_3 = \frac{16}{81} = \left(\frac{2}{3}\right)^4 \\ \vdots & \vdots \\ b_{n+1} = b_n \cdot \frac{2}{3} & b_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \end{array} \tag{2.27}$$

La forme récurrente est

$$b_0 = \frac{2}{3},\ b_{n+1} = \frac{2}{3} b_n \tag{2.28}$$

et la forme explicite

$$b_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n. \tag{2.29}$$

c)

$$\begin{array}{ll} \underline{\text{forme récurrente}} & \underline{\text{forme explicite}} \\ c_0 = 0 & c_0 = 0 = \frac{0 \cdot 1}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \\ c_1 = 1 & c_1 = 1 = \frac{1 \cdot 2}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \\ c_2 = 3 = 2 \cdot 1 - 0 + 1 = 2 \cdot c_1 - c_0 + 1 & c_2 = 3 = \frac{2 \cdot 3}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \\ c_3 = 6 = 2 \cdot 3 - 1 + 1 = 2 \cdot c_2 - c_1 + 1 & c_3 = 6 = \frac{3 \cdot 4}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \\ c_4 = 10 = 2 \cdot 6 - 3 + 1 = 2 \cdot c_3 - c_2 + 1 & c_4 = 3 = \frac{2 \cdot 3}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \\ \vdots & \vdots \\ c_{n+2} = 2 \cdot c_{n+1} - c_n + 1 & c_n = \frac{n(n+1)}{2} \end{array} \tag{2.30}$$

La forme récurrente est

$$c_0 = 0,\ \ c_1 = 1,\ \ c_{n+2} = 2 \cdot c_{n+1} - c_n + 1 \tag{2.31}$$

et la forme explicite :

$$c_n = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{2.32}$$

On remarquera qu'ici c_0 et c_1 sont donné et que la récurrence est basée non pas seulement sur une seule valeur précédente, mais deux.

Solution Ex 2.2. →2.2.
On commence par estimer un majorant M et un minorant m de la suite donnée

$$\begin{aligned} (u_n) &= \left\{ 0, 2, \sqrt{6}, \sqrt{4+\sqrt{6}}, \sqrt{\sqrt{4+\sqrt{6}}+4}, \sqrt{\sqrt{\sqrt{4+\sqrt{6}}+4}+4}, \ldots \right\} \\ &= \{0, 2, 2.44, 2.54, 2.55, 2.56, 2.56, \ldots\} \end{aligned}$$

On peut prendre $m = 0$ et $M = 3$.

Il s'agit à présent de décider de la proposition à vérifier par récurrence, qui est ici :

$$P_n : \ m \leq u_n \leq M \quad \text{ou encore} \quad 0 \leq u_n \leq 3 \tag{2.33}$$

On commence la démonstration par récurrence par l'initialisation en vérifiant que P_0 est vraie.

$$P_0 : \quad 0 \leq u_0 = 0 \leq 3 \tag{2.34}$$

Ensuite nous formulons l'**hypothèse** que pour n quelconque,

$$P_n : \quad 0 \leq u_n \leq 3 \tag{2.35}$$

L'hypothèse étant posée on implémente l'hérédité :

$$P_n \Rightarrow P_{n+1} \quad \equiv \quad 0 \leq u_n \leq 3 \ \Rightarrow \ 0 \leq u_{n+1} \leq 3 \tag{2.36}$$

On part de $0 \leq u_n \leq 3$ et on commence par ajouter 4 à cette l'inégalité,

$$4 \leq u_n + 4 \leq 7, \tag{2.37}$$

à présent on prend la racine carrée de chaque terme (la fonction racine carrée est strictement croissante et ne transforme donc pas les inégalités). Finalement,

$$\sqrt{4} \leq \sqrt{u_n + 4} \leq \sqrt{7} \quad \equiv \quad 2 \leq u_{n+1} \leq \sqrt{7} = 2.65 \tag{2.38}$$

u_{n+1} se situe bien entre 0 et 3.

Puisque P_0 est vraie et que $P_n \Rightarrow P_{n+1}$, on a démontré, en utilisant le raisonnement par récurrence, que la proposition P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution Ex 2.3. →2.3.
On commence par calculer quelques termes

$$(u_n) = \left\{ \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{6}, \frac{8}{7}, \frac{9}{8}, \dots \right\} \tag{2.39}$$

On définit la proposition P_n à démontrer, soit

$$P_n : \ 1 \leq u_n \leq \frac{3}{2} \tag{2.40}$$

On fait l'hypothèse que pour un n quelconque :

$$1 \leq u_n \leq \frac{3}{2} \tag{2.41}$$

On vérifie l'initialisation :

$$P_0 : \ 1 \leq u_0 \leq \frac{3}{2} \quad \equiv \quad 1 \leq \frac{3}{2} \leq \frac{3}{2} \tag{2.42}$$

On implémente l'hérédité $P_n \ \Rightarrow \ P_{n+1}$:

i) On inverse l'hypothèse (en respectant les règles des inégalités)

$$1 \geq \frac{1}{u_n} \geq \frac{2}{3} \tag{2.43}$$

ii) On multiplie par -1 et on ajoute 2

$$-1 \leq -\frac{1}{u_n} \leq -\frac{2}{3} \quad \equiv \quad 2-1 \leq 2-\frac{1}{u_n} \leq 2-\frac{2}{3} \quad \equiv \quad 1 \leq u_{n+1} \leq \frac{4}{3}\left(\leq \frac{3}{2}\right). \tag{2.44}$$

On a démontré que $1 \leq u_n \leq \frac{3}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Solution Ex 2.4. →2.4.
On commence par écrire la proposition P_n à démontrer pour tout n :

$$P_n : \quad u_n = 2^n - 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.45}$$

On démontre la validité de P_0 (initialisation) :

$$P_0 : \; u_0 = 2^0 - 1 = 1 - 1 = 0 \tag{2.46}$$

Après avoir fait l'hypothèse que pour un n quelconque $u_n = 2^n - 1$, on implémente l'hérédité $P_n \Rightarrow P_{n+1}$.
On sait par l'énoncé de l'exercice que $u_{n+1} = 2u_n + 1$, donc

$$u_{n+1} = 2 \cdot u_n + 1 = 2 \cdot (2^n - 1) + 1 \tag{2.47}$$

En développant et en réduisant on obtient

$$u_{n+1} = 2^{n+1} - 1 \tag{2.48}$$

et ce pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc

$$P_{n+1} : \quad u_{n+1} = 2^{n+1} - 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{2.49}$$

qui est de la même forme que u_n. On a donc bien $P_n \Rightarrow P_{n+1}$.

Solution Ex 2.5. →2.5.
On commence par démontrer que la suite est croissante, car on en aura besoin pour démontrer qu'elle n'est pas bornée.

$$u_{n+1} - u_n = u_n + n + 2 - u_n = n + 2 \geq 0, \; \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.50}$$

Ayant démontré la croissance de la suite on pose $p = \langle u_n$n'est pas bornée$\rangle$ et on prouve que $(non)p$ est faux. Si la suite est bornée alors il existe une valeur $M \in \mathbb{N}$ telle que pour tout n,

$$u_n \leq M. \tag{2.51}$$

Pour $n = M$ (valeur que n est forcé de prendre) on a

$$u_{M+1} = u_M + M + 2 \leq M. \tag{2.52}$$

Cette dernière expression est une contradiction, car u_n est une suite croissante et sa valeur de départ u_0 est égale à 1. L'expression $(non)p$ est fausse donc p est vraie, la suite n'est pas bornée.

Solution Ex 2.6. →2.6.

On commence par écrire quelques termes de la suite :

$$(u_n) = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots.\right\}$$

On prouve que la suite est strictement décroissante (donc monotone)

$$\begin{aligned} u_n > u_{n+1},\ \forall n : \quad \frac{1}{n+1} > \frac{1}{(n+1)+1} \quad & \xrightarrow{\Leftrightarrow} \quad \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} > 0 \\ & \xrightarrow{\Leftrightarrow} \quad \frac{1}{n^2+3n+1} > 0 \end{aligned}$$

n étant nul ou positif, le dénominateur de cette dernière inégalité le sera aussi. Ce qui implique la stricte décroissance.

La suite est bornée, car n ne peut prendre que des valeurs sur $\mathbb{N}$, la décroissance stricte implique que le majorant sera $M = u_0 = 1$ et le minorant sera la valeur de la suite pour n tendant vers l'infini c.-à-d.$m = 0$.

Solution Ex 2.7. →2.7.

Si on calcule quelques termes, on trouve :

$$(u_n) = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{32}, \frac{1}{64}, -\frac{1}{128}, \frac{1}{256}, -\frac{1}{512}, \frac{1}{1024}, \ldots\right\}$$

La suite est alternée, elle change de signe selon la parité de n. On peut séparer cette suite en deux suites, l'une décroissante et l'autre croissante en posant respectivement pour l'une

$$\begin{aligned} v_p &= \left(-\frac{1}{2}\right)^{2p}, \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \text{(exposant pair)} \\ (v_p) &= \left\{1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \frac{1}{256}, \frac{1}{1024}, \ldots\right\} \end{aligned}$$

et pour l'autre,

$$\begin{aligned} w_p &= \left(-\frac{1}{2}\right)^{2p+1}, \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \text{(exposant impair)} \\ (w_p) &= \left\{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{32}, -\frac{1}{128}, -\frac{1}{512}, \ldots\right\} \end{aligned}$$

La suite $v_p = \left(-\frac{1}{2}\right)^{2p}$ est décroissante, car

$$v_p - v_{p+1} > 0: \quad v_p - v_{p+1} = 3(-1)^{2p}2^{-2(p+1)} = \frac{3}{2^{2(p+1)}} > 0$$

et la suite $w_p = \left(-\frac{1}{2}\right)^{2p+1}$ croissante,

$$w_p - w_{p+1} < 0: \quad w_p - w_{p+1} = -3(-1)^{2p}2^{-2p-3} = \frac{-3}{2^{2(p+1)+1}} < 0$$

Si l'on calcule la valeur de la différence entre les deux suites pour p tendant vers l'infini on obtient :

$$\lim_{p\to\infty}(v_p - w_p) = \lim_{p\to\infty}\left(3(-1)^{2n}2^{-(2n+1)}\right) = \lim_{p\to\infty}\frac{3}{2^{2n+1}} = 0$$

On peut dire que les suites ont la même limite (on se doute que c'est zéro), le comportement des suites v_p et w_p en font des suites adjacentes. L'une est croissante, l'autre décroissante et leur différence tend vers 0 quand l'indice de la suite tend vers l'infini.
On voit que la suite est bornée par la valeur $|M| = 1$.

Solution Ex 2.8. →2.8.
P_n est ici l'égalité $u_n = \frac{1}{n+1}$.
On doit toujours commencer par vérifier l'initialisation, dans ce cas il faut vérifier que $P_0 = u_0 = \frac{1}{0+1} = 1$, ce qui est le cas.
On continue par supposer que pour n quelconque on a $u_n = \frac{1}{n+1}$, ce qui est l'hypothèse.
Finalement on passe à l'hérédité. Pour démontrer l'hérédité ($P_n \Rightarrow P_{n+1}$), on se base sur la définition récurrente de la suite en substituant u_n (qui est vraie par hypothèse) par sa valeur (donnée sous forme explicite) dans la forme récurrente $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n+1}$.

$$u_{n+1} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}+1} = \frac{1}{n+2}$$

La dernière expression peut être écrite sous la forme suivante :

$$u_{n+1} = \frac{1}{n+2} = \frac{1}{(n+1)+1}.$$

Il est donc clair que , $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ car la forme de l'équation pour u_{n+1} est la même que u_n.

Il est capital de vérifier l'initialisation. Supposons par exemple que la première valeur aie été $u_0 = 2$ au lieu de $u_0 = 1$. Dans ce cas la suite sous forme récurrente aurait été

$$(u_n) = \left\{2, \frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{2}{7}, \frac{2}{9}, \frac{2}{11}, \frac{2}{13}, \frac{2}{15}, \frac{2}{17}, \frac{2}{19}, \frac{2}{21}, \dots\right\}$$

et celle sous forme explicite :

$$(u_n) = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \dots\right\}$$

Solution Ex 2.9. →2.9.

$$(u_n) = \{1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, ...\}$$

La suite est bornée par $m = -2$ et , $M = 3$ car on peut remarquer que

$$\begin{aligned} m = -2 &< \min\left\{(-1)^{2n+1}, (-1)^{2n}\right\} \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ et} \\ M = 3 &> \max\left\{(-1)^{2n+1}, (-1)^{2n}\right\} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Les inégalités ci-dessus implémentent la définition 2.7, m et M sont respectivement un minorant et un majorant de la suite.
La suite, bien que bornée ne converge pas. Il faut le prouver en trouvant une contradiction à la définition de la limite d'une suite 2.13. Supposons que la limite de la suite soit $l = 1$. En prenant $\epsilon = 0.1$, il est facile de trouver n tel que $u_n - 1$ n'est pas dans l'intervalle ϵ qui "entoure" la limite $l = 1$. Par exemple pour $n = 3$ on a $u_n = -1$ et $1 - (-1) = 2 > \epsilon$. On fait le même raisonnement en prenant $l = -1$. On a ainsi montré que pour les uniques candidats possibles 1 et -1, la définition ne marchait pas.

Solution Ex 2.10. →2.10.
On a

$$(u_n) = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \frac{21}{34}, \frac{34}{55}, \frac{55}{89}, \frac{89}{144}, \cdots\right\}$$

On se doute que la suite converge. Pour trouver vers quelle valeur il suffit de remarquer que si u_n converge pour tout n vers une valeur unique, il en est de même pour u_{n+1}.
En posant $u_n = u_{n+1} = l$ et en résolvant l'équation

$$u_{n+1} = \frac{1}{u_n + 1} \quad \xrightarrow{u_n = u_{n+1} = l} \quad l = \frac{1}{l+1}$$

on obtient $l = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right) \approx 0.6180$.

Solution Ex 2.11. →2.11.
Dans les deux cas il faut démontrer que pour tout $\epsilon > 0$, on peut toujours trouver une valeur $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ telle que pour tout $n > N_\epsilon$, l'intervalle $|u_n - l|$ est plus petit que ϵ.

1. Soit $\epsilon > 0$.

$$\left|\frac{1}{n^2} - 0\right| < \epsilon \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{N_\epsilon^2} < \epsilon \quad \Rightarrow \quad N_\epsilon > \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$$

Prenons par exemple $\epsilon = 10^{-4}$, dans ce cas $N_\epsilon > \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} = 100$. En prenant $N_\epsilon = 101$ on vérifie bien que $\frac{1}{101^2} < \epsilon = \frac{1}{100}$. Comme ϵ est strictement plus grand que 0, il sera **toujours** possible de trouver une valeur pour N_ϵ. Ce qui démontre que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0.$$

2. Soit $\epsilon > 0$.

$$\left|\frac{n-1}{n+1} - 1\right| < \epsilon \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{-2}{n+1}\right| < \epsilon \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{n+1} < \epsilon$$

En posant $N_\epsilon = n+1$ on a

$$\frac{2}{n+1} = \frac{2}{N_\epsilon} < \epsilon \quad \Rightarrow \quad N_\epsilon > \frac{2}{\epsilon}$$

Il faut vérifier que pour tout ϵ,

$$\left|\frac{N_\epsilon - 1}{N_\epsilon + 1} - 1\right| = \left|\frac{\frac{2}{\epsilon} - 1}{\frac{2}{\epsilon} + 1} - 1\right| = \left|-\frac{2\epsilon}{\epsilon + 2}\right| = \frac{2\epsilon}{\epsilon + 2} < \epsilon \quad \Rightarrow \frac{2}{\epsilon + 2} < 1$$

Comme ϵ est strictement supérieur à zéro la dernière inégalité prouve que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n+1} = 1$$

Solution Ex 2.12. $\rightarrow$2.12.

