Algèbre linéaire - Maturité

http://phymaths.xyz

Michel Semon

02/01/2023

Résumé

Petit résumé sur le chapitre des endomorphismes et de leur réduction à l'aide des vecteurs et valeurs propres. J'ai essayé de réduire au minimum les démonstrations, car je sais que dans un premier temps ce n'est pas ce qui compte. Il est très important d'aborder un sujet en essayant de comprendre intuitivement de quoi il retourne avant de vouloir tout démontrer.

Table des matières

1 Notations **4**
1.1 Prérequis . . . 4

2 Transformations linéaires **5**
2.1 Définition . . . 5
2.2 Notations vectorielle et matricielle d'une transformation linéaire . . . 5
2.3 Exemples d'applications linéaires . . . 5
2.4 Relation entre une transformation et les bases de E et F . . . 5
2.5 Matrice d'une transformation linéaire . . . 6
2.5.1 Exemple - Comment déterminer la matrice d'une transformation . . . 6

3 Homomorphismes **8**
3.1 Définition . . . 8
3.1.1 Exemple - Démonstration de la linéarité . . . 8

4 Endomorphismes **9**
4.1 Définition . . . 9
4.1.1 Exemple - Dans l'espace des vecteurs "standards" . . . 9
4.1.2 Exemple - Dans l'espace vectoriel des polynômes . . . 10

5 Image, noyau et théorème du rang **11**
5.1 Introduction . . . 11
5.1.1 Image et rang d'une transformation linéaire . . . 11
5.1.2 Noyau d'une transformation linéaire, théorème du rang . . . 11
5.1.3 Illustration du théorème du rang . . . 11
5.1.4 Exemple - Calcul de l'image et du noyau d'une transformation . . . 11
5.1.5 Exemple - Théorème du rang . . . 13

6 Matrice de passage, changement de base **16**
6.1 Théorie . . . 16
6.2 Remarque très importante . . . 17
6.3 Illustration 1 - Changement de base . . . 18
6.4 Calcul de matrices de passage . . . 19
6.4.1 Exemple 1 - Comment déterminer une matrice de passage . . . 19
6.4.2 Exemple 2 - Comment déterminer une matrice de passage . . . 22
6.5 Formule à retenir . . . 23
6.5.1 Illustration . . . 23

7 Effet d'un changement de base sur un endomorphisme **24**
7.1 De quoi s'agit-il ? . . . 24
7.1.1 Exemple 1 - Endomorphisme et changement de base . . . 25

8 Similitude matricielle **27**
8.1 Définition . . . 27
8.2 Propriétés . . . 27
8.2.1 Invariants de similitude . . . 27
8.3 Exercices - Matrices semblables . . . 27

9 Valeurs et vecteurs propres **29**
9.1 Exemple d'introduction . . . 29
9.2 Calcul des éléments propres d'une transformation linéaire . . . 30
9.2.1 Polynôme caractéristique et valeurs propres d'une matrice . . . 30
9.2.2 Vecteurs propres . . . 31
9.3 Exemple 1 - Dans l'espace vectoriel des polynômes . . . 32
9.4 Exemple 2 - Dans l'espace vectoriel des fonctions dérivables . . . 32
9.5 Exemple 3 - Dans l'espace vectoriel des polynômes . . . 34
9.6 Exemple 4 - Projection . . . 38
9.7 Exemple 5 - Dimension des sous-espaces . . . 39

10 Construction de matrices de transformations linéaire **40**
10.1 Exemple 1 . . . 40
10.1.1 Résolution par géométrie analytique . . . 40
10.1.2 Résolution par à l'aide des valeurs et vecteurs propres . . . 41
10.2 Exemple 2 . . . 42
10.3 Interprétation d'une transformation linéaire . . . 44
10.3.1 Exemples 1 . . . 44
10.3.2 Exemples 2 . . . 44

1 Notations

Les notations devraient correspondre à celles utilisées dans la plupart des livres.

ii) Les vecteurs sont en gras et non pas surmontés d'une flèche (v est la norme du vecteur $\mathbf{v}$).

iii) La matrice $M_{m,n}$ est une matrice de m lignes et n colonne.

iv) Les termes d'*application linéaire* et de *transformation linéaire* seront utilisés pour désigner le même objet mathématique.
Normalement on utilise le terme d'application linéaire pour des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et le terme de transformation linéaire pour des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$.

v) Chaque fois que le mot transformation est utilisé, il s'agira automatiquement d'une transformation linéaire.

vi) Les ensembles E et F seront respectivement l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée d'une transformation linéaire.

1.1 Prérequis

Avant de commencer, il faut avoir une bonne notion des points suivants :

— Calcul de l'inverse, de la transposée et du déterminant d'une matrice.
— Résolution d'un système linéaire (réduction de Gauss-Jordan).
— Notion d'espace et de sous-espace vectoriel, de base d'espace vectoriel, d'indépendance dans une famille de vecteurs et de famille génératrice.

2 Transformations linéaires

2.1 Définition

Une **transformation linéaire** φ est une fonction d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F qui vérifie les deux propriétés suivantes :

$$\varphi(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x})+\varphi(\mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in E \tag{1}$$

$$\varphi(\alpha\mathbf{x}) = \alpha\varphi(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in E \text{ et } \alpha \in \mathbb{R} \tag{2}$$

On aura la plupart du temps $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^m$ ou encore $E = \mathbb{R}^n_{[x]}$ et $F = \mathbb{R}^m_{[x]}$ (espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n ou m).

2.2 Notations vectorielle et matricielle d'une transformation linéaire

Si la forme vectorielle d'une transformation est par exemple

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, (x_1,x_2,x_3) \mapsto (x_1+3x_3; x_1+x_2+x_3)$$

alors sa forme matricielle équivalente est :

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (x_1,x_2,x_3)^T \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} (x_1,x_2,x_3)^T$$

Ou encore :

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{T}_{2,3}\,\mathbf{x} \qquad \text{avec} \qquad \mathbf{T}_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Une transformation linéaire φ de $E = \mathbb{R}^n$ dans $F = \mathbb{R}^m$ aura pour matrice une matrice $M_{m,n}$, c.à.d une matrice de m lignes et n colonnes.

2.3 Exemples d'applications linéaires

Les transformations linéaires peuvent être des homothéties, des rotations, des symétries, des projections ou des compositions de celles-ci.

2.4 Relation entre une transformation et les bases de E et F

Tout espace vectoriel de dimension finie possède des bases. Et pourtant, la plupart du temps, celles-ci n'apparaissent pas dans l'énoncé de la transformation linéaire donnée !

Cela vient du fait que de manière générale une transformation linéaire sera donnée en fonction des bases canoniques des ensembles E et F, c'est-à-dire les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$.

Exemple : Soit la transformation linéaire :

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, (x_1,x_2,x_3) \mapsto (x_1+3x_3; x_1+x_2+x_3)$$

récrivons-la avec des bases généralisées, c.-à-d. une base quelconque $(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)$ pour $\mathbb{R}^3$ et une base quelconque $(\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2)$ pour $\mathbb{R}^2$.

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2+x_3\mathbf{e}_3 \mapsto (x_1+3x_3)\mathbf{f}_1+(x_1+x_2+x_3)\mathbf{f}_2$$

ou encore

$$\varphi(x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2+x_3\mathbf{e}_3) = (x_1+3x_3)\mathbf{f}_1+(x_1+x_2+x_3)\mathbf{f}_2$$

En développant et en réarrangeant :

$$\begin{aligned}\varphi(x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2+x_3\mathbf{e}_3) &= (x_1+3x_3)\mathbf{f}_1+(x_1+x_2+x_3)\mathbf{f}_2\\ &= x_1(\mathbf{f}_1+\mathbf{f}_2)+x_2\mathbf{f}_2+x_3(3\mathbf{f}_1+\mathbf{f}_2)\end{aligned}$$

Mais φ est linéaire et les x_i sont des scalaires, donc en appliquant (2) :

$$x_1\varphi(\mathbf{e}_1)+x_2\varphi(\mathbf{e}_2)+\varphi(x_3\mathbf{e}_3)=x_1(\mathbf{f}_1+\mathbf{f}_2)+x_2\mathbf{f}_2+x_3(3\mathbf{f}_1+\mathbf{f}_2)$$

On peut donc faire les identifications suivantes :

$$\varphi(\mathbf{e}_1)=\mathbf{f}_1+\mathbf{f}_2;\qquad \varphi(\mathbf{e}_2)=\mathbf{f}_2;\qquad \varphi(\mathbf{e}_3)=3\mathbf{f}_1+\mathbf{f}_2.$$

À présent, si on choisit les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, on aura les relations :

$$\varphi(\mathbf{e}_1)=\varphi(1,0,0)^T=(1,0)^T+(0,1)^T=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$\varphi(\mathbf{e}_2)=\varphi(0,1,0)^T=(0,1)^T=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$\varphi(\mathbf{e}_3)=\varphi(0,0,1)^T=3(1,0)^T+(0,1)^T=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$$

si on récrit avec les composantes, on a :

$$\begin{aligned}\varphi(x_1(1,0,0)^T+x_2(0,1,0)^T+x_3(0,0,1)^T) &= x_1((1,0)^T+(0,1)^T)+x_2(0,1)^T+x_3(3(1,0)^T+(0,1)^T)\\ &= x_1(1,1)^T+x_2(0,1)^T+x_3(3,1)^T)\end{aligned}$$

donc

$$(x_1;x_2;x_3)\mapsto(x_1+3x_3;x_1+x_2+x_3)$$

On peut remarquer qu'une application linéaire agit sur n'importe quelle base de la même manière, mais elle apparaitra différemment dans chacune d'elles.

Pour le moment on en reste à la constatation fondamentale suivante :

Une transformation linéaire est déterminée par son action sur les vecteurs de base

2.5 Matrice d'une transformation linéaire

Une transformation linéaire peut-être mise sous forme matricielle.

On a vu que φ est déterminée dès que l'on connaît son action sur les vecteurs de base des espaces E et F. En calculant l'image par φ des vecteurs de la base canonique de E, on obtiendra les vecteurs colonnes de la matrice de la transformation $\mathbf{T}_\varphi$.