1. Une bonne habitude est de commencer par mettre en évidence le terme de degré le plus élevé du dénominateur, n^4 en l'occurrence

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{10^{300}n^3 - n^2 + 1}{10^{-300}n^4 + 10n^3} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^4\left(\frac{10^{300}n^3 - n^2 + 1}{n^4}\right)}{n^4\left(\frac{10^{-300}n^4 + 10n^3}{n^4}\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{10^{300}}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}}{10^{-300} + \frac{10}{n}} \\
&= \frac{0}{10^{-300}} = 0
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^5}}{n^3+1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{5}{3}}}{n^3+1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{5}{3}}}{n^{\frac{5}{3}}\left(\frac{n^3}{n^{\frac{5}{3}}} + \frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(n^{\frac{4}{3}} + n^{\frac{3}{5}}\right)} = 0
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(n + \frac{1}{n}\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \\
&= 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + 0 = 1
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)^2}{4n^2+1} &= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2-2n+1}{4n^2+1}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(4+\frac{1}{n^2}\right)}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{\left(4+\frac{1}{n^2}\right)}=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+\sqrt{n+2}}{3n+1} &= \lim_{n\to\infty}\frac{n\left(n+\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}\right)}{n\left(3+\frac{1}{n}\right)}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(n+\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}\right)}{\left(3+\frac{1}{n}\right)}=\infty\end{aligned}$$

La limite n'existe pas.

6.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{(1-2\sqrt{n})^2}{4n-4\sqrt{n}+1} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1-4\sqrt{n}+4n}{4n-4\sqrt{n}+1}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{4n-4\sqrt{n}+1}{4n-4\sqrt{n}+1}=1\end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n+1}-\frac{n^2}{n-1}\right) &= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2(n-1)-n^2(n+1)}{n^2-1}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2\cdot(-2)}{n^2\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{-2}{1-\frac{1}{n^2}}=-2\end{aligned}$$

Solution Ex 2.13. →2.13.

1. On utilise le théorème des gendarmes (2.14). On pose

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{-1}{(2n+1)^2}\\ b_n &= \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\\ c_n &= \frac{1}{(2n+1)^2}\end{aligned}$$

Pour tout n à partir de $N=1$ (on pourrait prendre $N=1012$!),

$$a_n \le b_n \le c_n \tag{2.53}$$

En remarquant que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-1}{(2n+1)^2} = 0$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = 0$$

On en déduit que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)^2} = 0$.

2. On utilise à nouveau le théorème des deux gendarmes (2.14). On pose

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{-1}{\sqrt{n+1}} \\ b_n &= \frac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n+1}} \\ c_n &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} \end{aligned}$$

Pour tout n à partir de $N = 1$

$$a_n \leq b_n \leq c_n \tag{2.54}$$

En remarquant que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-1}{\sqrt{n+1}} = 0$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0$$

On en déduit que $\lim_{n\to\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n+1}} = 0$.

3. On voit que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{n\sin(n\frac{\pi}{2})}{\sqrt{n^2+1}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n\sin(n\frac{\pi}{2})}{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) \\ &= 1 \cdot \lim_{n\to\infty} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

On ne peut avoir une limite oscillant entre -1 et 1, la limite d'une suite, pour autant qu'elle existe est unique. Ici, la limite n'existe donc pas.

Solution Ex 2.14. $\rightarrow$2.14.

1. Lorsque l'on est en présence de racines, c'est en général une bonne idée de multiplier dénominateur et numérateur par la racine conjuguée.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-1}-n\right) &= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2-1}-n\right)\left(\sqrt{n^2-1}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2-1}+n\right)}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{n^2-1}+n}=0\end{aligned}$$

On a un exemple d'indétermination de type "$\infty-\infty$" qui donne 0.

2.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n-1}-\sqrt{3n}\right) &= \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n-1}-\sqrt{3n})\,(\sqrt{n-1}+\sqrt{3n})}{(\sqrt{n-1}+\sqrt{3n})}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n\left(-2-\frac{1}{n}\right)}{n\left(\sqrt{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}+\sqrt{\frac{3}{n}}\right)}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(-2-\frac{1}{n}\right)}{\left(\sqrt{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}+\sqrt{\frac{3}{n}}\right)}==-\infty.\end{aligned}$$

On a un exemple d'indétermination de type "$\infty-\infty$" qui donne $-\infty$.

3.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n}-n\right) &= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+3n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+3n}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2+3n}+n\right)}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{3n}{\left(\sqrt{n^2+3n}+n\right)}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{3n}{n\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1\right)}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{3}{\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1\right)}=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

On a un exemple d'indétermination de type "$\infty-\infty$" qui converge vers une limite finie.

Solution Ex 2.15. $\rightarrow$2.15.

1. On commence par prendre contact avec la suite en en calculant quelques termes

$$(u_n)=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\frac{1}{32},\frac{1}{64},\frac{1}{128},\frac{1}{256},\ldots\right\} \tag{2.55}$$

On choisit la proposition P_n qui va nous permettre de démontrer que la suite est bornée et monotone décroissante :

$$P_n : 1 \geq u_n \geq 0 \tag{2.56}$$

On commence par démontrer par récurrence que la suite est monotone décroissante stricte, c'est-à-dire que $u_n - u_{n+1} > 0$.

(a) Initialisation, on vérifie que $u_0 - u_1 = 1 - \frac{1}{2} > 0$.

(b) On fait l'hypothèse que pour n quelconque, $u_n - u_{n+1} > 0$ est vraie.

(c) On implémente l'hérédité :

$$u_n - u_{n+1} > 0 \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad u_n - \frac{u_n}{2} > 0 \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad \frac{1}{2}u_n > 0.$$

On sait que $P_n : 1 \geq u_n \geq 0$ donc on a démontrer que la suite était monotone.

On continue en démontrant que la suite est bornée :

(a) Initialisation, on vérifie P_0 en constatant que $1 \geq 1 \geq 0$ est une proposition vraie.

(b) On fait l'hypothèse que pour n **quelconque**

$$P_n : \; 1 \geq u_n \geq 0.$$

(c) On implémente l'hérédité $P_n \Rightarrow P_{n+1}$,

$$1 \geq u_n \geq 0 \quad \xrightarrow{\cdot \frac{1}{2}} \quad \frac{1}{2} \geq \frac{u_n}{2} \geq 0 \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad \frac{1}{2} \geq u_{n+1} \geq 0$$

La dernière inégalité confirme l'hypothèse (qui était moins stricte).

2. On commence par calculer quelques termes

$$(u_n) = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{8}{9}, \frac{16}{17}, \frac{32}{33}, \frac{64}{65}, \frac{128}{129}, \frac{256}{257}, \ldots\right\} \tag{2.57}$$

On choisit la proposition P_n qui va nous permettre de démontrer que la suite est bornée et monotone croissante :

$$P_n : \frac{1}{2} \leq u_n \leq 1 \tag{2.58}$$

On commence par démontrer par récurrence que la suite est monotone croissante stricte, c'est-à-dire que $u_{n+1} - u_n > 0$.

(a) Initialisation, on vérifie que $u_1 - u_0 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} > 0$.

(b) On fait l'hypothèse que pour n quelconque, $u_{n+1} - u_n > 0$ est vraie.

(c) On implémente l'hérédité :

$$u_{n+1} - u_n > 0 \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad \frac{2u_n}{1+u_n} - u_n > 0 \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad (1 - u_n) > 0.$$

Sous réserve de démontrer encore que $P_n : \frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$ est vrai pour tout n, la suite est monotone.

On démontre ce qui nous manquait juste avant, c'est-à-dire que la suite est bornée par $m = \frac{1}{2}$ et $M = 1$:

(a) Initialisation, on vérifie P_0 en constatant que $P_0 : \frac{1}{2} \leq u_0 \leq 1$ est une proposition vraie. Ce qui est le cas vu que $P_0 : \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \leq 1$.

(b) On fait l'hypothèse que pour n **quelconque**

$$P_n : \ \frac{1}{2} \leq u_n \leq 1.$$

(c) On implémente l'hérédité $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ en deux étapes :

$$\begin{array}{lcl} \frac{1}{2} \leq u_n \leq 1 & \xrightarrow{\cdot 2} & 1 \leq 2u_n \leq 2 \\ \frac{1}{2} \leq u_n \leq 1 & \xrightarrow{+1} & \frac{3}{2} \leq u_n + 1 \leq 2 \end{array}$$

D'après l'hypothèse, $1 + u_n$ est une quantité plus grande ou égale à $2u_n$, on peut donc diviser les inégalités (le membre de droite ne risque pas de devenir plus grand que 1).

$$\frac{2}{3} \leq \frac{2u_n}{1+u_n} \leq 1$$

La dernière inégalité confirme l'hypothèse (qui était moins stricte).

Chapitre 3

Fonctions - Notions de base

3.1 Introduction

J'ai remarqué que chez tous les élèves la notion de fonction était toujours quelque chose d'assez vague. Je vais donner dans les sections qui suivent des notions précises et exactes de ce qu'est une fonction réelle d'une variable réelle (pour de plus ample détail, voir [1].

3.2 Définitions

3.2.1 Fonction réelle d'une variable réelle

Une fonction f définie sur E à valeurs dans F est définie par le triplet

$$f = (G, E, F)$$

avec E et F des sous-ensembles non vides de $\mathbb{R}$ et G une partie du produit cartésien $E \times F$ (ensemble des points $(x; y)$). Pour tout élément de $x \in E$, il existe un élément et un seul y, de F tel que le couple (x, y) appartienne à G.G est appelé le graphe de f, E son ensemble de départ et F son ensemble d'arrivée. En général une fonction est notée :

$$f : E \to F$$

Pour montrer qu'à $x \in E$ correspond $f(x) \in F$, on note $x \mapsto f(x)$, ce qui signifie que $f(x)$ est associé à x [1]. L'ensemble des points $y = f(x)$ est appelé l'image de E par f. On définit également l'ensemble $\operatorname{Im} f$ qui est l'ensemble des images par f de E.

3.2.2 Fonction surjective

La fonction $f : E \to F$ est **surjective** si $F = \operatorname{Im} f$.
De manière plus imagée, une fonction f est surjective si son ensemble d'arrivée est complètement "occupé".

3.2.3 Fonction injective

Une fonction $f : E \to F$ est **injective** si :

$$(x_1, x_2 \in E \ \underline{\text{et}}\ f(x_1) = f(x_2)) \quad \Rightarrow \quad (x_1 = x_2)$$

Autrement dit, une fonction est injective si, quand elle a une image, cette dernière est unique.

1. et non pas l'horrible "va vers" qui apparait très souvent.

3.2.4 Fonction bijective

Une fonction est **bijective** quand elle est à la fois injective et surjective.

3.2.5 Parité

Une fonction est dite **paire** si son ensemble de départ E est symétrique par rapport à l'origine et si

$$f(x) = f(-x) \quad \text{(symétrie axiale par rapport à l'ordonnée } Oy\text{)}$$

Une fonction est dite **impaire** si son ensemble de départ E est symétrique par rapport à l'origine et si

$$f(x) = -f(-x). \quad \text{(symétrie centrale par rapport à l'origine.)}$$

3.2.6 Fonction périodique

Une fonction est dite **périodique** de période T si pour tout élément de son ensemble de départ, $f(x) = f(x+T)$. La quantité nT, avec $n \in \mathbb{Z}^*$, est également une période.

3.3 Limites de fonctions

Dans cette section nous allons voir comment traiter les calculs de limites sur des fonctions. Dans ces calculs, la limite n'est pas toujours la limite prise à l'infini comme dans une suite, mais peut prendre n'importe quelle valeur, finie ou infinie que l'on notera x_0.

3.3.1 Fonction définie au voisinage d'un point

Une fonction $f : E \to F$ est définie au voisinage du point x_0 si pour tout $\alpha > 0$,

$$]-\alpha + x_0; x_0 + \alpha[\subset E \cup \{x_0\}$$

La fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ est définie au voisinage de , , 0 mais pas en 0. L'important est ici la notion de voisinage qui donne une sorte d'"étendue" à x_0 même s'il n'est pas nécessaire que x_0 fasse partie de l'ensemble de départ.

3.3.2 Limite d'une fonction

Une fonction $f : E \to F$ définie au voisinage de x_0 admet la limite L en ce point lorsque $x \to x_0$ si à tout intervalle $\epsilon > 0$, on peut associer un intervalle δ, tel que

$$(x \in E \ \underline{\text{et}}\ 0 \leq |x - x_0| \leq \delta) \Rightarrow |f(x) - L| \leq \epsilon.$$

c.-à-d.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

Il faut bien remarquer que dans cette définition $f(x)$ n'est pas égal à L. Cela sous-entend qu'une fonction peut tendre vers une valeur qui elle-même ne fait pas partie de l'ensemble d'arrivée F, de même que x ne fait pas forcément partie de l'ensemble de départ E.

3.3.3 Opérations algébriques sur les limites

Soit :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L_1$$
$$\lim_{x\to x_0} g(x) = L_2$$

On peut énoncer les propriétés suivantes :

a) $\lim_{x\to x_0} (\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)) = \alpha L_1 + \beta L_2$

b) $\lim_{x\to x_0} (f(x)g(x)) = L_1 L_2$

c) pour $L_2 \neq 0$, $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$

d) Le théorème des deux gendarmes est valable pour les limites de fonctions également.

3.3.4 Formes indeterminées

On appelle grandeurs **indeterminées** les quantités suivantes :

1. $\dfrac{0}{0}$
2. $0 \cdot \infty$
3. $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$
4. $+\infty + (-\infty)$

Les grandeurs suivantes sont **déterminées** :

1. $+\infty + \infty = +\infty$
2. $-\infty - \infty = -\infty$
3. $\pm\infty \cdot \pm\infty = \pm\infty$
4. $\dfrac{0}{\pm\infty} = 0$

3.3.5 Continuité d'une fonction en un point

Une fonction $f : E \to F$ est continue en x_0 ssi $\lim_{x\to x_0} = f(x_0)$

3.3.6 Prolongement par continuité en un point

Soit une fonction $f : E \to F$ et un nombre c n'appartenant pas à E. La limite pour $x \to c$ de f existe. La fonction

$$f_p(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq c \\ \lim_{z\to c} f(x) & \text{si } x = c \end{cases}$$

est appelée prolongement par continuité de f. C'est ce que l'on peut utiliser pour "supprimer" les trous dans l'ensemble de départ d'une fonction (ensemble de départ = domaine de définition).