2.5.1 Exemple - Comment déterminer la matrice d'une transformation

Trouver la matrice des applications linéaires suivantes :

Exemple 1 Soit :

$$\varphi_A : (x_1;x_2) \mapsto (3x_1+4x_2;x_2-x_1;0;2x_2)$$

Les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ sont $(1;0)^T$ et $(0;1)^T$ et leurs images par φ_A sont

$$\begin{aligned} \varphi_A(1;0)^T &= (3;-1;0;0)^T \\ \varphi_A(0;1)^T &= (4;1;0;2)^T \end{aligned}$$

Ces deux vecteurs sont les colonnes de la matrice de la transformation qui est donc :

$$\mathbf{T}_{\varphi_A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exemple 2 Soit :

$$\varphi_B : (x_1;x_2) \mapsto (3x_1-x_2)$$

Les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ sont $(1;0)^T$ et $(0;1)^T$ et leurs images par φ_B sont

$$\begin{aligned} \varphi_B(1;0)^T &= (3)^T \\ \varphi_B(0;1)^T &= (-1)^T \end{aligned}$$

Ces deux vecteurs sont les colonnes de la matrice de la transformation qui est donc :

$$\mathbf{T}_{\varphi_B} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Exemple 2 Soit :

$$\varphi_C : x_1 \mapsto (3x_1;-2x_1)$$

Le vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}$ est $(1)^T$ et son image par φ_C est

$$\varphi_C(1)^T = (3;-2)^T$$

Ce vecteur est la colonne de la matrice de la transformation qui est donc :

$$\mathbf{T}_{\varphi_C} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Exemple 3 Soit :

$$\varphi_D : (x_1,x_2,x_3) \mapsto (x_1+3x_3;x_1+x_2+x_3)$$

Les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ sont $(1;0;0)^T$, $(0;1;0)^T$ et $(0;0;1)^T$ et leurs images par φ_D sont

$$\begin{aligned} \varphi_D(1;0;0)^T &= (1;1)^T \\ \varphi_D(0;1;0)^T &= (0;1)^T \\ \varphi_D(0;1;0)^T &= (3;1)^T \end{aligned}$$

Ces trois vecteurs sont les colonnes de la matrice de la transformation qui est donc :

$$\mathbf{T}_{\varphi_D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3 Homomorphismes

3.1 Définition

Un **homomorphisme** est une transformation linéaire entre deux espaces vectoriels de dimensions différentes.
La matrice d'un homomorphisme est donc une matrice rectangulaire.

3.1.1 Exemple - Démonstration de la linéarité

Soit la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^4$ donnée par :

$$\varphi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4 : (x_1;x_2) \mapsto (3x_1+4x_2; x_2-x_1; 0; 2x_2)$$

Cette fonction est-elle une transformation linéaire ?

On commence par remarquer qu'aucune base bien définie n'est donnée, ni pour $\mathbb{R}^n$ ni pour $\mathbb{R}^m$. On va donc considérer que les bases utilisées sont les bases canoniques [1]. On choisi deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$,

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$$

et on leur applique les propriétés (1) et (2) :

$$\begin{aligned} \varphi_1\left(\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \end{pmatrix}\right) &= (3(x_1+y_1)+4(x_2+y_2); (x_2+y_2)-(x_1+y_1); 0; 2(x_2+y_2)) \\ &= (3x_1+3y_1+4x_2+4y_2; (x_2-x_1)-(y_2-y_1); 0; 2x_2+2y_2)) \\ &= (3x_1+4x_2; x_2-x_1; 0; 2x_2) + (3y_1+4y_2; y_2-y_1; 0; 2y_2) \\ &= \varphi_1\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) + \varphi_1\left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \qquad \checkmark \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_1\left(\begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{pmatrix}\right) &= (3\alpha x_1 + 4\alpha x_2; \alpha x_2 - \alpha x_1; 0; 2\alpha x_2) \\ &= (\alpha(3x_1+4x_2); \alpha(x_2-x_1); 0; \alpha 2x_2) \\ &= \alpha(3x_1+4x_2; x_2-x_1; 0; 2x_2) \\ &= \alpha\varphi_1\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) \qquad \checkmark \end{aligned}$$

La transformation est linéaire, c'est donc un homomorphisme.

1. La base canonique de $\mathbb{R}$ est le "vecteur" $\langle 1 \rangle$, celle de $\mathbb{R}^2$ est la famille de vecteurs $\langle (1;0)^T; (0;1)^T \rangle$, celle de $\mathbb{R}^3$ est la famille de vecteurs $\langle (1;0;0)^T; (0;1;0)^T; (0;0;1)^T \rangle$ etc.

4 Endomorphismes

4.1 Définition

Un **endomorphisme** est une transformation linéaire entre deux espaces vectoriels de même dimension. La matrice d'un endomorphisme est donc une matrice carrée. Si l'endomorphisme est bijectif, sa matrice est inversible et on le nomme **automorphisme**.

4.1.1 Exemple - Dans l'espace des vecteurs "standards"

Soit une base quelconque de $\mathbb{R}^3$ (pas forcément la base canonique), notée $\mathscr{B}_0 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ et un vecteur $\mathbf{v} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$.

Soit l'endomorphisme :

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \mathbf{v} \mapsto x\mathbf{e}_1 + (3x - 2y)\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$$

Trouver la matrice de l'endomorphisme dans la base donnée.

Solution :
On commence par récrire l'endomorphisme et on utilise la linéarité de φ :

$$\begin{aligned} \varphi(x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3) &= x\mathbf{e}_1 + (3x - 2y)\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 \quad (3) \\ &= x(\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2) + y(-2\mathbf{e}_2) + z\mathbf{e}_3 \\ &= x\,\varphi(\mathbf{e}_1) + y\,\varphi(\mathbf{e}_2) + z\,\varphi(\mathbf{e}_3) \end{aligned}$$

(4)

Dans la dernière relation ci-dessus, on identifie :

$$\varphi(\mathbf{e}_1) = (\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2); \qquad \varphi(\mathbf{e}_2) = (-2\mathbf{e}_2); \qquad \varphi(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_3$$

Il s'agit à présent de trouver la matrice de cette transformation :

On peut récrire la relation

$$\varphi(x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3) = x(\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2) + y(-2\mathbf{e}_2) + z\mathbf{e}_3$$

sous forme matricielle. Cela laisse apparaître la matrice de l'endomorphisme :

$$\varphi\left(\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\3 & -2 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

dans le cas de l'utilisation des bases canoniques, on obtient :

$$\varphi\left(\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\3 & -2 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$$\varphi\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\3 & -2 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

La matrice de l'endomorphisme dans la base canonique est :

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\3 & -2 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

On peut remarquer que les colonnes de la matrice sont les images par φ des vecteurs de la base canonique. On verra plus loin ce qu'il advient de φ si les bases ne sont pas les bases canoniques.

4.1.2 Exemple - Dans l'espace vectoriel des polynômes

Soit $\mathbb{R}^2_{[x]}$ l'espace vectoriel des polynômes de degré égal ou inférieur à deux. La base est dans ce cas $\mathscr{B} = (x^2; x; 1)$.
On donne l'endomorphisme Ψ.

$$\Psi : \mathbb{R}^2_{[x]} \to \mathbb{R}^2_{[x]} : P(x) \mapsto (x^3 - 3x + 2)P''(x) + (x-1)P'(x) + (2-2x)P(x)$$

Il s'agit de déterminer la matrice de l'endomorphisme de dimension 3.

Solution :
On choisit un "vecteur" de : $\mathbb{R}^2_{[x]}$, soit le polynôme $P(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$. On remarquera que les lettres a, b, c jouent le rôle des composantes x_1, x_2, x_3 et que les monômes $x^2, x, 1$ jouent le rôle des vecteurs de base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ de l'exemple précédent. Le problème se traite donc exactement de la même manière.

On commence par calculer les valeurs de $P''(x), P'(x)$ où $P(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$,

$$P'(x) = 2ax + b; \quad P''(x) = 2a.$$

Puis on les substitue dans l'endomorphisme donné et on cherche les images des vecteurs de base :

$$\begin{aligned} \Psi(ax^2 + bx + c) &= (x^3 - 3x + 2)(2a) + (x-1)(2ax + b) + (2-2x)(ax^2 + bx + c) \\ &= 4ax^2 - 8ax + 4a - 2bx^2 + 3bx - b - 2cx + 2c \\ &= a(4x^2 - 8x + 4) + b(-2x^2 + 3x - 1) + c(0x^2 - 2x + 2) \end{aligned}$$

Les parenthèses ci-dessus représentent les images des vecteurs de base $\Psi(x^2), \Psi(x), \Psi(1)$, on peut dire qu'elles représentent l'endomorphisme. En mettant l'équation sous forme matricielle, on a :

$$\Psi\left(\begin{pmatrix} x^2 & x & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x^2 & x & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -8 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

La matrice cherchée est :

$$\Psi = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -8 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Remarque 1. *On serait en droit de se demander si l'endomorphisme est vraiment linéaire vu la présence des puissances de x supérieures à un. En fait, cela ne joue aucun rôle, car x^2 est une base. Les coefficients a, b, c sont eux à la puissance 1 donc il n'y a aucun problème, on remarquera que la matrice n'est constituée que de chiffres.*

5 Image, noyau et théorème du rang

5.1 Introduction

Imaginons un homomorphisme de $\mathbb{R}^6$ dans $\mathbb{R}^2$. Tout le monde sera d'accord pour dire qu'il est fort possible que des dimensions se "perdent" en chemin. Cela n'est pas forcément le cas, mais c'est un fait que cela arrive dans la plupart des cas.

On va voir dans cette section comment calculer la dimension de deux grandeurs appelées **image de la transformation linéaire** et **noyau de la transformation linéaire**. Ces deux grandeurs fondamentales peuvent être déterminées directement à partir de la matrice de l'homomorphisme ou de l'endomorphisme.

5.1.1 Image et rang d'une transformation linéaire

On doit toujours garder à l'esprit que les vecteurs d'une base sont indépendants (définition).

L'image d'un morphisme (homomorphisme ou endomorphisme) "vit" dans l'espace d'arrivée F et l'image d'un sous-espace vectoriel de E par la transformation linéaire $\varphi(\mathbf{x})$ est également un sous-espace vectoriel dans F.

On appelle dimension de l'**image** de la transformation linéaire (noté $\dim(\text{Im}\,\varphi)$) la dimension du sous-espace vectoriel engendré par φ dans F.

Le **rang**, noté $\text{rg}\varphi$ de la transformation linéaire est la dimension du plus grand sous-déterminant non nul de la matrice de la transformation $\mathbf{T}_\varphi$.