3.4 EXERCICES - Limites de fonctions et continuité

Ex 3.1. Discuter les limites $\lim_{x \to x_0} f(x)$ suivantes, si elles ne convergent pas, donner une suite (u_n) qui converge vers x_0 et dont la suite de terme $\bar{u}_n = f(u_n)$ diverge. Faire de même pour une des suites convergentes.

1. $\lim_{x \to 0} \dfrac{x-3}{x+5}$
2. $\lim_{x \to -4} \dfrac{x^2+2x-8}{x+4}$
3. $\lim_{x \to 3} \dfrac{2x-6}{x^2-9}$
4. $\lim_{x \to 5} \dfrac{x^2+2x+1}{x-5}$
5. $\lim_{x \to 3} \dfrac{3-\sqrt{x+6}}{\sqrt{x+1}-2}$

Solution

Ex 3.2. Montrer que la fonction suivante ne peut pas être prolongée par continuité en $x = 0$.

1. $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$

Solution

Ex 3.3. Calculer les limites suivantes à l'aide du théorème des deux gendarmes.

1. $\lim_{x \to 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$
2. $\lim_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$
3. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$

Solution

Ex 3.4. Calculer les limites suivantes

1. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{2x^2+x}$
2. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin(2x)}{x}$
3. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin(2x)}{\sin(3x)}$
4. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin\left(\frac{x}{4}\right)}{5x}$
5. $\lim_{x \to 1} \dfrac{\sin(x-1)}{x-1}$
6. $\lim_{x \to 1} \dfrac{\tan(7x+7)}{\sin(3x+3)}$

Solution

Ex 3.5. Démontrer que :

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x} = 0$
2. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

Solution

Ex 3.6. Calculer les limites :

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{\sin(x)}$
2. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin^2(x)}{1-\cos(x)}$

Solution

Ex 3.7. Calculer les limites à droite ou à gauche suivantes :

1. $\lim_{\substack{x\to 5\\ x>5}} \dfrac{x^2+2x-1}{x-5}$
2. $\lim_{\substack{x\to 5\\ x<5}} \dfrac{x^2+2x-1}{x-5}$
3. $\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \dfrac{x^3+3x-1}{x^2-2x-3}$
4. $\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \dfrac{-7}{x^2-5x+6}$
5. $\lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} \dfrac{(-x^2-1)(x+3)}{(x+1)(x-2)}$
6. $\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \dfrac{-2x^2+x-4}{x^2-4}$

Solution

Ex 3.8. Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{x^2-1}{x^4-2x^3+1}$
2. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{3-x^3-x^5}{x^4-2+2x^3}$
3. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{8x^3-1}{2x^2-4x+2}$

Solution

Ex 3.9. Démontrer en utilisant la définition 3.3.5 que la fonction $f(x) = x^2+2$ est continue en 3.

Solution

3.5 SOLUTIONS

Solution Ex 3.1. <3.1>

1. Le domaine de définition de la fonction est $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-5\}$ et on nous demande la limite pour x tendant vers 0. Le point $x = 0$ appartient au D_f. En ce point, la valeur de la limite est la même que la valeur de la fonction.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-3}{x+5} = f(0) = -\frac{3}{5}$$

La fonction est continue en $x = 0$.

2. (Solution détaillée) On voit que $f(-4)$ est une valeur indéterminée $\left(\frac{0}{0}\right)$. On essaie de lever l'indétermination en factorisant.

$$\lim_{x\to -4} \frac{x^2+2x-8}{x+4} = \lim_{x\to -4} \frac{(x+4)(x-2)}{x+4}$$

Comme x est différent de $x_0 = 4$, puisqu'il ne fait que tendre vers cette valeur, on peut simplifier le facteur $(x+4)$. Il faut bien comprendre que x est dans le voisinage de 4, mais ne vaut pas 4. Après simplification :

$$\lim_{x\to -4} \frac{(x+4)(x-2)}{x+4} = \lim_{x\to -4}(x-2) = -6$$

La fonction donnée, $f(x) = \dfrac{x^2+2x-8}{x+4}$ n'est pas continue en , , $x = 4$ mais sa valeur tend vers une limite finie qui est -6. Ce type de discontinuité est dite discontinuité apparente. On peut "réparer" la fonction et la rendre continue en la prolongeant ainsi :

$$f_p(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+2x-8}{x+4} & \text{si } x \neq -4 \\ -6 & \text{si } x = -4 \end{cases}$$

On cherche à présent une suite numérique dont la valeur tend vers -4 lorsque son argument n tend vers l'infini. On peut choisir la suite donnée sous forme explicite par

$$u_n = -4 + \frac{1}{n};$$

car

$$\lim_{n\to\infty}\left(-4+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1-4n}{n} = -4$$

En substituant dans la limite donnée, les occurrences de x par la suite (u_n), on obtient une nouvelle version la limite initiale :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -4} \frac{x^2+2x-8}{x+4} \quad \xrightarrow{x\,=\,u_n} \quad & \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1-4n}{n}\right)^2 + 2\left(\frac{1-4n}{n}\right) - 8}{\left(\frac{1-4n}{n}\right)+4} \\
= \quad & \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1-6n}{n^2}}{\frac{n}{n^2}} \\
= \quad & \lim_{n\to\infty} \frac{1-6n}{n} = -6
\end{aligned}$$

Le résultat est identique.

3. En substituant $x = 3$ dans la fonction dont on cherche la limite on obtient une indéterminée, donc on factorise :

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x-6}{x^2-9} = \lim_{x\to 3}\frac{2(x-3)}{(x+3)(x-3)}$$

On simplifie et on calcule la limite,

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x-6}{x^2-9} = \lim_{x\to 3}\frac{2}{x+3} = \frac{1}{3}$$

.

4. (Solution détaillée) Après avoir factorisé,

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2+2x+1}{x-5} = \lim_{x\to 5}\frac{(x+1)^2}{x-5},$$

on remarque que l'on tombe sur une indéterminée de type $(\frac{a}{0})$. Mais ici la situation change, on ne peut pas lever l'indétermination en simplifiant des facteurs. On est dans le cas d'une discontinuité "plus grave", car elle ne peut pas être éliminée. On nous demande uniquement de trouver un changement de variable qui permette de transformer la limite donnée pour $x \to 5$ en une limite pour $n \to \infty$.
On choisit la suite

$$u_n = 5 + \frac{1}{n} = \frac{5n+1}{n}$$

et on la substitue dans l'énoncé

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{(\frac{5n+1}{n})^2 + 2(\frac{5n+1}{n}) + 1}{(\frac{5n+1}{n}) - 5} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}+12+36n}{\frac{1}{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\frac{1}{n}+12+36n}{n}}{\frac{1}{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} 12 + \lim_{n\to\infty} 36n + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} \\
&= 12 + \lim_{n\to\infty} 36n + 0
\end{aligned}$$

La limite diverge.

Remarque 8. *Alors pourquoi ne pas dire que la fonction tend vers l'infini lorsque x tend vers 5. La raison est la suivante : 5 est une valeur qui peut être approchée depuis en haut, mais aussi depuis en bas. La suite de terme $u_n = 5 + \frac{1}{n}$ est une suite qui tend vers , , 5 mais pour des valeurs un tout petit peu supérieures à 5. On ne peut pas donner une solution en ne connaissant que la moitié du problème. On verra par la suite comment procéder.*

5. On a une valeur indéterminée $\left(\frac{0}{0}\right)$ en $x = 3$. On amplifie la fonction par l'expression conjuguée du dénominateur

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 3}\frac{3-\sqrt{x+6}}{\sqrt{x+1}-2} &= \lim_{x\to 3}\frac{(3-\sqrt{x+6})(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)} \\
&= \lim_{x\to 3}\frac{(3-\sqrt{x+6})(\sqrt{x+1}+2)}{x-3}
\end{aligned}$$

La valeur est toujours indéterminée en $x = 3$. On procède à nouveau en multipliant numérateur et dénominateur par la racine conjuguée adéquate,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 3} \frac{(3-\sqrt{x+6})(\sqrt{x+1}+2)}{x-3} &= \lim_{x\to 3} \frac{(3-\sqrt{x+6})(3+\sqrt{x+6})(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)(3+\sqrt{x+6})} \\
&= \lim_{x\to 3} \frac{-(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)(3+\sqrt{x+6})} \\
&= \lim_{x\to 3} \frac{-(\sqrt{x+1}+2)}{(3+\sqrt{x+6})} = -\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Solution Ex 3.2. *to*3.2. L'idée est de trouver deux suites u_n et v_n qui tendent vers zéro et dont l'image par la fonction f n'est pas la même, $\lim_{n\to\infty} f(u_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(v_n)$. En d'autres termes on substitue $x = 0$ par des suites dont la limite est également zéro, mais dont les images par f seront différentes. On démontre ainsi que f a deux comportements différents selon les cas et que, par ce fait, ne peut être prolongée par continuité pour en faire une fonction continue.

1. Posons,

$$\begin{aligned}
u_n = \frac{1}{n\pi} &\quad \xrightarrow{\text{limite}} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\pi} = 0 \\
v_n = \frac{1}{2\pi n - \frac{\pi}{4}} &\quad \xrightarrow{\text{limite}} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi n - \frac{\pi}{4}} = 0.
\end{aligned}$$

On substitue u_n et v_n dans x et on calcul la limite des nouvelles suites obtenues :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{\frac{1}{n\pi}}\right) &= \lim_{n\to\infty} \sin(n\pi) = 0 \\
\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{\frac{1}{2\pi n - \frac{\pi}{4}}}\right) &= \lim_{n\to\infty} \sin\left(2\pi n - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Les limites sont différentes, la fonction n'est pas continue en $x = 0$. Un seul contre-exemple suffit.

Solution Ex 3.3. $\to$3.3. On va choisir deux fonctions f_a et f_c de manière à ce que f_a soit toujours plus petite que f_b (qui est la fonction donnée), et que f_c soit toujours plus grande que f_b. Cette dernière est ainsi prise en sandwich. Si de plus f_a et f_c ont la même limite alors f_b aussi.

1. On pose

$$\begin{aligned}
f_a(x) &= -x^2 \\
f_b(x) &= x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \\
f_c(x) &= x^2
\end{aligned}$$

et on vérifie que pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$,

$$\begin{aligned}
f_a(x) &\leq f_b(x) : \quad \xrightarrow{\hookrightarrow} \quad x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) - (-x^2) \geq 0 \quad \xrightarrow{\hookrightarrow} \quad x^2(\pm 1 + 1) \geq 0 \\
f_b(x) &\leq f_c(x) : \quad \xrightarrow{\hookrightarrow} \quad x^2 - x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) \geq 0 \quad \xrightarrow{\hookrightarrow} \quad x^2(1 \pm 1) \geq 0
\end{aligned}$$

Les conditions pour le théorème des deux gendarmes sont remplies et comme

$$\lim_{x\to 0} f_a(x) = \lim_{x\to 0} -x^2 = 0 \text{ et } \lim_{x\to 0} f_c(x) = \lim_{x\to 0} x^2 = 0$$

on en déduit que

$$\lim_{x\to 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

(Voir FIGURE 3.1)

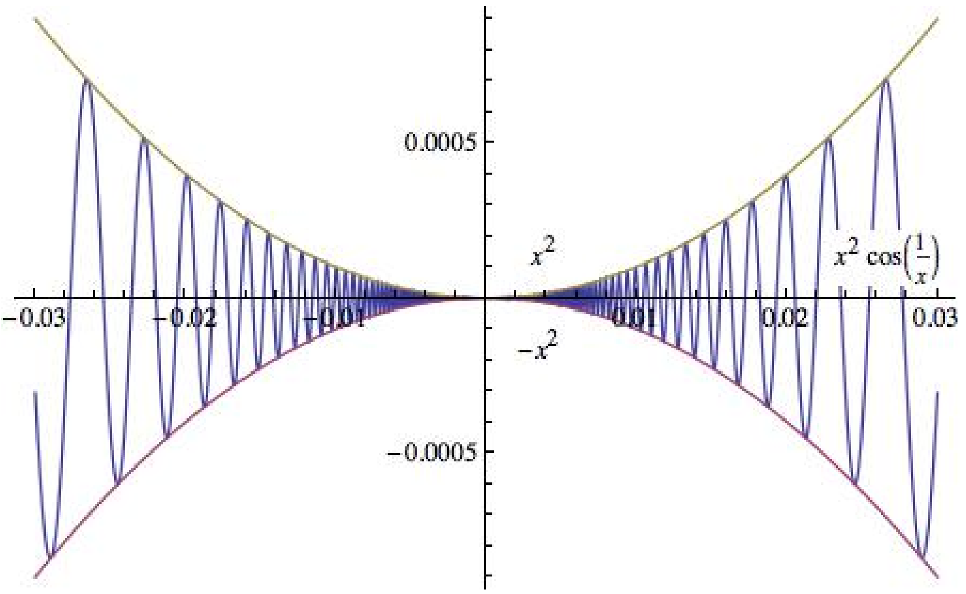

FIGURE 3.1 – Exercice 3.3

2. On pose

$$\begin{aligned} f_a(x) &= -|x| \\ f_b(x) &= x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \\ f_c(x) &= |x| \end{aligned}$$

et on vérifie que pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$,

$$\begin{aligned} f_a(x) &\leq f_b(x) : \xrightarrow{\looparrowright} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - (-|x|) \geq 0 \xrightarrow{\looparrowright} x(\pm 1 + 1 \cdot \mathrm{sgn}(x)) \geq 0 \\ f_b(x) &\leq f_c(x) : \xrightarrow{\looparrowright} |x| - x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \geq 0 \xrightarrow{\looparrowright} x(\mathrm{sgn}(x)) - \pm 1) \geq 0 \end{aligned}$$

Les conditions pour le théorème des deux gendarmes sont remplies et comme

$$\lim_{x\to 0} f_a(x) = \lim_{x\to 0} -|x| = 0 \text{ et } \lim_{x\to 0} f_c(x) = \lim_{x\to 0} |x| = 0$$

on en déduit que

$$\lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

(Voir FIGURE 3.2)