Le rang est toujours égal à la dimension de $\text{Im}\,\varphi$:

$$\text{rg}\varphi = \dim(\text{Im}\,\varphi) \tag{5}$$

5.1.2 Noyau d'une transformation linéaire, théorème du rang

On appelle **noyau** de la transformation linéaire φ, et on note $\ker\varphi$, l'image réciproque de $\{\mathbf{0}\}$ ou encore, c'est un sous-espace vectoriel de l'ensemble de départ, dont l'image par φ est le vecteur nul de F.

En résumé $\text{Im}\,\varphi$ est dans F et $\ker\varphi$ est dans E. La somme des dimensions $\dim(\text{Im}\,\varphi)$ et $\dim(\ker\varphi)$ est la dimension de l'ensemble de départ $\dim E$. C'est le **théorème du rang**, donné ici sans démonstration :

$$\dim E = \dim(\ker\varphi) + \dim(\text{Im}\,\varphi) \qquad \text{ou encore} \qquad \dim E = \dim(\ker\varphi) + \text{rg}\varphi \tag{6}$$

5.1.3 Illustration du théorème du rang

5.1.4 Exemple - Calcul de l'image et du noyau d'une transformation

Soit la transformation linéaire :

$$\varphi : (x_1; x_2; x_3; x_4) \mapsto (x_1 - x_2 + x_3 + x_4; x_2 + 3x_4)$$

1. Déterminer E, F et $\dim E$.
2. Déterminer la matrice $\mathbf{T}_\varphi$ de φ.
3. Déterminer l'image $\text{Im}\,\varphi$ et la dimension de celle-ci $\dim(\text{Im}\,\varphi)$.
4. Déterminer le rang de φ.

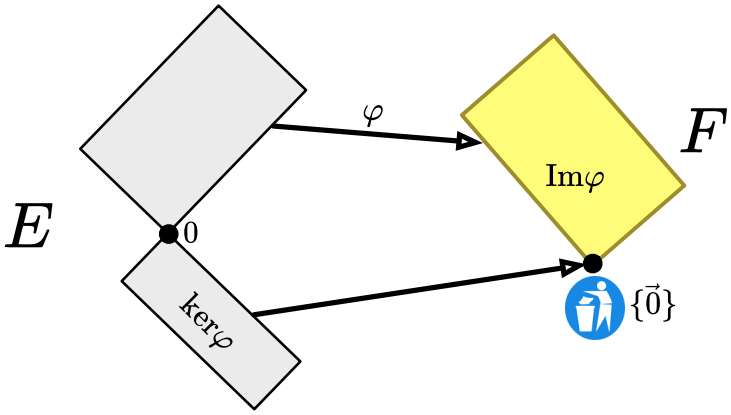

FIGURE 1 – Schéma des relations entre les différents ensembles intervenants dans le théorème du rang

5. Déterminer le noyau $\ker\varphi$ et la dimension de celui-ci $\dim(\ker\varphi)$.
6. Vérifier le théorème du rang.

Solution :

1. La transformation a l'ensemble de départ $E=\mathbb{R}^4$ et l'ensemble d'arrivée $F=\mathbb{R}^2$. La dimension de E est donc 4.
$$\dim(E)=4$$

2. La matrice de la transformation est obtenue en calculant les images par φ des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
$$\varphi\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix};\ \varphi\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix};\ \varphi\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix};\ \varphi\left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$$
La matrice est :
$$\mathbf{T}_\varphi=\begin{pmatrix}1&-1&1&1\\0&1&0&3\end{pmatrix}$$

3. Pour calculer l'image de φ on peut réduire la matrice a la forme échelonnée.

   Les lignes de la matrice sont des vecteurs de l'espace de départ $E=\mathbb{R}^4$ et les colonnes de celle-ci sont des vecteurs de l'espace d'arrivée $F=\mathbb{R}^2$. La réduction de la matrice à sa forme échelonnée permet de distinguer facilement le nombre de vecteurs indépendants dans l'espace d'arrivée donc la dimension de Im ϕ.
$$\mathbf{T}_\varphi=\begin{pmatrix}1&-1&1&1\\0&1&0&3\end{pmatrix}\quad\xrightarrow{\text{réduction}}\quad\begin{pmatrix}1&0&1&4\\0&1&0&3\end{pmatrix}$$
   Les deux premières colonnes sont indépendantes, de ce fait elles génèrent dans F un sous-espace vectoriel de dimension 2. Deux vecteurs de base du sous-espace vectoriel Im ϕ sont les deux premières colonnes de la matrice originale $\mathbf{T}_\varphi$ (et non de la matrice réduite).

Dans le cas présent il y a 2 vecteurs indépendants de dimension 2, l'espace vectoriel généré est $F = \mathbb{R}^2$. Si F avait été de dimension plus grande, le sous-espace vectoriel généré aurait été un plan dans F.

4. Le rang de la transformation est 2. On le détermine en utilisant la matrice réduite. Le rang est la dimension de la plus grande sous matrice qui a un déterminant non nul.

$$\mathbf{T}_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \overset{\text{réduite}}{\longrightarrow} \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

Le rang est également le nombre de vecteurs indépendants de $\mathbf{T}_\varphi$ (donc de $\mathbf{T}_\varphi$ réduite également).

5. Le noyau de la transformation φ est le sous-espace vectoriel de E définit par $\ker\varphi = \{\mathbf{x} \in E \,|\, \varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_F)\}$. Autrement dit c'est la solution du système :

$$\mathbf{T}_\varphi \mathbf{x}_E = \mathbf{0}_F$$

On forme la matrice augmentée $[\mathbf{T}_\varphi|\mathbf{0}]$ qui est :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

Le système étant surdéterminé, on choisit $x_4 = \gamma$ et $x_3 = \rho$ d'où l'on calcule $x_2 = -3\gamma$ et $x_1 = -\rho - 4\gamma$.

$$\ker\varphi = \begin{pmatrix} -\rho - 4\gamma \\ -3\gamma \\ \rho \\ \gamma \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs $(-4,-3,0,1)^T$ et $(-1,0,1,0)^T$ sont des vecteurs de base de $\ker\varphi$.

$$\dim(\ker\varphi) = 2$$

6. Finalement on vérifie le théorème du rang :

$$\dim E = \dim(\ker\varphi) + \dim(\text{Im}\,\varphi) = \dim(\ker\varphi) + \text{rg}\varphi \quad \Rightarrow \quad 4 = 2 + 2 \qquad \checkmark$$

5.1.5 Exemple - Théorème du rang

Vérifier le théorème du rang, en fonction de μ, de la transformation φ donnée par la matrice :

$$\begin{pmatrix} 3 & \mu & 1 \\ \mu & -1 & -2 \\ 1 & \mu & 1 \end{pmatrix}$$

Le fil rouge à suivre est le suivant :

1. Calcul du déterminant afin de trouver les valeurs de μ qui annulent celui-ci.
2. Déterminer les différents types de matrices selon la valeur de μ.
3. Réduction de ces différentes matrices à la forme échelonnée afin de pouvoir aisément trouver $\text{Im}\,\varphi$ et $\ker\varphi$.

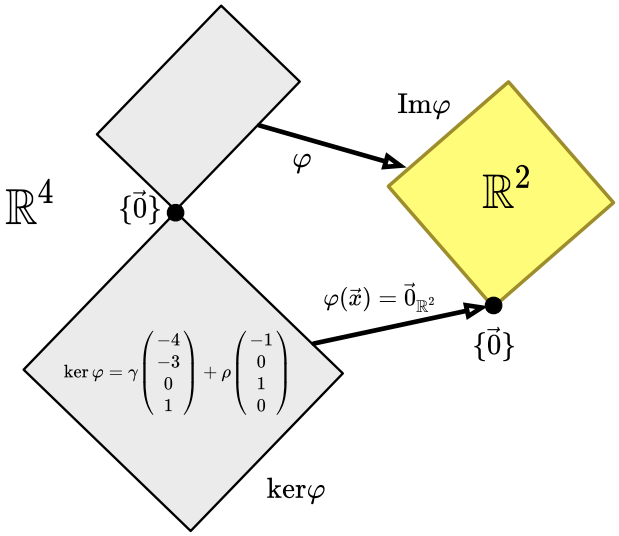

FIGURE 2 – Illustration du théorème du rang pour l'exemple 1.

4. Vérifier le théorème du rang.

Solution :

1. Le déterminant est :
$$\det\begin{pmatrix}3 & \mu & 1\\ \mu & -1 & -2\\ 1 & \mu & 1\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}3 & \mu & 1\\ \mu & -1 & -2\\ 1 & \mu & 1\end{vmatrix} = 4\mu - 2$$
Le déterminant s'annule pour la valeur $\mu = \frac{1}{2}$.

2. Les deux matrices dont on va s'occuper sont :
$$\varphi_1 = \begin{pmatrix}3 & \frac{1}{2} & 1\\ \frac{1}{2} & -1 & -2\\ 1 & \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix}3 & a & 1\\ a & -1 & -2\\ 1 & a & 1\end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad a \neq \frac{1}{2}$$

3. La matrice
$$\varphi_2 = \begin{pmatrix}3 & a & 1\\ a & -1 & -2\\ 1 & a & 1\end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad a \neq \frac{1}{2}$$
est inversible, car son déterminant est non nul. Son rang est donc de 3 et par conséquent Im φ est également de dimension 3. Les vecteurs colonnes formant cette matrice sont une base de Im φ qui génère $\mathbb{R}^3$.
La dimension de l'ensemble de départ étant la même que celle de Im φ, le théorème du rang nous dit que la dimension de $\ker\varphi$ est nulle. Donc les solutions du problème pour la matrice φ_2 sont :
$$\dim(\text{Im}\,\varphi_2) = 3; \quad \text{Im}\,\varphi_2 = \mathbb{R}^3$$
$$\dim(\ker\varphi_2) = 0; \quad \ker\varphi_2 = \{\mathbf{0}\}$$
$$\dim(E) = \text{Rg}(\varphi_2) + \dim(\ker\varphi_2); \quad \dim(E) = \dim(\text{Im}\,\varphi_2) + \dim(\ker\varphi_2); \quad 3 = 3 + 0$$

4. On réduit la matrice

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 & -2 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

à sa forme échelonnée réduite qui est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On voit que les deux premières colonnes sont indépendantes, les colonnes correspondantes de la matrice originale sont une base de $\text{Im}\,\varphi_1$. Il est facile de voir que le vecteur $(0,-2,1)^T$ satisfait à l'équation homogène associée. Ce dernier sera une base de $\ker\varphi_1$.

$$\dim(\text{Im}\,\varphi_1) = 2; \quad \text{Im}\,\varphi_1 = \{(6,1,2)^T, (1,-2,1)^T\}$$

$$\dim(\ker\varphi_1) = 1; \quad \ker\varphi_1 = \{(0,-2,1)^T\}$$

$$\dim(E) = \text{Rg}(\varphi_1) + \dim(\ker\varphi_1); \quad \dim(E) = \dim(\text{Im}\,\varphi_1) + \dim(\ker\varphi_1); \quad 3 = 2 + 1 \checkmark$$

6 Matrice de passage, changement de base

6.1 Théorie

Pour simplifier, je me limite à l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, mais il est clair que ce qui suit s'applique à tout espace $\mathbb{R}^n$. Il est évident, mais je tiens à le souligner qu'un changement de base ne peut s'effectuer qu'entre espaces vectoriels identiques, donc pour une même dimension.