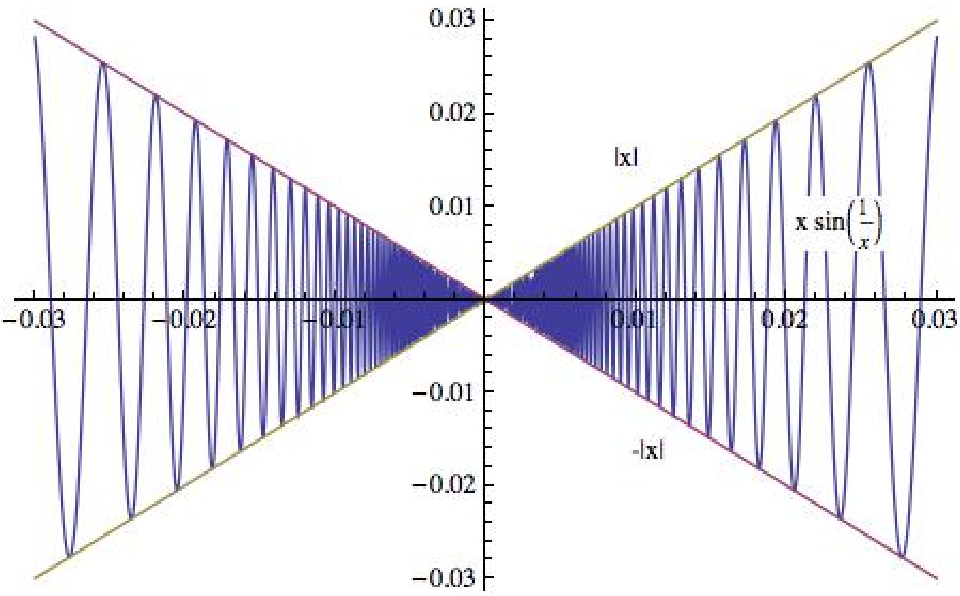

FIGURE 3.2 – Exercice 3.3

3. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ A ce niveau, les élèves ne sont pas sensés connaître le théorème de L'Hospital. Pour trouver les fonctions f_a et f_c, on va faire une approche géométrique en utilisant le dessin (voir FIGURE 3.3).
On peut définir les aires suivantes (on pose $\alpha = x$),

$$
\begin{aligned}
\text{aire triangle } OCB &= \frac{\sin(x)}{2} \\
\text{aire secteur } OCB &= \frac{x}{2\pi}\pi R^2 = \frac{x}{2} \quad (R = 1) \\
\text{aire triangle } OCD &= \frac{\tan(x)}{2}
\end{aligned}
$$

et la relation d'ordre

$$\text{aire triangle } OCB \leq \text{aire secteur } OCB \leq \text{aire triangle } OCD \left(\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}[\right).$$

D'où

$$
\begin{aligned}
\frac{\sin(x)}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\tan(x)}{2} \quad & \xrightarrow{\looparrowright} \quad \sin(x) \leq x \leq \tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x} \\
& \xrightarrow{\times \frac{1}{\sin x}} \quad 1 \leq \frac{x}{\sin(x)} \leq \frac{1}{\cos(x)} \\
& \xrightarrow{\text{inversion}} \quad \cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1
\end{aligned}
$$

On peut à présent choisir $f_a(x) = \cos(x)$ et $f_c(x) = 1$. On remarque que

$$\lim_{x\to 0} f_a(x) = \lim_{x\to 0} \cos(x) = \lim_{x\to 0} f_c(x) = 1$$

et on en déduit que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

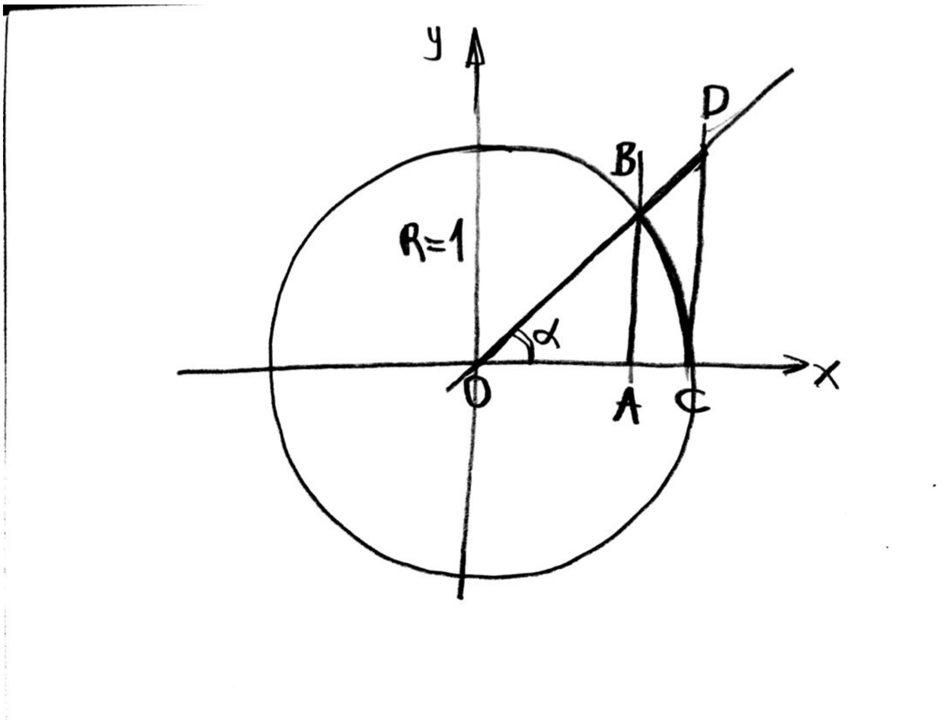

FIGURE 3.3 – Exercice 3.3

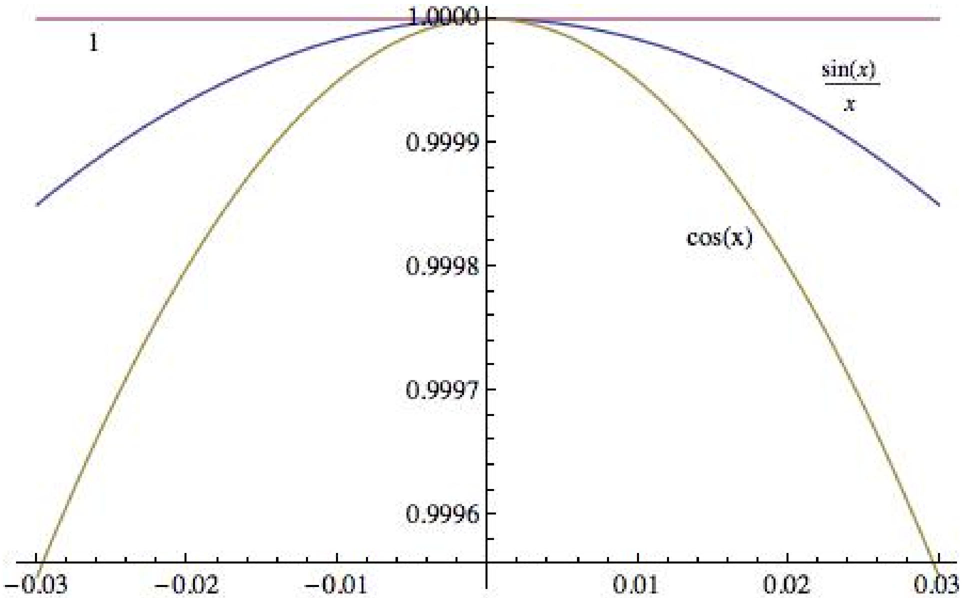

FIGURE 3.4 – Exercice 3.3

(Voir FIGURE 3.4)

Solution Ex 3.4. →3.4.

1. On va utiliser la limite déjà démontrée à l'exercice 3.3, à savoir que $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x}=1$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{2x^2+x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x(2x+1)}\\
&\xrightarrow{\text{prop.des limites}} \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{2x+1}=1\cdot 1=1
\end{aligned}$$

2. On amplifie la fraction par la quantité adéquate :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{\sin(3x)} &\xrightarrow{\looparrowright} \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(2x)}{\sin(3x)}\frac{2x}{3x}\frac{3x}{2x}\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{2x}\cdot\frac{3x}{\sin(3x)}\cdot\frac{2x}{3x}\\
&\xrightarrow{\text{prop.des limites}} \lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{2x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin(3x)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2x}{3x}\\
&= 1\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

3. On amplifie la fraction par la quantité adéquate :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{x}{4}\right)}{5x} &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{4}\right)}{5x}\cdot\frac{5x}{\frac{x}{4}}\cdot\frac{\frac{x}{4}}{5x}\right)\\
&\xrightarrow{\text{prop.des limites}} \lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{x}{4}\right)}{\left(\frac{x}{4}\right)}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{5x}{5x}\cdot\frac{\left(\frac{x}{4}\right)}{5x}\right)\\
&= \frac{1}{20}
\end{aligned}$$

4. On pose $x=y+1$ et on substitue dans la limite donnée.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x-1} &\xrightarrow{x=y+1} \lim_{y+1\to 1}\frac{\sin(y+1-1)}{y+1-1}\\
&= \lim_{y\to 0}\frac{\sin(y)}{y}=1
\end{aligned}$$

5. On pose $x=y-1$ et on substitue dans la limite donnée.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -1}\frac{\tan(7x+7)}{\sin(3x+3)} &\xrightarrow{x=y+1} \lim_{(y-1)\to -1}\frac{\tan(7(y-1)+7)}{\sin(3(y-1)+3)}\\
&= \lim_{y\to 0}\frac{\tan(7y)}{\sin(3y)}\\
&= \lim_{y\to 0}\left(\frac{\sin(7y)}{\cos(7y)}\cdot\frac{1}{\sin(3y)}\right)\\
&= \lim_{y\to 0}\left(\frac{\sin(7y)}{\cos(7y)}\cdot\frac{1}{\sin(3y)}\cdot\frac{3y}{7y}\cdot\frac{7y}{3y}\right)\\
&= \lim_{y\to 0}\left(\frac{\sin(7y)}{\cos(7y)}\cdot\frac{3y}{\sin(3y)}\cdot\frac{7y}{7y}\cdot\frac{1}{3y}\right)\\
&\xrightarrow{\text{prop.des limites}} \lim_{y\to 0}\frac{\sin(7y)}{7y}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{3y}{\sin(3y)}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{7}{3\cos(7y)}\\
&\xrightarrow{\text{prop.des limites}} 1\cdot 1\cdot\frac{7}{3\cdot\lim_{y\to 0}\cos(7y)}\\
&= 1\cdot 1\cdot\frac{7}{3\cdot 1}=\frac{7}{3}
\end{aligned}$$

Solution Ex 3.5. →3.5.

Démontrer que :

1. On amplifie par $1+\cos(x)$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x}\cdot\frac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2(x)}{x}\cdot\frac{1}{1+\cos(x)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)}{x}\cdot\frac{1}{1+\cos(x)}\\
&\overset{\text{prop.des limites}}{\longrightarrow} \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}\\
&= 1\cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

2. On amplifie par $1+\cos(x)$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}\cdot\frac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2(x)}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos(x)}\\
&\overset{\text{prop.des limites}}{\longrightarrow} \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos(x)}\\
&\overset{\text{prop.des limites}}{\longrightarrow} \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos(x)}\\
&= 1\cdot 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Solution Ex 3.6. →3.6.

Calculer les limites en utilisant :

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x} = 0 \quad\text{et}\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

1.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}\cdot\frac{x}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x}\cdot\frac{x}{\sin(x)}\\
&\overset{\text{prop.des limites}}{\longrightarrow} \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin(x)} = 0\cdot 1 = 0
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)}{1-\cos(x)}\cdot\frac{x^2}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)}{x^2}\cdot\frac{x^2}{1-\cos(x)}\\
&\overset{\text{prop.des limites}}{\longrightarrow} \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos(x)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{1-\cos(x)}{x^2}}\\
&\overset{\text{prop.des limites}}{\longrightarrow} \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)}{x^2}\cdot\frac{1}{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}}\\
&= 1\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}} = 2
\end{aligned}$$

Solution Ex 3.7. →3.7.

On commence par introduire la fonction signe dont l'expression est

$$\operatorname{sgn}(x)\begin{cases} +1 & \text{si } x>0\\ 0 & \text{si } x=0\\ -1 & \text{si } x<0\end{cases}$$

Cette fonction est très commode lorsque l'on doit travailler avec le signe que prend une fonction en différents points plutôt qu'avec la valeur numérique en ces points. C'est la fonction utilisée dans tous les tableaux des signes, lorsque l'on fait l'opération "$+\cdot-\cdot+=-$", on fait en réalité le produit $+1\cdot-1\cdot+1=-1$ pour décider si la valeur de la dernière ligne du tableau est positive ou négative.

1. On commence par factoriser,

$$\lim_{\substack{x\to 5\\ x>5}} \frac{x^2+2x-1}{x-5} = \lim_{\substack{x\to 5\\ x>5}} \frac{(x+1+\sqrt{2})(x+1-\sqrt{2})}{x-5} = \frac{N(x)}{D(x)}$$

   Il n'y a rien à simplifier.
   Le numérateur à la valeur $N(5)=34$. Pour une valeur de, par exemple, 5.00001 (on demande une approche depuis $x>5$) la valeur $N(5.00001)=34.0001$ est du même signe que $N(5)$. En substituant $x=5$ dans le dénominateur, celui-ci va tendre vers zéro, donc le résultat final de la limite sera $\pm\infty$. C'est le signe de dénominateur qui va décider du signe de l'infinité. Dans ce cas on voit que $D(5.00001=0.00001)$ est positif (0^+). Le signe de la fraction sera donc $\frac{+}{+}=+$ donc la limite vaut $+\infty$

2. C'est la même limite que précédemment, mais cette fois on demande sa valeur pour x tendant vers 5, mais par le bas (on dit aussi par la gauche). Le numérateur garde la même signe positif qu'avant $(\operatorname{sgn}(N(4.9999))=\operatorname{sgn}(N(5))=+1$. Le dénominateur est cette fois-ci est négatif, en effet $\operatorname{sgn}(4.9999-5)=-1$. Le signe de l'infini devient $\frac{+1}{-1}=-1$. La limite tend vers moins l'infini lorsque x tend vers 5 par la droite.

   On peut effectuer le calcul de ce type de limite en utilisant une suite numérique. Prenons les deux exemples précédents et substituons à x la suite $u_n=5+\frac{1}{n}$, dans la première limite, et $v_n=5-\frac{1}{n}$ dans la seconde. Il est clair que la suite u_n tend vers 5 par la droite et que la suite v_n tend vers 5 par la gauche. La substitution change les limites vers des valeurs finies en des limites vers l'infini $(n\to\infty)$.

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{x\to 5\\ x>5}} \frac{x^2+2x-1}{x-5} \quad & \xrightarrow{x\,\to\,u_n} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\left(5+\frac{1}{n}\right)^2+2\left(5+\frac{1}{n}\right)-1}{\left(5+\frac{1}{n}\right)-5} \\
&= \quad \lim_{n\to\infty} 34n+\frac{1}{n}+12 \\
&= \quad \lim_{n\to\infty} 34n+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+12 \\
&= \quad +\infty
\end{aligned}$$

   et de même,

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{x\to 5\\ x<5}} \frac{x^2+2x-1}{x-5} \quad & \xrightarrow{x\,\to\,v_n} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\left(5-\frac{1}{n}\right)^2+2\left(5-\frac{1}{n}\right)-1}{\left(5-\frac{1}{n}\right)-5} \\
&= \quad \lim_{n\to\infty} -34n-\frac{1}{n}+12 \\
&= \quad \lim_{n\to\infty} -34n-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+12 \\
&= \quad -\infty
\end{aligned}$$

   Les résultats des deux méthodes concordent. La deuxième méthode est une preuve de ce que l'on fait plutôt instinctivement dans la première.