Soit un vecteur $\mathbf{x}_e$ dont les composantes par rapport à la base canonique $\mathscr{B}_0 = (\mathbf{e}_1;\mathbf{e}_2;\mathbf{e}_3)$ sont $(x_1;x_2;x_3)$. On désire à présent décrire ce **même** vecteur $\mathbf{x}_{e'}$, ayant les composantes $(x'_1;x'_2;x'_3)$, dans une autre base $\mathscr{B}_1 = (\mathbf{e}'_1;\mathbf{e}'_2;\mathbf{e}'_3)$ du même espace E.

La base $\mathscr{B}_1 = (\mathbf{e}'_1;\mathbf{e}'_2;\mathbf{e}'_3)$ est donnée en fonction des vecteurs de la base $\mathscr{B}_0$.

Les relations entre les deux bases sont généralement données dans l'énoncé de l'exercice ou imposées par l'expérience :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 + a_{31}\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_2 &= a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 + a_{32}\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_3 &= a_{13}\mathbf{e}_1 + a_{23}\mathbf{e}_2 + a_{33}\mathbf{e}_3 \end{aligned} \tag{7}$$

Les coefficients a_{ij} sont des nombres réels.

On commence par égaler les deux "versions" du même vecteur :

$$\mathbf{x}_e = \mathbf{x}_{e'} \quad \Rightarrow \quad x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 = x'_1\mathbf{e}'_1 + x'_2\mathbf{e}'_2 + x'_1\mathbf{e}'_3$$

En substituant les valeurs des $\mathbf{e}_{ij}$ données sous (7), on obtient :

$$x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 = x'_1(a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 + a_{31}\mathbf{e}_3) + x'_2(a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 + a_{32}\mathbf{e}_3) + x'_1(a_{13}\mathbf{e}_1 + a_{23}\mathbf{e}_2 + a_{31}\mathbf{e}_3)$$

En appliquant le formalisme matriciel, cela devient :

$$\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'_1\\x'_2\\x'_3\end{pmatrix}$$

Les vecteurs de l'ensemble $(\mathbf{e}_1;\mathbf{e}_2;\mathbf{e}_3)$ étant ceux de la base canonique, la matrice $\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\end{pmatrix}$ est par conséquent la matrice identité $\mathbf{I}_3$ et l'égalité (8) peut se récrire :

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'_1\\x'_2\\x'_3\end{pmatrix} \quad \overset{\text{↦}}{\longrightarrow} \quad \mathbf{x} = \mathbf{P}_{ee'}\mathbf{x}' \quad \text{avec} \quad \mathbf{P}_{ee'} = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$$

$\mathbf{P}_{ee'}$ est appelée la **matrice de changement de base** ou encore **matrice de passage** de la base $(\mathbf{e}_1;\mathbf{e}_2;\mathbf{e}_3)$ à la base $(\mathbf{e}'_1;\mathbf{e}'_2;\mathbf{e}'_3)$.

Il existe deux interprétations possibles de la matrice de passage $\mathbf{P}_{ee'}$:

1. La matrice de passage $\mathbf{P}_{ee'}$ peut être interprétée comme la transformation linéaire φ de E dans E définie par :

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{e}_1) &= \mathbf{e}'_1 = a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 + a_{31}\mathbf{e}_3 \\ \varphi(\mathbf{e}_2) &= \mathbf{e}'_2 = a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 + a_{32}\mathbf{e}_3 \\ \varphi(\mathbf{e}_3) &= \mathbf{e}'_3 = a_{13}\mathbf{e}_1 + a_{23}\mathbf{e}_2 + a_{33}\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

La matrice de φ dans la base $(\mathbf{e}_1;\mathbf{e}_2;\mathbf{e}_3)$ est $\mathbf{P}_{ee'}$.

2. La matrice de passage $\mathbf{P}_{ee'}$ peut être interprétée comme l'application identique $\mathbf{Id}_E : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}$ de E muni de la base $(\mathbf{e'}_1;\mathbf{e'}_2;\mathbf{e'}_3)$ dans E muni de la base $(\mathbf{e}_1;\mathbf{e}_2;\mathbf{e}_3)$.
   La matrice de φ dans les bases $(\mathbf{e'}_1;\mathbf{e'}_2;\mathbf{e'}_3)$ et $(\mathbf{e}_1;\mathbf{e}_2;\mathbf{e}_3)$ est $\mathbf{P}_{ee'}$.

L'écriture matricielle donne donc :

$$\mathbf{x}_e = \mathbf{P}_{ee'}\,\mathbf{x'}_e \tag{8}$$

On remarque que le passage se fait de $\mathbf{x}_{e'}$ de $\mathscr{B}_1$ à $\mathbf{x}_e$ dans $\mathscr{B}_0$ dans le **sens inverse des indices**.

La matrice de passage est naturellement inversible puisqu'elle découle d'une base. Sa matrice inverse peut s'écrire :

$$\mathbf{P}_{ee'}^{-1} = \mathbf{P}_{e'e}$$

En isolant $\mathbf{x}_{e'}$ dans (8) on obtient les valeurs des composantes $(x'_1;x'_2;x'_3)$ du vecteur dans $\mathscr{B}_1$.

$$\mathbf{x}_{e'} = \mathbf{P}_{ee'}^{-1}\,\mathbf{x}_e \quad \text{ou encore} \quad \mathbf{x}_{e'} = \mathbf{P}_{e'e}\,\mathbf{x}_e \tag{9}$$

Les colonnes de la matrice de passage sont les relations entre les bases données en (7).

6.2 Remarque très importante

Soit le passage de la base $\mathscr{B}_0 = (\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}$ à la base $\mathscr{B}_1 = (\mathbf{e'}_1,\mathbf{e'}_2) = \mathbf{e'}$ donné par les relations :

$$\mathbf{e'}_1 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$$
$$\mathbf{e'}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$$

La matrice de passage est :

$$\mathbf{P}_{ee'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Si on se place dans $\mathscr{B}_0$ les vecteurs de base $\mathbf{e}_1$ et $\mathbf{e}_2$ ont pour composantes :

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{B_0} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{B_0}$$

Maintenant si on se place dans $\mathscr{B}_1$ ce sera analogue, dans $\mathscr{B}_1$ les vecteurs de base $\mathbf{e'}_1$ et $\mathbf{e'}_2$ auront les composantes :

$$\mathbf{e'}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{B_1} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{e'}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{B_1}$$

Si on applique la matrice de passage aux vecteurs de la base $\mathscr{B}_1$ on obtient les composantes de ces mêmes vecteurs, mais cette fois dans la base $\mathscr{B}_0$:

$$\mathbf{e'}_{1_{B_0}} = \mathbf{P}_{ee'}\mathbf{e'}_{1_{B_1}} \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{B_0} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{B_1}$$

$$\mathbf{e'}_{2_{B_0}} = \mathbf{P}_{ee'}\mathbf{e'}_{2_{B_1}} \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{B_0} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{B_1}$$

On rejoint ici la remarque faite plus haut, à savoir que la matrice de passage $\mathbf{P}_{ee'}$ est la matrice identité qui donne les composantes des vecteurs de base $\mathbf{e'}_i$ dans $\mathscr{B}_0$.

Il serait donc plus juste, et c'est ce qui est fait dans certains livres, de parler non pas de matrice de passage de la base $\mathscr{B}_0$ à $\mathscr{B}_1$ ($\mathbf{P}_{\mathscr{B}_0\mathscr{B}_1}$), mais de la matrice identité permettant de passer de $\mathscr{B}_1$ à $\mathscr{B}_0$ ($\mathbf{Id}^{\mathscr{B}_0}_{\mathscr{B}_1}$)

J'ai choisi d'utiliser la notation $\mathbf{P}_{ee'}$ et non la notation $\mathbf{Id}^{e}_{e'}$.

La relation entre les deux notations est la suivante :

$$\mathbf{P}_{01} = \mathbf{P}_{\mathscr{B}_0\mathscr{B}_1} \equiv \mathbf{Id}^{\mathscr{B}_0}_{\mathscr{B}_1} \quad \text{ou encore :} \quad \mathbf{P}_{\mathbf{ee'}} \equiv \mathbf{Id}^{\mathbf{e}}_{\mathbf{e'}} \tag{10}$$

6.3 Illustration 1 - Changement de base

Soit la situation suivante (dessin 3) :

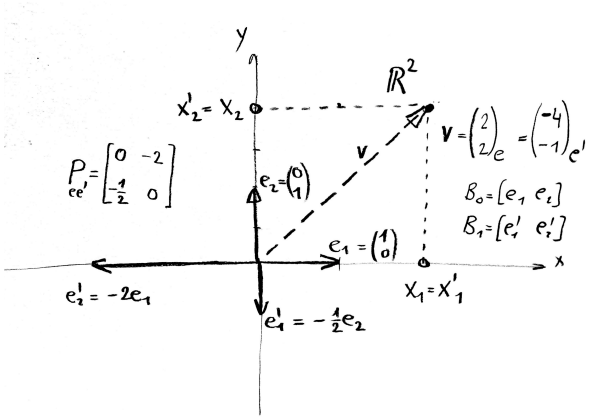

FIGURE 3 – Illustration d'un changement de base

On se trouve dans $\mathbb{R}^2$, on a la base canonique $\mathscr{B}_0 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ et une autre base $\mathscr{B}_1 = (\mathbf{e'}_1, \mathbf{e'}_2)$. Les relations entre les deux bases sont données par les égalités :

$$\begin{aligned} \mathbf{e'}_1 &= -\frac{1}{2}\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e'}_2 &= -2\mathbf{e}_1 \end{aligned} \tag{11}$$

Ces relations n'ont en fait rien à voir avec le système d'axe si on regarde bien. En effet $\mathbf{e'}_1$ se trouve dans la direction opposée à $\mathbf{e}_2$ et est deux fois plus court. $\mathbf{e'}_2$ quant à lui, se trouve dans la direction opposée de $\mathbf{e}_1$ et est deux fois plus long.