3.

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \frac{x^3+3x-1}{x^2-2x-3} \quad = \quad \lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \frac{x^3+3x-1}{(x-3)(x+1)}$$

Ni $(x-3)$, ni $(x+1)$ ne sont des diviseurs du numérateur, car $N(3) \neq N(-1) \neq 0$. On sait ainsi que la factorisation de ce dernier ne permettra pas de simplification. On remarque que le facteur $(x+1)$ deviendra très petit (donc la limite sera $\pm\infty$) et de signe positif pour $x \to -1$ de puis la droite $(\operatorname{sgn}(-0.99+1) = +1$. En remplaçant x par -1 dans le numérateur on a $\operatorname{sgn}(N(-1)) = -1$. Le facteur du dénominateur $(x-3)$ nous apporte un signe négatif $(\operatorname{sgn}(-1-3) = -1)$. Le résultat est donc

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \frac{x^3+3x-1}{x^2-2x-3} = \left(\frac{-1}{+1\cdot -1}\right)\cdot\infty = +\infty$$

4. On factorise,

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \frac{-7}{x^2-5x+6} = \lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \frac{-7}{(x-2)(x-3))}$$

On sait que le facteur $(x-2)$ va tendre vers zéro et que de ce fait le calcul de la limite donnera $\pm\infty$. En appliquant la fonction $\operatorname{sgn}(x)$ à chaque facteur, on obtient

$$\frac{\operatorname{sgn}(-7)}{\operatorname{sgn}(0^-)\cdot\operatorname{sgn}(2-3)} = \left(\frac{-1}{-1\cdot -1}\right)\cdot\infty = -\infty.$$

Le résultat est

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \frac{-7}{x^2-5x+6} = -\infty.$$

5. On factorise,

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} \frac{(-x^2-1)(x+3)}{(x+1)(x-2)} &= \lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} -\frac{(x+3)\left(x^2+1\right)}{(x+1)(x+2)} \\ &= \lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} -1\cdot\frac{(x+3)\left(x^2+1\right)}{(x+1)(x+2)}\end{aligned}$$

Le facteur $(x+1)$ tend vers 0^+, donc la limite de la suite sera $\pm\infty$. On applique la fonction signe pour obtenir son signe.

$$\operatorname{sgn}(-1)\cdot\frac{\operatorname{sgn}(-1+3)\cdot\operatorname{sgn}((-1)^2+1)}{\operatorname{sgn}(0^+)\cdot\operatorname{sgn}(-1+2)} = -1\cdot\frac{+1\cdot +1}{+1\cdot +1} = -1$$

Finalement

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} \frac{(-x^2-1)(x+3)}{(x+1)(x-2)} = -\infty.$$

6. Le numérateur n'est pas factorisable (discriminant négatif) et est toujours négatif (parabole concave). Le dénominateur est un carré et sera toujours positif. Il s'annule lorsque x tend vers 2, on a une limite infinie. Le signe de cet infini est négatif donc

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \frac{-2x^2+x-4}{x^2-4} = -\infty.$$

Solution Ex 3.8. →3.8.

1. Ici la factorisation change de style, en général on met en évidence le du dénominateur ayant le plus grand degré.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{x^4-2x^3+1} &= \lim_{x\to\infty}\frac{x^4\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^4}\right)}{x^4\left(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^4}\right)}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^4}}{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^4}}\\
&= \frac{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^4}}{1-\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^4}}\\
&= \frac{0-0}{1-0+0}=0
\end{aligned}$$

2. On met en évidence x^4

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}\frac{3-x^3-x^5}{x^4-2+2x^3} &= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^4\left(x-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^4}\right)}{x^4\left(1-\frac{2}{x}-\frac{2}{x^4}\right)}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{\left(x-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^4}\right)}{\left(1-\frac{2}{x}-\frac{2}{x^4}\right)}\\
&= \frac{\lim_{x\to-\infty}x-\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}+\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{x^4}}{1-\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x}-\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x^4}}\\
&= \frac{\lim_{x\to-\infty}x-0+0}{1-0-0}=-\infty
\end{aligned}$$

3. On met en évidence x^2,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\frac{8x^2-1}{2x^2-4x+2} &= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(8-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(2-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{8-\frac{1}{x^2}}{2-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}}\\
&= \frac{8-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}{2-\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x}+\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x^2}}\\
&= \frac{8-0}{2-0+0}=4
\end{aligned}$$

Solution Ex 3.9. →3.9. bb

3.6 Dérivées

3.6.1 Notion intuitive

Le nom de dérivée est à mon avis mal choisi, celui de taux d'accroissement instantané, bien que plus long, est plus juste. Commençons par deux exemples.

3.6.1.1 Un robinet

A l'instant t_0, on ouvre un robinet qui coule avec un débit de 5 litres par seconde dans un bassin fermé contenant déjà 200 litres d'eau. Si on laisse le robinet ouvert durant un laps de temps Δt, la quantité d'eau L, à l'instant $t_0 + \Delta t$, est

$$L(t_0 + \Delta t) = 5(\Delta t) + 200 = 5(\Delta t) + L(t_0)$$

Si on s'intéresse à l'accroissement moyen, en litres par secondes, de la quantité d'eau dans le bassin à un instant $t_0 + \Delta t$ quelconque, il suffit de soustraire de la quantité $L(t_0 + \Delta t)$ la quantité initiale $L(t_0) = 200$ et de diviser cette différence par la durée Δt,

$$\frac{L(t_0 + \Delta t) - L(t_0)}{\Delta t} = 5.$$

On remarquera que cette quantité, indépendante du temps, est la pente de la fonction affine $L(t) = 5t + 200$ qui donne la quantité d'eau dans le bassin t secondes après avoir ouvert le robinet.

3.6.1.2 Aire et périmètre d'un cercle

On veut calculer le taux d'accroissement de l'aire d'un disque de rayon r_0 lorsqu'on augmente son rayon d'une quantité Δr. Ce taux d'accroissement aura pour unités des m^2/m (augmentation de l'aire due à une augmentation du rayon). On se doute déjà que le taux d'accroissement de l'aire du disque va dépendre de r_0, c'est-à-dire de l'état initial.

Soit A la fonction donnant l'aire du disque

$$A(r) = \pi r^2.$$

si on augmente le rayon d'une petite quantité Δr on calcule le taux d'accroissement qui vaut

$$\frac{A(r_0 + \Delta r) - A(r_0)}{\Delta r} = \frac{\pi(r_0 + \Delta r)^2 - \pi r_0^2}{\Delta r}$$

On s'intéresse maintenant au taux d'accroissement instantané donc on fait tendre Δr vers 0. On obtient la limite de l'expression ci-dessus :

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta r \to 0} \frac{\pi(r_0 + \Delta r)^2 - \pi r_0^2}{\Delta r} &= \lim_{\Delta r \to 0} \frac{\pi(r_0^2 + 2r_0\Delta r + (\Delta r)^2 - r_0^2)}{\Delta r} \\
&= \lim_{\Delta r \to 0} \frac{\pi(2r_0\Delta r + (\Delta r)^2)}{\Delta r} \\
&= \lim_{\Delta r \to 0} (2\pi r_0 + \pi\Delta r) \\
&= 2\pi r_0 + \lim_{\Delta r \to 0} \pi\Delta r \\
&= 2\pi r_0
\end{aligned}$$

L'accroissement instantané de l'aire d'un disque est donc son périmètre. Ce qui est logique, car si Δr tend vers zéro, l'aire "gagnée" devient une mince "ficelle" entourant le disque. Mais stop, l'accroissement d'une surface ne peut pas être donné par des mètres, il y a donc une erreur. Non, en réalité c'est au taux d'accroissement que l'on s'intéresse et pas à l'accroissement même. Le taux d'accroissement est en $\frac{m^2}{m}$ qui se simplifie en m.
Dans le cas de la fontaine, on voit que le taux d'accroissement instantané de la quantité d'eau dans le bassin ne dépendait pas du temps (car le débit du robinet était constant). Dans le cas de l'aire du disque, pour un r_0 petit, l'augmentation de surface sera moins grande que pour une valeur de r_0 élevée et ce pour la même augmentation infinitésimale (qui tend vers zéro) de Δr.

3.6.2 Dérivée d'une fonction

Définition 3.6.1. ***Dérivée d'une fonction en un point***

Soit $f : E \to F$ une fonction définie au voisinage d'un point x_0. f est dite dérivable en x_0 si le rapport

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

existe lorsque Δx tend vers zéro.
On appelle la grandeur

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{3.1}$$

la dérivée de f au point x_0.

Remarque 9. *En posant $\Delta x = x - x_0$ et en substituant cette valeur dans 3.1 on obtient une deuxième définition de la dérivée d'une fonction en un point :*

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \overset{(\Delta x = x - x_0)}{\to} \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{3.2}$$

3.6.3 Calcul d'une dérivée d'une fonction en un point et fonction dérivée

On a défini le calcul de la dérivée en un point x_0 de la fonction $f(x)$ et on a noté celle-ci par $f'(x_0)$. Il est clair que x_0 appartient à E donc on peut étendre la dérivée à tous les points d'abscisse. On notera alors la dérivée de la fonction $f'(x)$

$D(f(x)) = f'(x)$ où $D()$ est un opérateur.

$f'(x)$ est appelée fonction dérivée de la fonction $f(x)$.

Remarque 10. *Dans la majorité des livres on trouve la définition de $f'(x)$*

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{3.3}$$

3.6.4 Propriétés des dérivées, règles de dérivation

On peut énoncer les règles suivantes, la seule que l'on démontrera est la formule de dérivation d'une fonction composée.

$$(f+g)' = f' + g' \tag{3.4}$$

$$(f \cdot g)' = f'g + fg' \tag{3.5}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \tag{3.6}$$

$$[g(f)]' = (g \circ f)' = g'(f) \cdot f' \tag{3.7}$$

Quelques dérivées à retenir :

$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

$\sin(x)' = \cos(x)$

$\cos(x)' = -\sin(x)$ (attention au signe moins !)

$\tan(x)' = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
$(a^x)' = a^x \cdot \ln(a)$
$(e^x)' = e^x \cdot \ln(e) = e^x$
$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$

3.6.4.1 Démonstration de la règle de dérivation d'une fonction composée

On veut démontrer que $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$. On suppose que la fonction f est continue et non constante sur tout son domaine de définition donc que $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Pour tout $x \neq x_0$ on peut écrire :

$$\begin{aligned} g(f(x))' = \lim_{x\to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} &= \lim_{x\to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= g'(f(x)) \cdot f'(x) \end{aligned}$$

3.6.5 Différentiabilité versus dérivabilité*

Définition 3.6.2. ***Fonction différentiable***

Une fonction f de E dans F est dite différentiable en x_0 si il existe une fonction r de E dans F telle que les deux propriétés suivantes soient vérifiées

$$\lim_{x\to x_0} \frac{r(x)}{x - x_0} = 0 \tag{3.8}$$

$$\forall x \in E : \; f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + r(x) \tag{3.9}$$

Prenons la propriété ii) et transformons là un peu.

$$f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + r(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) - f(x_0) = a(x - x_0) + r(x)$$

On peut voir graphiquement le résultat à la FIGURE 3.5

Remarque 11. *Pour le moment nous ne nous occupons pas de la fonction $r(x)$, nous y reviendrons lors de l'étude des séries de Taylor.*

Exemple 4. Choisissons la fonction $f(x) = x^3$ au voisinage de $x_0 = 2$. Nous pouvons calculer les valeurs suivantes :

$f(x) = x^3$
$x_0 = 2$
$f(x_0) = f(2) = 8$
$f'(x_0) = 3x_0^2 = a = 12$

donc, d'après 3.9 au voisinage de 2 nous avons :

$x^3 = 8 + 12(x - 2)$

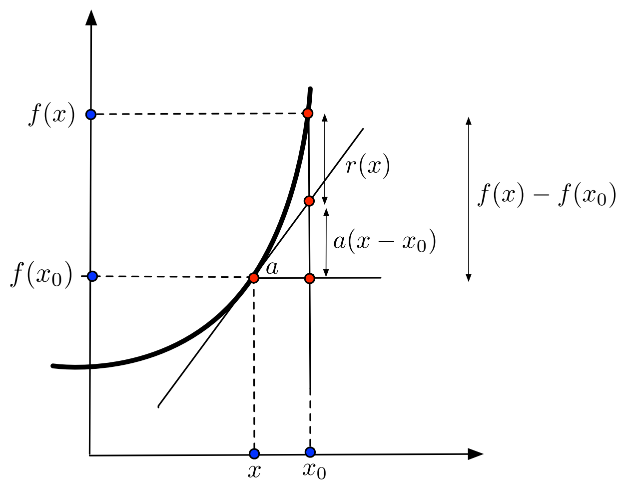

FIGURE 3.5 – On peut approximer des valeurs de $f(x)$ proche de x_0 en utilisant la dérivée (voir exemple ci-dessous). On voit que si x tend vers x_0, $r(x)$ devient de plus en plus petit, autrement dit l'erreur sur la valeur de $f(x_0)$ devient insignifiante.

Calculons l'approximation de $f(2.1) = (2.1)^3$,

$$f(2.1) = 8 + 12(0.1) = 9.2$$

La valeur exacte est 9.261, donc toute proche de celle trouvée.

Une fonction différentiable peut-être approchée en un point x_0 quelconque de son domaine de dérivabilité par une fonction linéaire ayant sa dérivée $f'(x_0)$ comme taux d'accroissement. On verra que dans le cas des fonctions de plusieurs variables, une fonction peut avoir une dérivée et ne pas être différentiable en certains points. Pour les fonctions d'une seule variable (celles qui nous intéressent) on peut établir l'identité entre les notions dérivabilité et différentiabilité.

3.6.6 Théorèmes importants

3.6.7 Extremum local

Si une fonction $f : E \to F$ différentiable en x_0 admet un extremum local en $x0$ alors $f'(x_0) = 0$.

La démonstration est assez simple, si une fonction possède un maximum ou un minimum alors les signes de ses limites à gauche et à droite, en x_0, sont opposés, et de ce fait nul en x_0 (la fonction est supposée continue).

Remarque 12. *Soit une fonction $f : E \to F$ différentiable en x_0 et $f'(x_0)$ est nulle. Le point $(x_0); f(x_0)$ n'est un extremum que si la dérivée seconde $f''(x_0)$ est différente de zéro.*

Exemple 5. Voilà deux exemples :

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3$.
   La dérivée $f'(x) = 3x^2$ s'annule en $x = 0$, mais la fonction n'a pas d'extremum en ce point. Si on dérive à nouveau on voit que la valeur $f''(x) = 6x$ est également nulle en $x = 0$. Une dérivée seconde d'une fonction continue qui s'annule en un point x_0, traduit un changement de convexité. On appelle ces points des points d'inflexion.
2. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[,\ x \mapsto \tan^{-1}(x)$.
   Les dérivées premières et secondes sont :

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{et} \quad f''(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

   La dérivée première vaut un en zéro et la dérivée seconde est nulle à ce même point. Il n'y a pas d'extremum, mais un changement de convexité pour la fonction arctangente en $x = 0$. (Voir FIGURE 3.6).

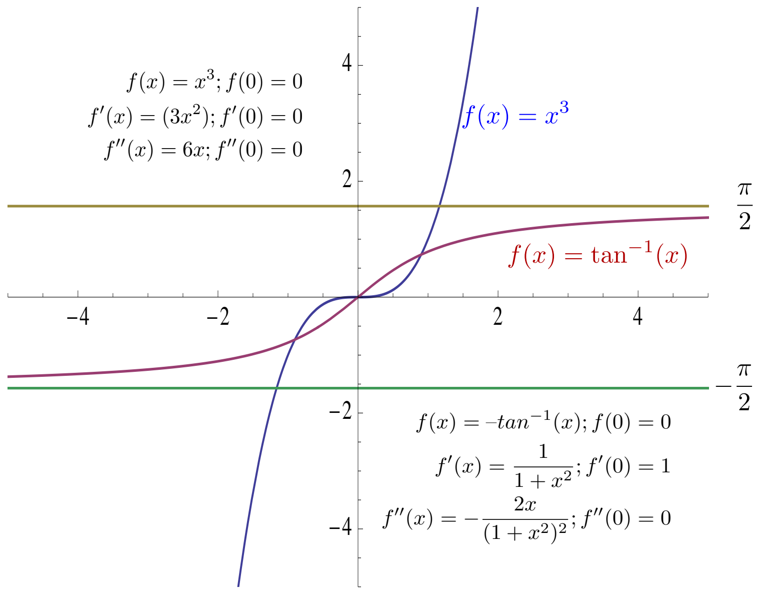

FIGURE 3.6 – Points d'inflexion

3.6.8 Points stationnaires

$f : E \to F$ différentiable en x_0, si $f'(x_0) = 0$ alors x_0 est appelé **point stationnaire** ou aussi parfois **point critique**.

3.6.9 Où une fonction atteint-elle ses extremums

Soit $f : [a; b] \to F$ une fonction continue. f atteint ses extremums :

1. soit aux bornes de l'intervalle $[a; b]$,
2. soit aux points stationnaires
3. soit aux points de $]a; b[$ n'appartenant pas à D_f.

Exemple 6. Soit la fonction $f : [-1; 2] \to \mathbb{R},\ x \mapsto (x-2)\sqrt[3]{x^2}$. La dérivée est

$$f'(x) = \frac{5x-4}{3\sqrt[3]{x}}$$

et le domaine de définition $D_f =]-1; 0[\cup]0; 2[$. L'unique point stationnaire est $x = \frac{4}{5}$. La fonction peut atteindre ses extremums en -1, 0, $\frac{4}{5}$ ou 2 et nulle part ailleurs. Les valeurs par f de ces points est respectivement -3, 0, $-\frac{6}{5}\sqrt[3]{\left(\frac{16}{25}\right)}$ et 0. f est minimum en $x = -1$ et maximum en $x = 0$ et $x = 2$. Le minimum local en $x = \frac{4}{5}$ n'est pas un extremum global. Il faut bien noter ce fait, un extremum n'est pas forcément situé à un point stationnaire.

3.6.9.1 Théorème de Rolle

Soit a et b deux nombres réels et $f : [a; b] \to F$ une fonction continue sur $[a; b]$ et différentiable sur $]a; b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors, il existe $c \in]a; b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exemple 7. Soit $f : \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right] \mid x \mapsto \sin x$. f est continue sur $\mathbb{R}$ et $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. La dérivée de f est $f'(x) = \cos x$ qui s'annule pour $x = \frac{\pi}{2}$ qui appartient à l'intervalle $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

3.6.9.2 Théorème des accroissements finis

Soit $a < b$ deux nombres réels et $f : [a; b] \to F$ une fonction continue sur $]a; b[$. Alors il existe un élément $c \in]a; b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a) \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{(b-a)}$$

.

Exemple 8. Intuitivement cela signifie que si on se déplace d'un point à un autre avec une vitesse moyenne de 56.78 km/h, il y aura forcément au moins un endroit le long du trajet où la vitesse instantanée aura été de 56.78 km/h.

Remarque 13. *C'est un des théorèmes les plus importants du calcul différentiel.*

3.6.9.3 Règle de L'Hospital

Soit f et g deux fonctions différentiables sur un intervalle $]a; b[$. g et g' ne s'annulent en aucun point de l'intervalle et de plus

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = \alpha \text{ avec } \alpha = 0 \text{ ou } \infty$$

et si,

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \mu,\ \mu \in \overline{\mathbb{R}},\ \text{alors } \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \mu$$

Exemple 9. Soit la limite $\lim_{x\to\ 0} \frac{\sin x}{x}$. On a

$$\lim_{x\to 0} \sin(x) = \lim_{x\to 0} x = 0$$
$$\lim_{x\to\ 0} \frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to\ 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

3.6.9.4 Fonction réciproque d'une fonction différentiable

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction bijective continue sur I. On suppose que f est différentiable en x_0 et que $f'(x_0) \neq 0$. Alors, f admet une fonction réciproque $f^{-1} : F \to I$ qui est différentiable au point $y_0 = f(x_0)$. De plus on a :

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Exemple 10. Calculer la dérivée de la fonction $f : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\mid y \mapsto \arcsin(y)$. La fonction f est la fonction réciproque de la fonction continue $g :]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R} \mid x \mapsto \sin(x)$.
On sait que $g'(x) = \cos(x)$, donc

$$f'(y) = \frac{1}{g'(x)} = \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(x)}}$$

mais $y = \sin(x)$ donc

$$f'(y) = (\arcsin(y))' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

3.6.10 EXERCICES sur les dérivées

Ex 3.10. Donner le domaine de définition , la parité et le tableau des signes des fonctions suivantes :

1. $\frac{x^3-1}{x^2-2x}$
2. $\frac{x}{x^2-1}+\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x+3}+3$
3. $\frac{x^3-x}{(x+1)(x+2)}$

Solution tq

Ex 3.11. Calcul de dérivée à partir de la définition
En utilisant une des définitions ci-dessus, calculer la valeur $f'(x_0)$ en x_0 pour les fonctions suivantes :

a) $f(x)=5,\ x_0=45$

b) $f(x)=x^2+x,\ x_0=4$

c) $f(x)=\sin(x),\ x_0=\frac{\pi}{3}$

d*) $f(x)=a^x,\ x_0=0$

e*) $f(x)=x^n,\ x\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}$

Solution

Ex 3.12. Calcul de fonctions dérivées à l'aide des propriétés
Calculer les dérivées des fonctions suivantes

a) $f(x)=x^3+\frac{1}{x^2}+(2x-5)^{\frac{12}{7}}$

b) $f(x)=\frac{x^2+1}{(3x-1)^2}$

c*) $f(x)=\tan^3\left(\frac{2x^3-1}{x}\right)^2$

d) $f(x)=\frac{\cos^2(2x)}{\tan(x)}$

e*) $f(x)=x^x$

Solution

Ex 3.13. ** Montrer que la fonction ci-dessous est continue et différentiable , mais que sa dérivée n'est pas continue en $x=0$.

$$f(x)=\begin{cases} x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x\neq 0 \\ \lim_{u\to 0} f(u)=0 & \text{si } x=0 \end{cases}$$

Solution

Ex 3.14. Soit la fonction

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\mid x\mapsto f(x)=(x^2-1)(x+3)$$

Trouver l'équation de la tangente au graphe de f passant par le point $(-2;4)$.

Solution

Ex 3.15. Soit la fonction $f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{x^2+d}$. On sait que les droites $x=3$ et $y=2$ sont des asymptotes du graphe de f. On sait également que par le point $f(1)=3$ passe une tangente horizontale à f.

Solution

Ex 3.16. Soit la fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid x \mapsto f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$$

1. Trouver l'équation de la tangente T à f en $x = 1$.
2. Trouver tous les points d'intersection entre T et f.
3. Trouver l'équation de toutes les normales à f passant par l'origine.

Solution

Ex 3.17. Soit la fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid x \mapsto f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 36}{x^2}$$

Trouver les équations de toutes les tangentes au graphe de f qui passent par l'origine ainsi que les coordonnées de leurs points de contact avec f.

Solution

3.6.11 SOLUTIONS des exercices sur les dérivées

Solution Ex 3.10. →3.10.

1. **i)** Domaine de définition :

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 2x} = \frac{(x-1)\left(x^2 + x + 1\right)}{(x-2)x}$$

Le domaine de définition est $D_f = \mathbb{R} \backslash \{0, 2\}$.

ii) Parité :
Le domaine de définition est asymétrique, la parité est quelconque (ni paire ni impaire).

ii) Tableau des signes :

x		0		1		2	
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
x^2+x+1	$+$		$+$		$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
x	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$f(x)$	$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$

2. **i)** Domaine de définition :

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1} + \frac{1}{x - 1} - \frac{2}{x + 3} + 3 = \frac{3x^3 + 9x^2 + 4x - 4}{(x-1)(x+1)(x+3)}$$
$$= \frac{(x+2)\left(3x^2 + 3x - 2\right)}{(x-1)(x+1)(x+3)}$$

Le domaine de définition est $D_f = \mathbb{R} \backslash \{-3, -1, 1\}$.

ii) Parité :
Le domaine de définition est asymétrique, la parité est quelconque (ni paire ni impaire).

ii) Tableau des signes :

x		-3		-2		-1		1	
$x+2$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$3x^2+3x-2$	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x+1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x+3$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
$f(x)$	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	$+$

3. **i)** Domaine de définition :

$$f(x) = \frac{x^3 - x}{x^2 + 3x + 2} = \frac{x(x-1)(x+1)}{(x+1)(x+2)}$$

Le domaine de définition est $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-2, -1\}$.

ii) Parité :
Le domaine de définition est asymétrique, la parité est quelconque (ni paire ni impaire).

ii) Tableau des signes :

x		-2		-1		0		1	
x	$-$		$-$		$+$	0	$+$		$+$
$x+1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x+1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
$f(x)$	$-$	$\|\|$	$+$	$\odot$	$-$	0	$-$	0	$+$

Solution Ex 3.11. Calcul de dérivée à partir de la définition →3.11.

a) $f(x) = 5,\ x_0 = 45$
On utilise $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

$$\begin{aligned} f'(5) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(5+\Delta x) - f(5)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5-5}{\Delta x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

La dérivée d'une fonction constante est nulle.

b) $f(x) = x^2 + x,\ x_0 = 4$

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\big((x_0 + \Delta x)^2 + (x_0 + \Delta x)\big) - (x_0^2 + x_0)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x_0 \Delta x + (\Delta x)^2 + \Delta x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x_0 + 1)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + 1 + \Delta x) \\
&= 2x_0 + 1 + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x \\
f'(x_0) &= 2x_0 + 1
\end{aligned}$$

$$x_0 = 4 \quad \Rightarrow \quad f'(x_0) = f'(4) = 9$$

c) $f(x) = \sin(x),\ x_0 = \frac{\pi}{3}$
Rappel : $\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x_0 + \Delta x) - \sin(x_0)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x_0)\cos(\Delta x) + \sin(\Delta x)\cos(x_0) - \sin(x_0)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x_0)\cos(\Delta x) - \sin(x_0)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x)\cos(x_0)}{\Delta x} \\
&= \sin(x_0) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(\Delta x) - 1}{\Delta x} + \cos(x_0) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}
\end{aligned}$$

On a démontrer au paragraphe que

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(\Delta x) - 1}{\Delta x} = 0 \quad \text{et que} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} = 1.$$

Donc,

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \sin(x_0) \cdot 0 + \cos(x_0) \cdot 1 \\
&= \cos(x_0) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

d*) $f(x) = a^x,\ x_0 = 0$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x + \Delta x} - a^x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x \cdot a^{\Delta x} - a^x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}
\end{aligned}$$

a^x ne dépend pas de Δx, on peut donc le sortir devant la limite

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x(a^{\Delta x}-1)}{\Delta x} \\ &= a^x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x} \\ &= a^x \cdot L(a) \end{aligned}$$

La fonction $L(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}$ est une définition possible pour la valeur $\ln(a)$. On retiendra $(a_0^x)' = a_0^x \cdot \ln(a)$.

e*) $f(x) = x^n,\ x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$.
On utilise la formule $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ afin d'alléger l'écriture.
Rappel :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n \cdot a^{n-k} \cdot b^k \quad \text{avec} \quad C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ (x^n)' &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\left(\sum\limits_{k=0}^{n} C_k^n \cdot x^{n-k} \cdot h^k\right) - x^n}{h} \end{aligned}$$

on met x^n en évidence et on réduit

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \to 0} \frac{x^n + \left(\sum\limits_{k=0}^{n} C_{k+1}^n \cdot x^{n-(k+1)} \cdot h^{k-1}\right) - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} C_{k+1}^n \cdot x^{n-(k+1)} \cdot h^{k-1}}{h} \end{aligned}$$

on factorise la quantité $n \cdot x^{n-1} \cdot h$

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \to 0} \frac{nx^{n-1}h \cdot \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} C_{k+1}^n \cdot x^{n-(k+1)} \cdot h^{k+1}}{nx^{n-1}h}}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{nx^{n-1}h \cdot \left(\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{C_{k+1}^n}{n} \cdot x^{-k} \cdot h^k\right)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} nx^{n-1} \cdot \left[1 + \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{C_{k+2}^n}{n} \cdot x^{-(k+1)} \cdot h^{k+1}\right)\right] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= nx^{n-1} \cdot \lim_{h \to 0} \left[1 + \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{C_{k+2}^{n}}{n} \cdot x^{-(k+1)} \cdot h^{k+1} \right) \right] \\
&= nx^{n-1} \cdot \lim_{h \to 0} \underbrace{\left[1 + \underbrace{\left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} C_{k+2}^{n} x^{-(k+1)} h^{k+1} \right)}_{=0} \right]}_{=1} \\
(x^n)' &= nx^{n-1}
\end{aligned}
$$

Solution Ex 3.12. Calcul de fonctions dérivées à l'aide des propriétés $\rightarrow$3.12.