Par définition la matrice de passage de la base $\mathscr{B}_0$ à la base $\mathscr{B}_1$ est :

$$\mathbf{P}_{ee'} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice inverse est :

$$\mathbf{P}^{-1}_{ee'} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

C'est la même dans ce cas précis, car en regardant le dessin, les relations suivantes sont également vérifiées :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= -\frac{1}{2}\mathbf{e'}_2 \\ \mathbf{e}_2 &= -2\mathbf{e'}_1 \end{aligned}$$

On en déduit que la matrice de passage de la base $\mathscr{B}_1$ à $\mathscr{B}_0$ est :

$$\mathbf{P}_{e'e} = \mathbf{P}_{ee'}^{-1}.$$

C'est la matrice inverse.

Prenons à présent le vecteur $\mathbf{v}$. Le vecteur $\mathbf{v}$ peut s'écrire de deux manières différentes selon la base depuis lequel on le regarde. Du dessin (3) on voit que

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_0} \quad \text{et} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_1}$$

On va maintenant établir la relation entre ces valeurs.

$\mathbf{v}$ est le même vecteur, il ne bouge pas lors du passage d'une base à l'autre. On peut donc écrire l'identité :

$$\mathbf{v} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 = x'_1\mathbf{e}'_1 + x'_2\mathbf{e}'_2.$$

Si on substitue les relations (11) on obtient :

$$\mathbf{v} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 = x'_1(-\frac{1}{2}\mathbf{e}_2) + x'_2(-2\mathbf{e}_1)$$

En notation matricielle, on a :

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$$

Par identification :

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} \quad \hookrightarrow \quad \mathbf{v}_e = \mathbf{P}_{ee'}\mathbf{v}_{e'}$$

Cette dernière relation est **fondamentale**. On peut en déduire les valeurs de x'_1 et x'_2 :

$$\mathbf{v}'_e = \mathbf{P}_{ee'}^{-1}\mathbf{v}_e = \mathbf{P}_{e'e}\mathbf{v}_e$$

D'où,

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ce résultat confirme ce que l'on peut déduire du dessin.

6.4 Calcul de matrices de passage

6.4.1 Exemple 1 - Comment déterminer une matrice de passage

Soit $\mathscr{B}_0 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et soit les relations :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{a}_2 &= 5\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{b}_1 &= 7\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{b}_2 &= 4\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

1. Montrer que $\mathscr{B}_1 = (\mathbf{a}_1; \mathbf{a}_2)$ et $\mathscr{B}_2 = (\mathbf{b}_1; \mathbf{b}_2)$ sont des bases de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer toutes les matrices de changements de base $\mathbf{P}_{ij}$ possibles.
3. Calculer les composantes du vecteur $\mathbf{u} = 3\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2$ dans chaque base.

Solution :

1. On peut récrire les familles de vecteurs de base de la manière suivante :

$$\mathscr{B}_1 = (\mathbf{a}_1;\mathbf{a}_2) = (2\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2;5\mathbf{e}_1+3\mathbf{e}_2) \quad \overset{\text{matr.}}{\longrightarrow} \quad (\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2) = (\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2)\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}$$

et

$$\mathscr{B}_2 = (\mathbf{b}_1;\mathbf{b}_2) = (7\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2;4\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2) \quad \overset{\text{matr.}}{\longrightarrow} \quad (\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2) = (\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2)\begin{pmatrix}7 & 4\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

On sait que $\mathscr{B}_0$ est la base canonique, on peut donc poser :

$$(\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \mathbf{I}_2$$

d'où

$$\mathscr{B}_1 = \mathbf{I}_2\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}$$

et

$$\mathscr{B}_2 = \mathbf{I}_2\begin{pmatrix}7 & 4\\ 2 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7 & 4\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

Les deux matrices $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ ont des déterminants non nuls, les vecteurs qui les composent sont indépendants et donc ce sont des bases de $\mathbb{R}^2$.

2. Commençons par étudier la première des deux relations trouvées ci-dessus :

$$(\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2) = (\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2)\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix} \tag{12}$$

À quoi correspond-elle ?

Dans $\mathbb{R}^2$ et avec la base $\mathscr{B}_0$ tout vecteur peut s'écrire $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$. Dans la base $\mathscr{B}_1$, ce même vecteur devient $x'_1\mathbf{a}_1 + x'_2\mathbf{a}_2$ ce qui matriciellement donne :

$$(\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = (\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2)\begin{pmatrix}x'_1\\ x'_2\end{pmatrix}$$

Si on substitue (12) dans l'équation ci-dessus, il vient :

$$(\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = (\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2)\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'_1\\ x'_2\end{pmatrix}$$

d'où, par identification

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'_1\\ x'_2\end{pmatrix} \tag{13}$$

La matrice de passage de $\mathscr{B}_0$ à $\mathscr{B}_1$ (on garde à l'esprit quand réalité on devrait plutôt dire l'inverse) est :

$$\mathbf{P}_{01} = \begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix} \tag{14}$$

De manière analogue, la matrice de passage de $\mathscr{B}_0$ à $\mathscr{B}_2$ est :

$$\mathbf{P}_{02} = \begin{pmatrix}7 & 4\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

Il s'agit maintenant de trouver la matrice de passage de $\mathscr{B}_1$ à $\mathscr{B}_2$. On remarque que l'on connaît les deux relations :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{P}_{01} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{P}_{02} \begin{pmatrix} x''_1 \\ x''_2 \end{pmatrix} \tag{16}$$

On peut donc poser :

$$\mathbf{P}_{01} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \mathbf{P}_{02} \begin{pmatrix} x''_1 \\ x''_2 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs des matrices de cette égalité sont des vecteurs indépendants, donc les matrices qu'ils forment sont inversibles. On peut donc écrire :

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \mathbf{P}_{01}^{-1} \mathbf{P}_{02} \begin{pmatrix} x''_1 \\ x''_2 \end{pmatrix} = \mathbf{P}_{12} \begin{pmatrix} x''_1 \\ x''_2 \end{pmatrix}$$

Remarque 2. *On remarque que la formule pour un changement de base successif est :*

$$\mathbf{P}_{0n} = \mathbf{P}_{01}\mathbf{P}_{12}..\mathbf{P}_{(n-1)n}$$

La matrice de passage de $\mathscr{B}_1$ à $\mathscr{B}_2$ est :

$$\mathbf{P}_{12} = \mathbf{P}_{01}^{-1}\mathbf{P}_{02} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 7 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

Il reste à calculer $\mathbf{P}_{10}$, $\mathbf{P}_{20}$ et $\mathbf{P}_{21}$. Les matrices de passage étant des automorphismes, le calcul est facile :

$$\mathbf{P}_{10} = \mathbf{P}_{01}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{17}$$

$$\mathbf{P}_{20} = \mathbf{P}_{02}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} \tag{18}$$

$$\mathbf{P}_{21} = \mathbf{P}_{12}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -3 & -11 \end{pmatrix} \tag{19}$$

3. Pour écrire les composantes du vecteur $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}_{B_0}$ dans chaque base, on récrit les relations (16) de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{B_0} = \mathbf{P}_{01} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{B_1} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{B_0} = \mathbf{P}_{02} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{B_2}$$

d'où

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{B_1} = \mathbf{P}_{01}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}_{B_0} = \begin{pmatrix} -11 \\ 5 \end{pmatrix}_{B_1} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{B_2} = \mathbf{P}_{02}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}_{B_0} = \begin{pmatrix} 13 \\ -22 \end{pmatrix}_{B_2}$$

6.4.2 Exemple 2 - Comment déterminer une matrice de passage

On va voir maintenant que le processus apparemment un peu complexe d'un changement de base peut être automatisé de manière très efficace si on utilise les bonnes notations et le formalisme matriciel.

Soit $\mathscr{B}_0 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et soit les relations :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{a}_2 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{a}_3 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{b}_2 &= \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{b}_3 &= \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 \end{aligned}$$

1. $\mathscr{B}_1 = (\mathbf{a}_1; \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ et $\mathscr{B}_2 = (\mathbf{b}_1; \mathbf{b}_2; \mathbf{b}_3)$ sont des bases de $\mathbb{R}^3$. Déterminer toutes les matrices de changements de base $\mathbf{P}_{ij}$ possibles.
2. Calculer les composantes du vecteur $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 - 4\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$ dans chacune des bases.

Solution :

1. Les matrices de passage sont :

$$(\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_3) = (\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P}_{01} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{20}$$

$$(\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \mathbf{b}_3) = (\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P}_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{21}$$

   En substituant (20) dans (21) on obtient $\mathbf{P}_{02}$ très naturellement :

$$(\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \mathbf{b}_3) = (\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P}_{02} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{22}$$

   Maintenant :

$$\mathbf{P}_{10} = \mathbf{P}_{01}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}_{21} = \mathbf{P}_{12}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}_{20} = \mathbf{P}_{02}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Le vecteur $\mathbf{x}$ est invariant. Ce qu'on désire c'est trouver ses composantes dans les différentes bases donc on a les relations :

$$\mathbf{x} = (\mathbf{e}_1\,\mathbf{e}_2\,\mathbf{e}_3)\begin{pmatrix}1\\-4\\3\end{pmatrix}_{B_0} = (\mathbf{a}_1\,\mathbf{a}_2\,\mathbf{a}_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}_{B_1} = (\mathbf{b}_1\,\mathbf{b}_2\,\mathbf{b}_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}_{B_2} \tag{23}$$

ou encore :

$$\mathbf{x} = \mathbf{I}\begin{pmatrix}1\\-4\\3\end{pmatrix}_{B_0} = \mathbf{P}_{01}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}_{B_1} = \mathbf{P}_{02}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}_{B_2} \tag{24}$$

Tout naturellement de (24) on obtient :

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}_{B_1} = \mathbf{P}_{10}\begin{pmatrix}1\\-4\\3\end{pmatrix}_{B_0} = \begin{pmatrix}5\\-7\\3\end{pmatrix}_{B_1}$$

et

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}_{B_2} = \mathbf{P}_{20}\begin{pmatrix}1\\-4\\3\end{pmatrix}_{B_0} = \begin{pmatrix}12\\-10\\3\end{pmatrix}_{B_2}$$

6.5 Formule à retenir

Comment se souvenir de tout ça ?

$$\mathbf{xe} = \mathbf{x'e'} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e'} = \mathbf{e}\cdot\mathbf{P}_{ee'} \quad \text{et} \quad \mathbf{x'} = \mathbf{P}_{e'e}\cdot\mathbf{x}$$

6.5.1 Illustration

On recherche x dans la simple relation suivante :

$$10\,\mathbf{m} = x\,\mathbf{cm}$$

En identifiant les termes avec la formule ci-dessus, on obtient :

10	**m**	=	1000	**cm**
x	**e**	=	**x'**	**e'**

Le calcul de la "matrice de passage" donne :

$$\mathbf{e'} = \mathbf{e}\cdot\mathbf{P}_{ee'} \quad \hookrightarrow \quad \mathbf{cm} = \mathbf{m}\cdot\mathbf{P}_{ee'} \Rightarrow \mathbf{P}_{ee'} = \frac{1}{100}$$

Remarque :
$\mathbf{P}_{ee'}$ est la valeur de la "nouvelle" base dans l'"ancienne".

Pour calculer x on pose :

$$\mathbf{x'} = \mathbf{P}_{e'e}\cdot\mathbf{x} \quad \hookrightarrow \quad x = \mathbf{P}_{e'e}\cdot 10 = \mathbf{P}_{ee'}^{-1}\cdot 10 = 100\cdot 10 = 1000$$

7 Effet d'un changement de base sur un endomorphisme

7.1 De quoi s'agit-il ?

Soit un endomorphisme donné par sa matrice $\mathbf{T}$ sur un espace vectoriel E de dimension 3 défini par une base $\mathscr{B}_0 = (\mathbf{e}_1;\mathbf{e}_2;\mathbf{e}_3)$ (pas forcément la base canonique). On donne la base $\mathscr{B}_1 = (\mathbf{e'}_1;\mathbf{e'}_2;\mathbf{e'}_3)$ et on se demande quelle est la matrice $\mathbf{T'}$ de cet endomorphisme dans $\mathscr{B}_1$.

Dans la base $\mathscr{B}_0$ on peut écrire :

$$\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\\ \mathbf{T} \\ \\ \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \tag{25}$$

et dans la base $\mathscr{B}_1$ on a :

$$\begin{pmatrix}\mathbf{e'}_1 & \mathbf{e'}_2 & \mathbf{e'}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y'_1\\y'_2\\y'_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{e'}_1 & \mathbf{e'}_2 & \mathbf{e'}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\\ \mathbf{T'} \\ \\ \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'_1\\x'_2\\x'_3\end{pmatrix} \tag{26}$$

La matrice de passage de la base $\mathscr{B}_0$ à $\mathscr{B}_1$ peut se mettre sous la forme :

$$\begin{pmatrix}\mathbf{e'}_1 & \mathbf{e'}_2 & \mathbf{e'}_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\\ \mathbf{P} \\ \\ \end{pmatrix} \tag{27}$$

En substituant (27) dans (26) :

$$\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\\ \mathbf{P} \\ \\ \end{pmatrix}\begin{pmatrix}y'_1\\y'_2\\y'_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\\ \mathbf{P} \\ \\ \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\\ \mathbf{T'} \\ \\ \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'_1\\x'_2\\x'_3\end{pmatrix}$$

En identifiant et en appliquant la matrice de passage à la matrice colonne des y'_i on obtient :

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\\ \mathbf{P} \\ \\ \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\\ \mathbf{T'} \\ \\ \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'_1\\x'_2\\x'_3\end{pmatrix}$$

Dans $\mathscr{B}_0$ on a la relation $\mathbf{y} = \mathbf{Tx}$ et la transformation des coordonnées nous donne $\mathbf{x'} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}$:

$$\begin{pmatrix}\\ \mathbf{T} \\ \\ \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\\ \mathbf{P} \\ \\ \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\\ \mathbf{T'} \\ \\ \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\\ \mathbf{P}^{-1} \\ \\ \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

En identifiant à nouveau on obtient finalement :

$$\begin{pmatrix}\\ \mathbf{T} \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\\ \mathbf{P} \\ \\ \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\\ \mathbf{T'} \\ \\ \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\\ \mathbf{P}^{-1} \\ \\ \end{pmatrix}$$

Donc :

$$\mathbf{T} = \mathbf{PT'P}^{-1} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{T'} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{TP} \tag{28}$$

7.1.1 Exemple 1 - Endomorphisme et changement de base

Soit $\mathscr{B}_0 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et soit les relations :

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_1 &= \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \\
\mathbf{a}_2 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 \\
\mathbf{a}_3 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}_1 &= \mathbf{a}_3 \\
\mathbf{b}_2 &= \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 \\
\mathbf{b}_3 &= \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3
\end{aligned}$$

qui définissent les bases $\mathscr{B}_1 = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ et $\mathscr{B}_2 = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$.

Soit d'autre part l'endomorphisme φ donné par les images des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ par les relations :

$$\begin{aligned}
\varphi(\mathbf{e}_1) &= \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \\
\varphi(\mathbf{e}_2) &= \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 \\
\varphi(\mathbf{e}_3) &= \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1
\end{aligned} \tag{29}$$

Déterminer la matrice φ dans chacune des bases $\mathscr{B}_0$, $\mathscr{B}_1$ $\mathscr{B}_2$

Solution :
Une simple lecture des relations entre les bases permet de trouver les matrices de passage (en les prenant dans l'ordre, chaque colonne de la matrice correspond à une des relations données).

$$\mathbf{P}_{01} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{P}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

En utilisant la composition des changements de base :

$$\mathbf{P}_{02} = \mathbf{P}_{01}\mathbf{P}_{12} \qquad \xrightarrow{\looparrowright} \qquad \mathbf{P}_{02} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Les matrices inverses sont :

$$\mathbf{P}_{10} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{P}_{21} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{P}_{20} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix};$$

La matrice de la transformation dans $\mathscr{B}_0$ est donnée par les relations (29) :

$$\mathbf{F}_{B_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On applique la formule générale (28) trouvée plus haut en l'adaptant au cas qui nous intéresse

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_{B_1} = \mathbf{P}_{01}^{-1}\mathbf{T}_{B_0}\mathbf{P}_{01} &= \mathbf{P}_{10}\mathbf{T}_{B_0}\mathbf{P}_{01} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Pour $\mathbf{F}_{B_2}$ on a :

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{B_2} = \mathbf{P}_{02}^{-1}\mathbf{T}_{B_0}\mathbf{P}_{02} &= \mathbf{P}_{20}\mathbf{T}_{B_0}\mathbf{P}_{02} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Pour $\mathbf{F}_{B_2}$ on a également :

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{B_2} = \mathbf{P}_{12}^{-1}\mathbf{T}_{B_1}\mathbf{P}_{12} &= \mathbf{P}_{21}\mathbf{T}_{B_1}\mathbf{P}_{12} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

8 Similitude matricielle

Dans cette section il n'est question que de matrices carrées.

8.1 Définition

Deux matrices **A** et **B** sont dites **semblables** s'il existe une matrice inversible **P** telles que :

$$\mathbf{A} = \mathbf{PBP}^{-1} \tag{30}$$

8.2 Propriétés

1. La similitude est une *relation d'équivalence*.

8.2.1 Invariants de similitude

Deux matrices semblables ont les mêmes **traces**, **valeurs propres**, **formes réduites**, **déterminants** et **polynômes caractéristiques**.

Deux matrices sont semblables si et seulement si elles constituent deux matrices représentatives du même endomorphisme dans deux bases différentes.

8.3 Exercices - Matrices semblables

Soit la base canonique $\mathscr{B}_0 = (\mathbf{e}_1; \mathbf{e}_2)$ et la base $\mathscr{B}_1 = (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2; 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$.
Soit la matrice suivante (dans la base canonique) donnée par :

$$\mathbf{T}_0 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la matrice $\mathbf{T}_1$ du même endomorphisme dans la base $\mathscr{B}_1$.
2. Déterminer $\mathbf{T}_0^2$ et $\sqrt{\mathbf{T}_0}$.

Solution :

On commence par calculer la matrice de passage (j'utiliserai dans cette exemple les deux notations vues au point (10)). La matrice de passage a pour colonnes les relations données entre les deux bases (images des vecteurs de bases de $\mathbf{e'}_1$ et $\mathbf{e'}_2$ dans la base $\mathscr{B}_0$).

$$\mathbf{P}_{01} = \mathbf{Id}_{\mathscr{B}_1}^{\mathscr{B}_0} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On utilise la relation (28) pour déterminer $\mathbf{T}_1$:

$$\mathbf{T}_1 = \mathbf{P}_{10}\mathbf{T}_0\mathbf{P}_{01} = \mathbf{Id}_{\mathscr{B}_0}^{\mathscr{B}_1}\mathbf{T}_{\mathscr{B}_0}\mathbf{Id}_{\mathscr{B}_1}^{\mathscr{B}_0} = \mathbf{T}_{\mathscr{B}_1}$$

Ce qui donne, en tenant compte que $\mathbf{P}_{10} = \mathbf{P}_{01}^{-1}$, la matrice :

$$\mathbf{T}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

On va maintenant calculer le carré et la racine carrée de cette matrice, ce qui est facile, car il s'agit d'une matrice diagonale et on remarque tout de suite que dans la base $\mathscr{B}_1$ le calcul de $\mathbf{T}_1^2$ est donné par :

$$\mathbf{T}_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$$

En s'inspirant du calcul que l'on vient d'effectuer, on se doute que la racine carrée de $\mathbf{T}_1$ est :

$$\sqrt{\mathbf{T}_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

En effet :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \mathbf{T}_1$$

ce qui est facilement vérifiable.
Ce qu'on nous demande est le carré et la racine carrée de la matrice $\mathbf{T}_0$ et non de la matrice $\mathbf{T}_1$. Il suffit de "retourner à la maison" dans la base $\mathscr{B}_0$ en appliquant la transformation inverse :

$$\mathbf{T}_0^2 = \mathbf{P}_{01}\mathbf{T}_1^2\mathbf{P}_{10} = \mathbf{Id}_{\mathscr{B}_1}^{\mathscr{B}_0}\mathbf{T}_{\mathscr{B}_1}^2\mathbf{Id}_{\mathscr{B}_0}^{\mathscr{B}_1} = \mathbf{T}_{\mathscr{B}_0}^2$$

Le calcul donne :

$$\mathbf{T}_0^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 10 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

pour le carré et

$$\sqrt{\mathbf{T}_0} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

Regardons à présent les différentes matrices obtenues dans chacune des bases :

$$\mathbf{T}_0 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{T}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{T}_0^2 = \begin{pmatrix} 11 & 10 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{T}_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$$
$$\sqrt{\mathbf{T}_0} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \quad ; \quad \sqrt{\mathbf{T}_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On peut remarquer que les déterminants et les traces des paires de matrices sont identiques, ces matrices sont semblables deux à deux.