a)

$$f(x) = x^3 + x^{-2} + (2x-5)^{\frac{12}{7}} \xrightarrow{\text{D(f(x))}} \begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 2x^{-3} + \frac{12}{7}(2x-5)^{\frac{5}{7}} \cdot 2 \\ &= -\frac{2}{x^3} + 3x^2 + \frac{24}{7}(2x-5)^{\frac{5}{7}} \end{aligned}$$

b)

$$f(x) = \frac{x^2+1}{(3x-1)^2} \xrightarrow{\text{D(f(x))}} \begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x \cdot (3x-1)^2 - 2 \cdot (3x-1) \cdot 3 \cdot (x^2+1)}{(3x-1)^4} \\ &= -\frac{2(x+3)}{(3x-1)^3} \end{aligned}$$

c*)

$$f(x) = \tan^3\left(\frac{2x^3-1}{x}\right)^2$$

$$\xrightarrow{\text{D(f(x))}} \begin{aligned} f'(x) &= 3\tan^2\left(\frac{2x^3-1}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\frac{2x^3-1}{x}\right)^2} \cdot 2\left(\frac{2x^3-1}{x}\right) \cdot \left(\frac{6x^3-(2x^3-1)}{x^2}\right) \\ &= 6\tan^2\left(\frac{2x^3-1}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\frac{2x^3-1}{x}\right)^2} \cdot \left(8x^3 - \frac{1}{x^3} - 2\right) \end{aligned}$$

d)

$$f(x) = \frac{\cos^2(2x)}{\tan(x)} \xrightarrow{\text{D(f(x))}} \begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2 \cdot \cos(2x) \cdot (-\sin(2x)) \cdot 2 \cdot \tan(x)) - \left(\frac{1}{\cos^2(x)} \cdot \cos^2(2x)\right)}{\tan^2(x)} \\ &= \frac{\dfrac{-4\cos(2x)\sin(2x)\sin(x)}{\cos(x)} - \dfrac{\cos^2(2x)}{\cos^2(x)}}{\dfrac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}} \\ &= \frac{\dfrac{-2\cos(2x)\sin(2x)2\sin(x)\cos(x) - \cos^2(2x)}{\cos^2(x)}}{\dfrac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}} \\ &= \frac{-2\cos(2x)\sin(2x)2\sin(x)\cos(x) - \cos^2(2x)}{\sin^2(x)} \\ &= \frac{-\sin(4x)\sin(2x) - \cos^2(2x)}{\sin^2(x)} \end{aligned}$$

e*) On peut écrire f sous la forme

$$f(x) = x^x = e^{x \cdot \ln x}$$

La dérivée est alors très simple :

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{x \cdot \ln x}(x \cdot \ln x)' \\ &= e^{x \cdot \ln x}(x \cdot \frac{1}{x} + \ln x) \\ &= x^x(1 + \ln x) \end{aligned}$$

Solution Ex 3.13. →3.13.
On a démontré la continuité de f sur $\mathbb{R}$ à l'exercice 3.3 à l'aide du théorème des deux gendarmes. Si on calcule la fonction dérivée de f on obtient :

$$f'(x) = 2x\cos\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cdot -\sin\left(\frac{1}{x}\right) \cdot -\frac{1}{x^2} = 2x\cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Celle-ci peut être notée :

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ f'(0) = 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

En effet, si l'on calcul la dérivée de f en zéro à l'aide de la définition de la dérivée on a :

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h^2\cos\left(\frac{1}{h}\right) - 0}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} h\cos\left(\frac{1}{h}\right) = 0 \end{aligned}$$

Ce que l'on peut démontrer à l'aide du théorème des deux gendarmes en utilisant les fonctions $-|h|$ et $|h|$ pour entourer $h\cos\left(\frac{1}{h}\right)$.
Attention,

$$f'(0) \not\equiv \lim_{x\to 0} f'(x).$$

On peut calculer la limite de $2x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$, pour x tend vers zéro, à l'aide du théorème des deux gendarmes également et l'on obtient 0. Par contre, la limite pour $x \to 0$ n'est pas définie pour $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ (voir exercice 3.2). On peut affirmer que f, bien que différentiable sur $\mathbb{R}$, a une dérivée discontinue en $x = 0$. f' ne peut pas être prolongée par continuité en ce point. (Voir FIGURE 3.7).
Pour essayer de se rendre compte du comportement de f et de sa dérivée au voisinnage de zéro, on va étudier le comportement d'une droite tangente à f en un point $(x_0; f(x_0))$ lorsque x_0 tend vers zéro.

1. On commence par rappeler que l'expression générale d'une droite est $y = mx + b$ et que si cette droite passe par un point quelconque $(x_0; y_0)$ alors la relation $y_0 = mx_0 + b$ doit être vérifiée et qu'alors $b = y_0 - mx_0$.
2. Imaginons maintenant que le point $(x_0; y_0)$ soit un point de f et que la pente de la droite soit égale à $m = f'(x_0)$ et notons $y_0 = f(x_0)$.
3. On peut écrire l'équation de la droite de la manière suivante :

$$\begin{aligned} y &= mx + b \\ y &= mx + (y_0 - mx_0) \end{aligned}$$

$$y = f'(x_0) \cdot x + (f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0) \tag{3.10}$$

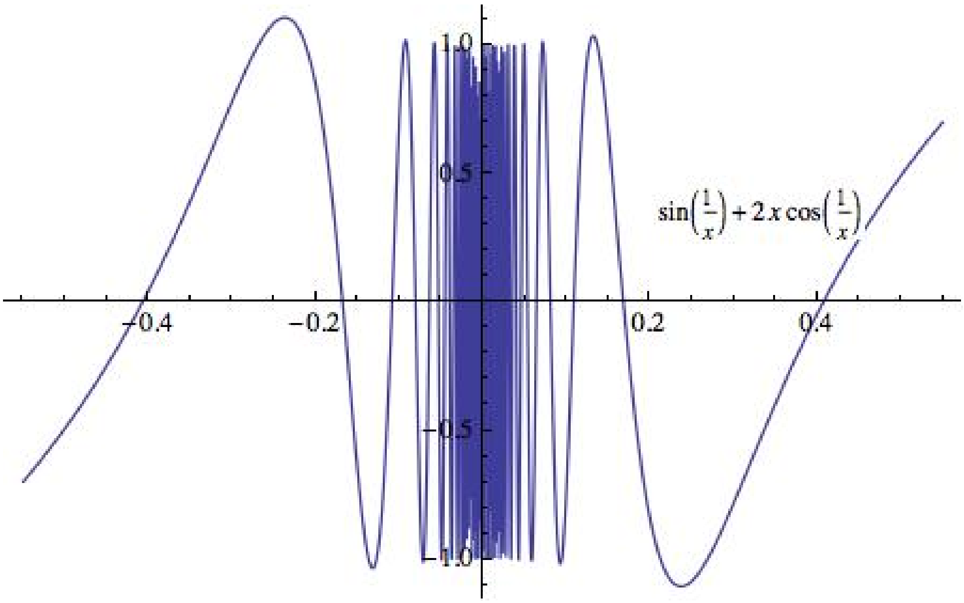

FIGURE 3.7 – Exercice 3.13

C'est la droite passant par $(x_0; f(x_0))$ tangente à f. On substitue les valeurs de $f(x_0)$ et $f'(x_0)$ dans 3.10.

$$\begin{aligned}
y &= f'(x_0)\cdot x + (f(x_0) - f'(x_0)\cdot x_0)\\
&= \left(2x_0\cos\frac{1}{x_0} + \sin\frac{1}{x_0}\right)x - \left(x_0^2\cos\frac{1}{x_0} - \left(2x_0\cos\frac{1}{x_0} + \sin\frac{1}{x_0}\right)x_0\right)\\
&= 2x_0\cdot x\cdot\cos\frac{1}{x_0} + x\cdot\sin\frac{1}{x_0} - \left(x_0^2\cos\frac{1}{x_0} - \left(2x_0^2\cos\frac{1}{x_0} + x_0\cdot\sin\frac{1}{x_0}\right)\right)\\
&= 2x_0\cdot x\cdot\cos\frac{1}{x_0} + x\cdot\sin\frac{1}{x_0} - x_0^2\cos\frac{1}{x_0} + 2x_0^2\cos\frac{1}{x_0} + x_0\cdot\sin\frac{1}{x_0}\\
&= 2x_0\cdot x\cdot\cos\frac{1}{x_0} + x\cdot\sin\frac{1}{x_0} + x_0^2\cos\frac{1}{x_0} + x_0\cdot\sin\frac{1}{x_0}
\end{aligned}$$

A présent on prend la limite pour x_0 tendant vers zéro.

$$\begin{aligned}
y &= \lim_{x_0\to 0}\left(2x_0\cdot x\cdot\cos\frac{1}{x_0} + x\cdot\sin\frac{1}{x_0} + x_0^2\cos\frac{1}{x_0} + x_0\cdot\sin\frac{1}{x_0}\right)\\
&= x\cdot\lim_{x_0\to 0}2x_0\cos\frac{1}{x_0} + \lim_{x_0\to 0}x\cdot\sin\frac{1}{x_0} + \lim_{x_0\to 0}x_0^2\cos\frac{1}{x_0} + \lim_{x_0\to 0}x_0\cdot\sin\frac{1}{x_0}
\end{aligned}$$

En appliquant le théorème des deux gendarmes aux première troisième et quatrième limite on obtient :

$$\begin{aligned}
y &= x\cdot 0 + \lim_{x_0\to 0}x\cdot\sin\frac{1}{x_0} + 0 + 0\\
&= \left(\lim_{x_0\to 0}\sin\frac{1}{x_0}\right)\cdot x
\end{aligned}$$

La droite obtenue est une application linéaire (qui passe par l'origine) de pente $m = \lim_{x_0\to 0}\sin\frac{1}{x_0}$. La pente de la droite oscille entre -1 et 1 lorsque x_0 tend vers l'origine. (Voir FIGURE 3.7).

Remarque 14. *Une fonction peut donc être différentiable sur son domaine de définition sans pour autant être continûment différentiable sur ce dernier.*
L'inverse est par contre toujours vrai, une fonction différentiable sur un domaine de définition est également continue sur ce même domaine.

Solution Ex 3.14. →3.14.
On a $f(-2) = 3$, donc le point donné $P = (p_1; p_2) = (-2; 4)$ n'appartient pas à f.
On peut se baser sur le petit dessin de la FIGURE 3.8 pour déterminer les relations qui existent

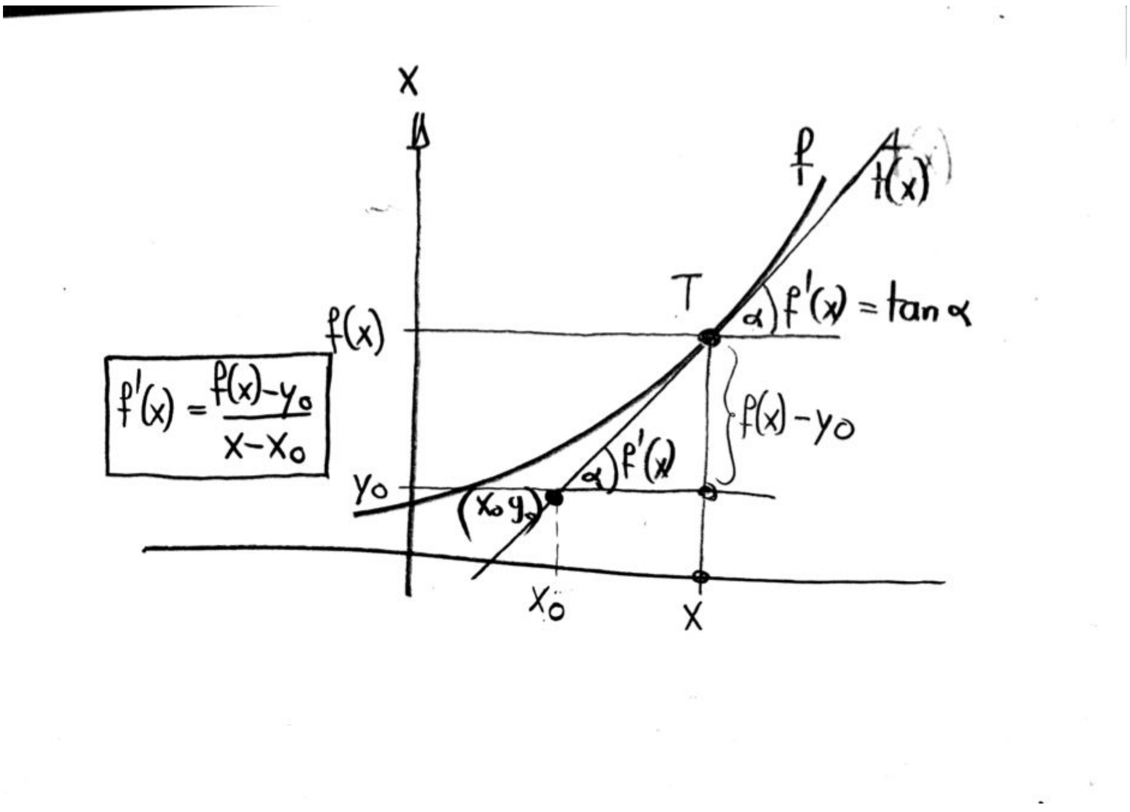

FIGURE 3.8 – Exercice 3.14

entre la fonction, sa dérivée, sa tangente et le point donné $(p_1; p_2)$:

$$f'(x) = \frac{f(x) - p_2}{x - p_1} \tag{3.11}$$

La droite recherchée qui contient le point P satisfait à l'équation

$$p_2 = f'(x) \cdot p_1 + b. \tag{3.12}$$

On a

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3 \quad \text{et} \quad f'(x) = 3x^2 + 6x - 1$$

On substitue dans 3.11 :

$$\begin{aligned} 3x^2 + 6x - 1 = \frac{(x^3 + 3x^2 - x - 3) - 4}{x + 2} \quad &\hookrightarrow \quad 3x^3 + 12x^2 + 11x - 2 = x^3 + 3x^2 - x - 7 \\ &\hookrightarrow \quad 2x^3 + 9x^2 + 12x + 1 = 0 \\ &\hookrightarrow \quad x_{1,2} \in \left\{ -\frac{5}{2}; -1 \right\} \end{aligned}$$

Il y a deux solutions, il y aura donc une droite $d_1(x) = a_1x_1 + b1$ et une droite $d_2 = a_2x_2 + b2$. La pente de chacune des droites vaut :

$$\begin{aligned} a_1 &= f'(-\frac{5}{2}) = \frac{11}{4} \\ a_2 &= f'(-1) = -4 \end{aligned}$$

On calcule b_1 et b_2 à l'aide de 3.12 et on obtient les droites :

$$d_1(x) = \frac{11}{4}x + \frac{19}{2}$$
$$d_2(x) = -4x - 4$$

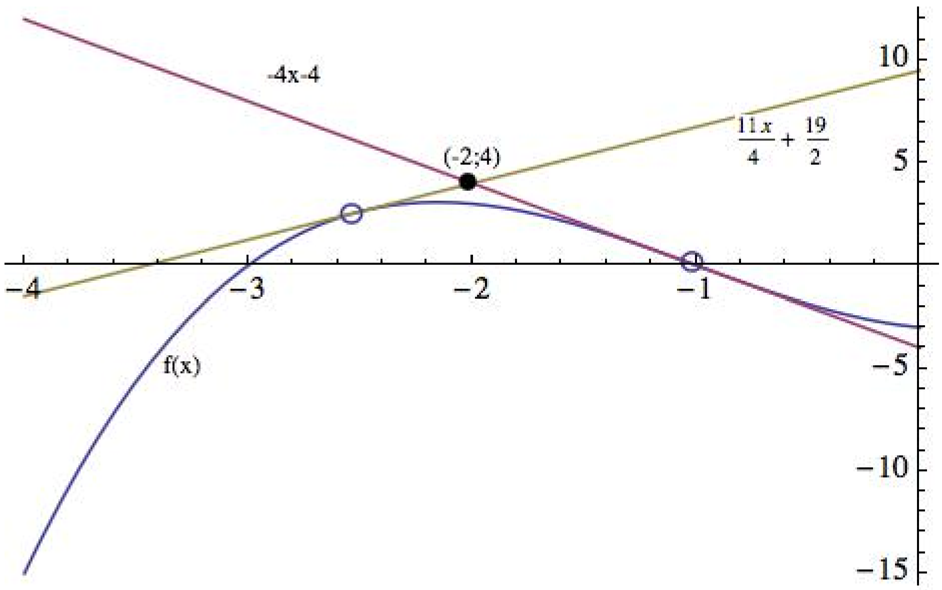

FIGURE 3.9 – Exercice 3.14 Tangentes

Solution Ex 3.15. →3.15.
La fonction $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{x^2 + d}$ a 4 inconnues, il nous faut donc 4 équations reliant ces inconnues de manière non redondante.
La première peut être trouvée grâce à l'asymptote verticale $x = 3$.

$$\underline{\text{Equation I}} : \quad x^2 + d = 0 \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad 3^2 + d = 0 \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad d = -9$$

L'asymptote horizontale $y = 2$ nous fournit la deuxième indication :

$$\underline{\text{Equation II}} : \quad \lim_{x \to \pm\infty} \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 + d} = \frac{a}{1} = a = 2$$

On sait aussi que la dérivée de la fonction f s'annule en $x = 1$, donc

$$\underline{\text{Equation III}} : \quad f'(x) = \frac{2adx + bd - bx^2 - 2cx}{(d + x^2)^2} \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad f'(1) = \frac{2ad + b(d-1) - 2c}{(d+1)^2} = 0$$

Finalement on nous dit que la fonction passe en $(1, 3)$ donc forcement $f(1) = 3$ et

$$\underline{\text{Equation IV}} : \quad f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 + d} \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad f(1) = \frac{a + b + c}{d + 1} = 3$$

Finalement le système de 4 équations à 4 inconnues

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a & = & 2 \\ d & = & -9 \\ \dfrac{2ad + b(d-1) - 2c}{(d+1)^2} & = & 0 \\ \dfrac{a + b + c}{d + 1} & = & 3 \end{array} \right.$$

nous donne les solutions : $a = 2$, $b = 2$, $c = -28$ et $d = -9$.

La fonction recherchée est

$$f(x) = \frac{2x^2 + 2x - 28}{x^2 - 9}$$

(Voir FIGURE 3.10)

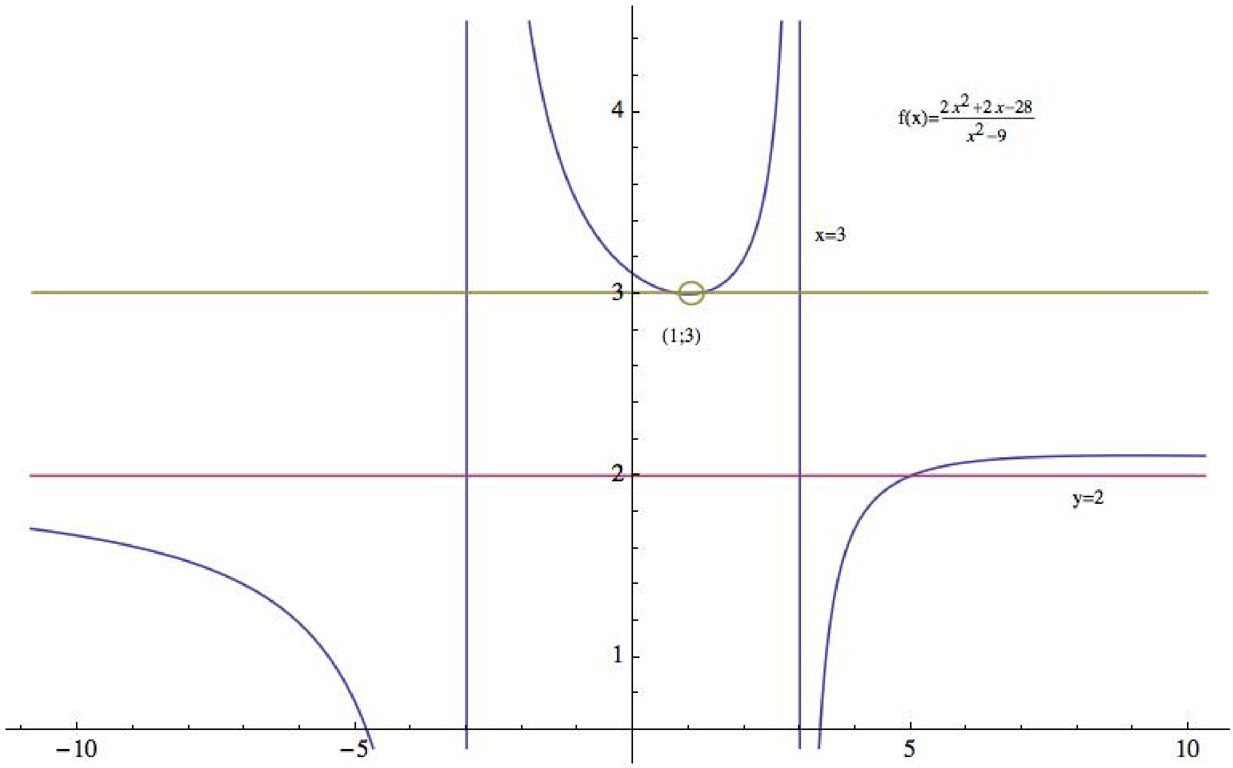

FIGURE 3.10 – Exercice 3.15

Solution Ex 3.16. →3.16.

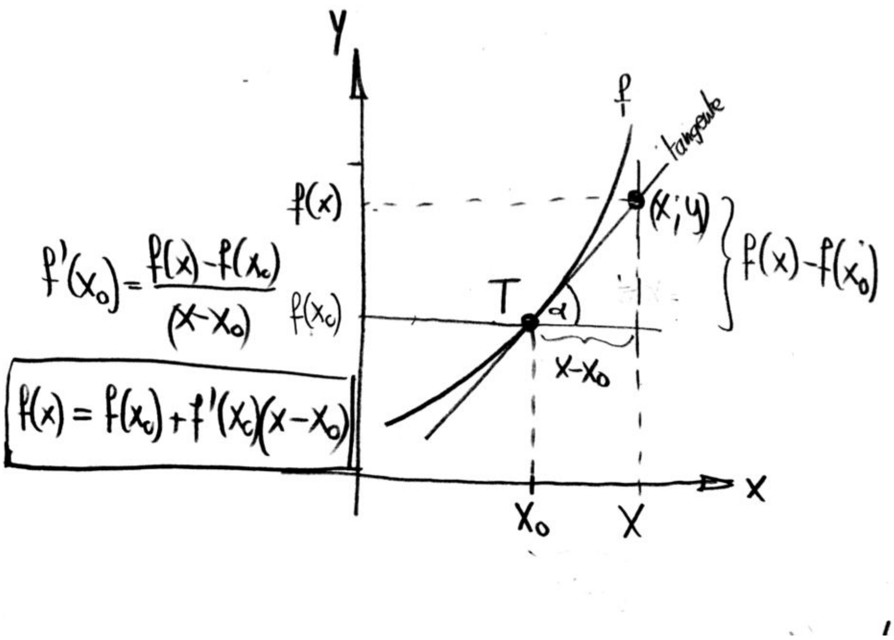

Figure 3.11 – Exercice 3.16

1. L'équation de la tangente peut être trouvée facilement grâce au petit croquis de la figure 3.11. L'équation d'une droite d tangente à une courbe f au point $x = x_0$ est :

$$d(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{3.13}$$

Dans le cas qui nous intéresse, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^3}{3} - 4x \\ f'(x) &= x^2 - 4 \\ x_0 &= 1 \\ f(x_0) &= \frac{-11}{3} \\ f'(x_0) &= -3 \end{aligned}$$

En appliquant 3.13 on obtient :

$$d(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = -\frac{11}{3} - 3(x-1) = -3x - \frac{2}{3}$$

2. Les valeurs d'abscisse des intersections de la droite $d(x) = -3x - \frac{2}{3}$ et de la fonction $f(x) = \frac{x^3}{3} - 4x$ sont données par les solutions de l'équation $d(x) = f(x)$,

$$d(x) = f(x) \quad \xrightarrow{} \quad -3x - \frac{2}{3} = \frac{x^3}{3} - 4x \quad \xrightarrow{} \quad \{x_1 = -2; x_2 = 1\}.$$

Les valeurs sont -2 et 1 et les points correspondants $(-2; \frac{16}{3})$ et $(1; -\frac{11}{3})$. (Voir figure 3.12)

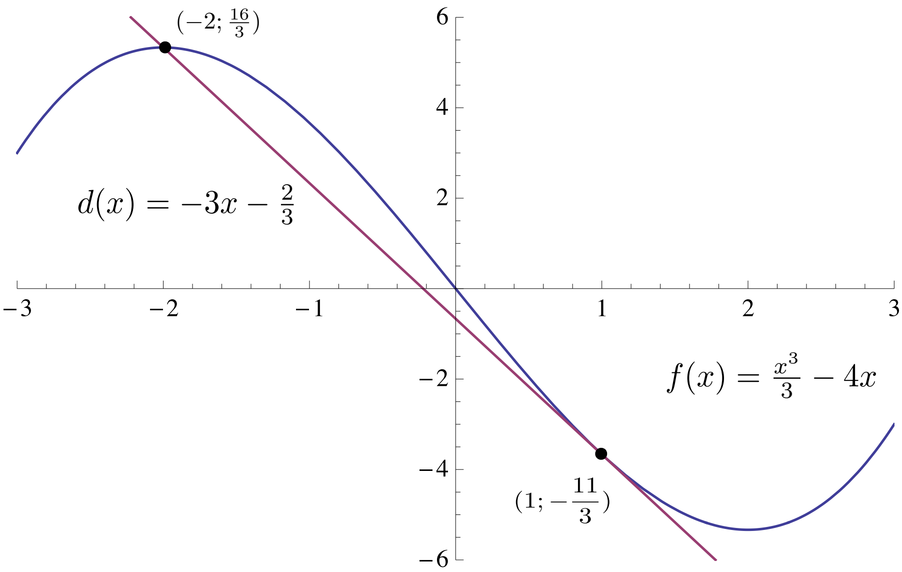

FIGURE 3.12 – Exercice 3.16

3. Le graphe de f passe par 0 et sa dérivée en ce point est $f'(0) = -4$, la perpendiculaire à une droite de pente -4 est une droite de pente $p = \frac{1}{4}$.
   L'équation de la droite demandée est $d(x) = -\frac{1}{p} = \frac{1}{4}x$.

Solution Ex 3.17. →3.17.
En observant le dessin FIGURE 3.13 on remarque que la tangente à la courbe de la fonction f passe

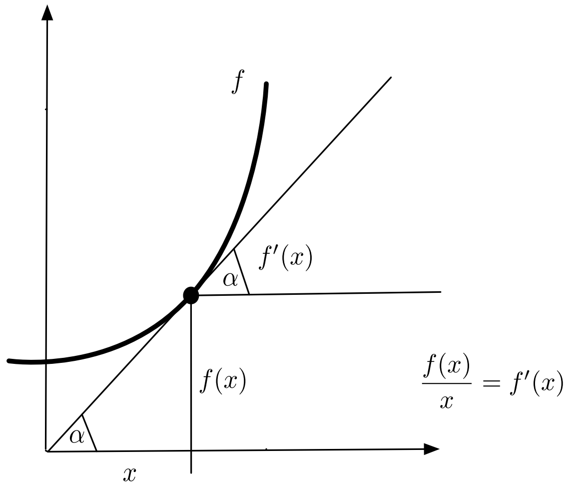

FIGURE 3.13 – Exercice 3.17

par l'origine lorsque le quotient de l'image $f(x)$ par la valeur d'abscisse x est égal à la dérivée de f. La tangente à f passe par l'origine quand

$$\frac{f(x)}{x} = f'(x)$$

On commence par chercher les points remplissant cette condition en résolvant l'équation

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{x} = f'(x) \quad &\longrightarrow \quad \frac{\frac{x^3+x^2-36}{x^2}}{x} = \frac{72}{x^3} + 1 \\
&\longrightarrow \quad x^3 + x^2 - 36 = 72 + x^3 \\
&\longrightarrow \quad x^2 = 108 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{108}.
\end{aligned}$$

Les points d'abscisse de f dont la tangente en ces points passera par l'origine sont $x_T = \pm\sqrt{108}$. Les tangentes à f qui passent par l'origine ont pour équations

$$d(x) = \frac{f(x_T)}{x_T}x = f'(x_T)x \quad d(x) = \frac{f(\sqrt{108})}{\sqrt{108}}x = 1.064x \quad \text{et} \quad d(x) = \frac{f(-\sqrt{108})}{-\sqrt{108}}x = 0.93x$$

(Voir FIGURE 3.14)

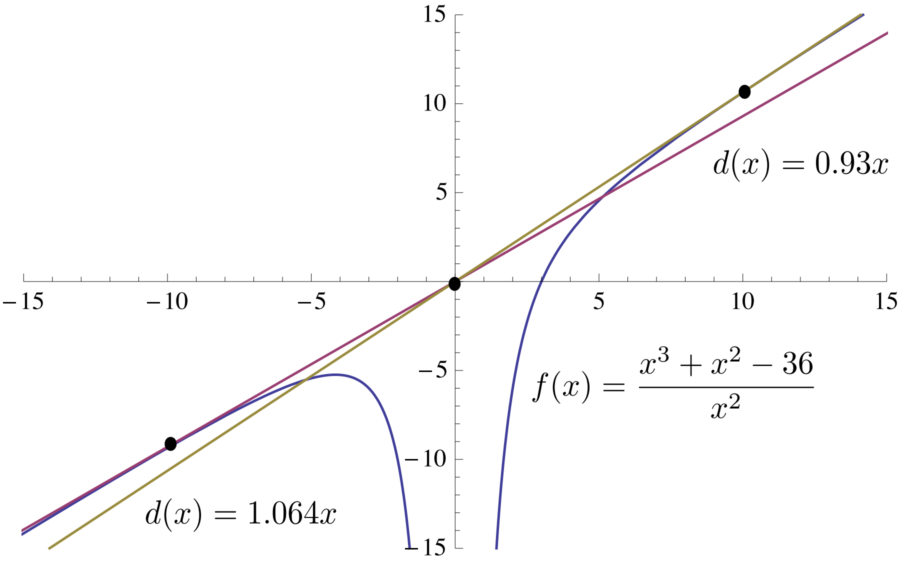

FIGURE 3.14 – Exercice 3.17

Remarque 15. *Les valeurs d'abscisse pour lesquelles les normales à une fonction f passent par l'origine sont les solutions de l'équation*

$$\frac{f(x)}{x} = -\frac{1}{f'(x)}.$$

Bibliographie

[1] B.Zwahlen J.Douchet. *Calcul différentiel et intégral.* Enseignement des mathématiques. PPUR, 2006.