Travailler sur une matrice diagonale est donc très facile mais comment l'obtenir ? En calculant les valeurs propres et les vecteurs propres. C'est ce que l'on verra dans la section suivante.

9 Valeurs et vecteurs propres

9.1 Exemple d'introduction

Supposons que dans $\mathbb{R}^2$ on veuille construire une transformation linéaire dont l'action est une symétrie par rapport à un axe incliné à +30ř par rapport à l'horizontale. On va procéder par étapes :

1. On commence par faire faire à l'axe de symétrie une rotation de −30ř afin de l'amener sur l'axe des x.
2. On effectue une symétrie par rapport à cet axe, autrement dit on change le signe de la coordonnée x_2.
3. Finalement on remet l'axe de symétrie "en place" en lui faisant effectuer une rotation de +30ř.

Comment s'y prendre. Premièrement on sait que notre transformation va être linéaire donc on peut travailler sur des vecteurs unitaires.

Toute matrice de rotation dans $\mathbb{R}^2$ est de la forme :

$$\rho_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

où θ est l'angle de rotation ($\pm\theta$).
La matrice de symétrie selon l'axe x est :

$$S_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice de la transformation cherchée est donc la composition des matrices suivantes :

$$\mathbf{T} = (\rho_{+30\check{r}} \circ S_x \circ \rho_{-30\check{r}}) = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

On vérifie en cherchant l'image du vecteur $\mathbf{v}_1 = (5\sqrt{3}, 5)^T$ qui est un vecteur situé sur l'axe de symétrie :

$$\mathbf{T}(\mathbf{v}_1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5\sqrt{3} \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\sqrt{3} \\ 5 \end{pmatrix}$$

Comme on pouvait s'y attendre, rien ne s'est produit ! Le vecteur résultant est identique.

On cherche l'image du vecteur $\mathbf{v}_2 = (5, 5\sqrt{3})^T$ qui est un vecteur situé avec un angle de 60ř par rapport à l'axe des abscisses.

$$\mathbf{T}(\mathbf{v}_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 5\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Comme prévu le vecteur image est sur l'axe des abscisses.

Maintenant il faut bien reconnaître que le "coeur" de la transformation est la symétrie par rapport à l'axe x, les deux autres opérations ne sont que des rotations. On se pose la question suivante :

Est-il possible de déterminer à partir de la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La réponse est oui !

9.2 Calcul des éléments propres d'une transformation linéaire

On la une matrice $\mathbf{A}$ d'une transformation linéaire et on se demande s'il est possible de trouver une forme semblable $\mathbf{A}'$ dans une nouvelle base, où la matrice serait plus "simple".

Si on reprend la matrice de symétrie de l'exemple précédent,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et que l'on étudie les résultats de la transformation linéaire

$$\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x},$$

on remarque que pour tous les vecteurs $\mathbf{x}$ situés sur l'axe x on peut remplacer la matrice $\mathbf{A}$ par le scalaire 1 :

$$\varphi(\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} = 1 \cdot \mathbf{x}$$

De même pour tout vecteur $\mathbf{x}$ parallèle à l'axe y, on peut remplacer la matrice $\mathbf{A}$ par le scalaire -1 :

$$\varphi(\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -x_2 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} = -1 \cdot \mathbf{x}$$

On va donc se poser la question de savoir si il existe une ou plusieurs valeur(s) λ telle(s) que

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}. \tag{31}$$

On ne peut pas écrire (31) de la manière suivante :

$$\mathbf{A}\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Cela reviendrait à soustraire un vecteur à une matrice. On fait donc l'opération suivante, on multiplie le terme $\lambda\mathbf{x}$ par la matrice identité $\mathbf{I}$ et on factorise $\mathbf{x}$.

$$\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{I}\lambda\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \overset{\text{↦}}{\longrightarrow} \quad (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{32}$$

9.2.1 Polynôme caractéristique et valeurs propres d'une matrice

Que signifie exactement l'expression $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$? Si les vecteurs qui composent $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ sont indépendants alors $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ est la seule solution possible. Mais cela n'est pas intéressant, car on sait que $\mathbf{x}$ est non nul. La seule possibilité est que la matrice soit singulière c.à.d. il faut que son déterminant soit nul. Le déterminant

$$\det(\mathbf{A} - \mathbf{I}\lambda) = \left|\mathbf{A} - \mathbf{I}\lambda\right| \tag{33}$$

s'appelle le **polynôme caractéristique**. On commence donc par calculer celui-ci. Rien ne vaut un exemple ! Calculons le polynôme caractéristique pour la matrice de la transformation linéaire vue ci-dessus.

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

On pose :

$$\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} - \lambda \end{pmatrix} \quad \overset{\text{↦}}{\longrightarrow} \quad \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1$$

Les deux valeurs qui annulent le polynôme caractéristique sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -1$. On les appelle les **valeurs propres**.

9.2.2 Vecteurs propres

On continue en remplaçant successivement chacune des valeurs propres λ_1 et λ_2 dans l'équation

$$(\mathbf{T}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{x}=\mathbf{0}$$

et en cherchant la(les) solution $\mathbf{x}_1$ et $\mathbf{x}_2$.

Pour la première des deux valeurs propres on a le système homogène :

$$(\mathbf{T}-\lambda_1\mathbf{I})\mathbf{x}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-1 & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

et pour la deuxième valeur propre le système homogène :

$$(\mathbf{T}-\lambda_2\mathbf{I})\mathbf{x}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}+1 & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

En mettant ces deux systèmes sous la forme de deux matrices augmentées, en les réduisant à la forme échelonnée et en les résolvant on obtient :

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-1 & \frac{\sqrt{3}}{2} & | & 0\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}-1 & | & 0\end{pmatrix}\quad\xrightarrow{\text{↦}}\quad\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3} & | & 0\\ 0 & 0 & | & 0\end{pmatrix}\quad\xrightarrow{\text{↦}}\quad\mathbf{x}_1=\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\ \\ 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}+1 & \frac{\sqrt{3}}{2} & | & 0\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}+1 & | & 0\end{pmatrix}\quad\xrightarrow{\text{↦}}\quad\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & | & 0\\ 0 & 0 & | & 0\end{pmatrix}\quad\xrightarrow{\text{↦}}\quad\mathbf{x}_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \\ 1\end{pmatrix}$$

Les deux vecteurs $\mathbf{x}_1$ et $\mathbf{x}_2$ sont les **vecteurs propres** associés aux valeurs propres λ_1 et λ_2. On peut former les couples :

$$\left\{\lambda_1=1;\ \mathbf{x}_1=\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\ \\ 1\end{pmatrix}\right\}\quad\text{et}\quad\left\{\lambda_2=-1;\ \mathbf{x}_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \\ 1\end{pmatrix}\right\}$$

On remarque que les vecteurs propres sont les vecteurs directeurs des droites inclinées à 30ř et 120ř par rapport à l'axe des x.

Les vecteurs propres forment une base dans laquelle la matrice $\mathbf{T}$ est simplifiée au maximum. La nouvelle matrice est la matrice diagonale formée à partir des valeurs propres :

$$\mathbf{T}'=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

Les matrices $\mathbf{T}$ et $\mathbf{T}'$ sont semblables donc selon (30), il existe une matrice $\mathbf{P}$ telle que

$$\mathbf{T}=\mathbf{P}\mathbf{T}'\mathbf{P}^{-1}$$

et on se doute que la matrice $\mathbf{P}$ est la matrice formée par les vecteurs propres (attention l'ordre des éléments propres doit être respecté).

$$\mathbf{T}=\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4}\\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

9.3 Exemple 1 - Dans l'espace vectoriel des polynômes

Soit l'espace $\mathbb{R}^3_{[x]}$ l'espace vectoriel des polynômes de degré égal ou inférieur à 3 . Soit la base canonique $\mathscr{B} = (1, x, x^2, x^3)$.
Trouver les vecteur(s) et valeur(s) propre(s) de la matrice de différentiation $\mathbf{D}_{\mathbb{R}^3_{[x]}}$.

Solution :
Un vecteur type de cet espace peut s'écrire sous forme matricielle de la façon suivante :

$$P(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = a + bx + cx^2 + dx^3$$

La dérivée de ce vecteur est :

$$P'(x) = b + 2cx + 3dx^2$$

On peut obtenir $P'(x)$ en appliquant la matrice de différentiation donnée par :

$$\mathbf{D}_{\mathbb{R}^3_{[x]}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En effet :

$$P'(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = b + 2cx + 3dx^2$$

Le déterminant de la matrice $\mathbf{D}_{\mathbb{R}^3_{[x]}} - \lambda\mathbf{I}$ est

$$\det(\mathbf{D}_{\mathbb{R}^3_{[x]}} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4$$

Le déterminant s'annule pour $\lambda = 0$. Il n'a a donc qu'une seule valeur propre.

Le vecteur propre $\mathbf{x}$ qui correspond à λ est donné par la solution du système homogène $(\mathbf{D}_{\mathbb{R}^3_{[x]}} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

$$\left|\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right| \xrightarrow{\hookrightarrow} \left|\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right| \Rightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La solution obtenue est celle qui correspond à un polynôme constant. Cela signifie que pour les polynômes constants on peut remplacer la matrice de différentiation $\mathbf{D}_{\mathbb{R}^3_{[x]}}$ par la valeur 0. En effet la dérivée d'une constante est nulle.

9.4 Exemple 2 - Dans l'espace vectoriel des fonctions dérivables

Soit le sous-espace vectoriel des fonctions dérivables $\mathbb{D}$ donné par la base $\mathscr{D}_e = (1, e^x, e^{-x})$.
Trouver les vecteur(s) et valeur(s) propre(s) de la matrice de différentiation $\mathbf{D}_{\mathscr{D}}$.

Solution :
Un vecteur type de cet espace peut s'écrire sous forme matricielle de la façon suivante :

$$f(x) = \begin{pmatrix} 1 & e^x & e^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a + be^x + ce^{-x}$$

La dérivée de ce vecteur est :

$$f'(x) = 0 + be^x - ce^{-x}$$

On peut obtenir $f'(x)$ en appliquant la matrice de différentiation donnée par :

$$\mathbf{D}_{\mathscr{D}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de la matrice $\mathbf{D}_{\mathscr{D}} - \lambda\mathbf{I}$ est

$$\det(\mathbf{D}_{\mathscr{D}} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda)(1+\lambda)$$

Le déterminant s'annule pour $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = -1$. Il y a 3 valeurs propres distinctes et réelles donc il y a également trois vecteurs propre $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ et $\mathbf{x}_3$.

Le vecteur propre $\mathbf{x}_1$ qui correspond à $\lambda_1 = 0$ est donné par la solution du système homogène $(\mathbf{D}_{\mathscr{D}} - \lambda_1\mathbf{I})\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$.

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le vecteur propre $\mathbf{x}_2$ qui correspond à $\lambda_2 = 1$ est donné par la solution du système homogène $(\mathbf{D}_{\mathscr{D}} - \lambda_2\mathbf{I})\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$.

$$\left|\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right| \quad \overset{\rightsquigarrow}{\longrightarrow} \quad \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le vecteur propre $\mathbf{x}_3$ qui correspond à $\lambda_3 = -1$ est donné par la solution du système homogène $(\mathbf{D}_{\mathscr{D}} - \lambda_1\mathbf{I})\mathbf{x}_3 = \mathbf{0}$.

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right| \quad \overset{\rightsquigarrow}{\longrightarrow} \quad \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le couple $\{\lambda_1 = 0; x_1 = (1,0,0)^T\}$ correspond à la fonction constante $a \cdot 1 + 0 \cdot e^x + 0 \cdot e^{-x} = a$ dont la dérivée est nulle (valeur propre nulle).

Le couple $\{\lambda_2 = 1; x_2 = (0,1,0)^T\}$ correspond à la fonction $0 \cdot 1 + b \cdot e^x + 0 \cdot e^{-x} = be^x$ dont la dérivée est be^x c.-à-d. la fonction elle-même (valeur propre 1).

Le couple $\{\lambda_3 = -1; x_3 = (0,0,1)^T\}$ correspond à la fonction $0 \cdot 1 + 0 \cdot e^x + c \cdot e^{-x} = ce^{-x}$ dont la dérivée est $-ce^x$ c.-à-d. l'opposé de la fonction (valeur propre -1).

9.5 Exemple 3 - Dans l'espace vectoriel des polynômes

Première partie de l'exercice

Soit $\mathbb{R}^2_{[x]}$ l'espace vectoriel des polynômes de degré égal ou inférieur à deux. La base est dans ce cas $\mathscr{B} = (x^2; x; 1)$.
On donne l'endomorphisme $\Psi_{\alpha,\beta}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\Psi_{\alpha,\beta} : \mathbb{R}^2_{[x]} \to \mathbb{R}^2_{[x]} : P(x) \mapsto (x^3 + \alpha x + \beta)P''(x) + (x-1)P'(x) + (2-2x)P(x)$$

1. Trouver la matrice de l'endomorphisme $\Psi_{\alpha,\beta}$ dans la base $\mathscr{B}$.
2. Montrer que $\Psi_{\alpha,\beta}$ est bijectif si et seulement si $\alpha + \beta \neq -1$.
3. Déterminer les valeurs α, β de manière à ce que x^2 soit un vecteur propre de $\Psi_{\alpha,\beta}$ et trouver la valeur propre associée.

Solution :

1. Un "vecteur" quelconque de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2_{[x]}$, est le polynôme $P(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$.

   On remarquera que les lettres a, b, c jouent le rôle des composantes x_1, x_2, x_3 et que les monômes $x^2, x, 1$ jouent le rôle des vecteurs de base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

   On commence par déterminer l'effet de la transformation sur les vecteurs de base, c'est-à-dire qu'on cherche quelque chose de la forme :

   $$\Psi_{\alpha,\beta}(a \cdot x^2 + b \cdot x + c) = a \cdot \Psi_{\alpha,\beta}(x^2) + b \cdot \Psi_{\alpha,\beta}(x) + c \cdot \Psi_{\alpha,\beta}(1) \tag{34}$$

   On déduit les valeurs $P''(x)$ et $P'(x)$ à partir de $P(x)$

   $$P(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c; \quad P'(x) = 2ax + b; \quad P''(x) = 2a.$$

   Puis on les substitue dans l'endomorphisme et on cherche les images des vecteurs de base :

   $$\begin{aligned} \Psi(ax^2 + x + c) &= (x^3 + \alpha x + \beta)(2a) + (x-1)(2ax + b) + (2-2x)(ax^2 + bx + c) \\ &= a(4x^2 + (2\alpha - 2)x + 2\beta) + b(-2x^2 + 3x - 1) + c(0x^2 - 2x + 2) \end{aligned}$$

   En identifiant les termes obtenus avec (34), on obtient l'image des vecteurs de la base $\mathscr{B} = (x^2; x; 1)$:

   $$\begin{aligned} \Psi_{\alpha,\beta}(x^2) &= 4x^2 + (2\alpha - 2)x + 2\beta \\ \Psi_{\alpha,\beta}(x) &= -2x^2 + 3x - 1 \\ \Psi_{\alpha,\beta}(1) &= 0x^2 - 2x + 2 \end{aligned}$$

   La transformation linéaire sous forme matricielle est :

   $$\Psi_{\alpha,\beta}\left(\begin{pmatrix} x^2 & x & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x^2 & x & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 2\alpha - 2 & 3 & -2 \\ 2\beta & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

   La matrice cherchée est :

   $$\Psi_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 2\alpha - 2 & 3 & -2 \\ 2\beta & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Un endomorphisme est bijectif si le déterminant de sa matrice est non nul, on dit alors que c'est un automorphisme. Le déterminant de $\Psi_{\alpha,\beta}$ est :

$$\det\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 2\alpha-2 & 3 & -2 \\ 2\beta & -1 & 2 \end{pmatrix} = 8+8\alpha+8\beta = 8(1+(\alpha+\beta))$$

Le déterminant est non nul pour $\alpha+\beta \neq -1$.

3. Le vecteur x^2 correspond au vecteur $(1,0,0)^T$ dans la base utilisée. Pour que $(1,0,0)^T$ soit un vecteur propre il faut que le résultat de sa multiplication par la matrice $\Psi_{\alpha,\beta}$ soit colinéaire à celui-ci.

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 2\alpha-2 & 3 & -2 \\ 2\beta & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2\alpha-2 \\ 2\beta \end{pmatrix}$$

Il faut donc que α soit égal à 1 et β à zéro. La valeur propre sera 4.

Deuxième partie de l'exercice

Dans la donnée de la première partie de l'exercice on pose $\alpha = -3$ et $\beta = 2$. La transformation linéaire devient :

$$\Psi : \mathbb{R}^2_{[x]} \to \mathbb{R}^2_{[x]} : P(x) \mapsto (x^3-3x+2)P''(x)+(x-1)P'(x)+(2-2x)P(x)$$

1. Trouver la nouvelle matrice Ψ de la transformation.
2. Calculer les vecteurs et valeurs propres de Ψ.
3. Montrer que Ψ est diagonalisable.
4. Donner une base de $\ker\Psi$ et une base de $\mathrm{Im}\,\Psi$.
5. Montrer que :

$$\ker\Psi = \{P(x) \in \mathbb{R}^2_{[x]} \mid P(-1+\sqrt{2}) = P(-1-\sqrt{2}) = 0\}$$

et montrer également que :

$$\mathrm{Im}\,\Psi = \{P(x) \in \mathbb{R}^2_{[x]} \mid P(1) = 0\}$$

Solution :

1. En faisant de même que dans la première partie on obtient la matrice :

$$\Psi = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -8 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Chercher les valeurs propres revient à calculer toutes les valeurs λ telles que :

$$(\Psi - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

On désire que $\mathbf{x}$ soit non nul, il faut donc que la matrice $\Psi - \lambda\mathbf{I}$ soit singulière (déterminant nul). On pose :

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -8 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-\lambda & -2 & 0 \\ -8 & 3-\lambda & -2 \\ 4 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

En calculant le déterminant de cette matrice on obtient le polynôme caractéristique.

$$\det\begin{pmatrix} 4-\lambda & -2 & 0 \\ -8 & 3-\lambda & -2 \\ 4 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda-8)(\lambda-1)\lambda$$

Les racines du polynôme caractéristique sont les valeurs propres de la transformation linéaire. Dans ce cas $\lambda_1 = 8, \lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = 0$.
En substituant ces valeurs propres une à une dans $(\Psi - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$, on obtient 3 systèmes homogènes dont les solutions sont les vecteurs propres associés à ces valeurs propres.

(a) Pour $\lambda_1 = 8$:

$$\begin{pmatrix} 4-8 & -2 & 0 \\ -8 & 3-8 & -2 \\ 4 & -1 & 2-8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & 0 & 0 \\ -8 & -5 & -2 & 0 \\ 4 & -1 & -6 & 0 \end{array}\right) \overset{\curvearrowright}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\curvearrowright}{\longrightarrow} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = 8$ est $v_1 = (1,-2,1)^T$. Le sous-espace propre est :

$$\{\lambda_1 = 8;\ v_1 = (1,-2,1)^T\}$$

Ou encore, puisque l'on est dans un espace polynomiale :

$$\{\lambda_1 = 8;\ v_1 = x^2 - 2x + 1\}$$

(b) Pour $\lambda_2 = 1$:

$$\begin{pmatrix} 4-1 & -2 & 0 \\ -8 & 3-1 & -2 \\ 4 & -1 & 2-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 0 & 0 \\ -8 & 2 & -2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{\curvearrowright}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 12 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\curvearrowright}{\longrightarrow} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Le vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = 1$ est $v_1 = (2,3,-5)^T$. Le sous-espace propre est :

$$\{\lambda_2 = 1;\ v_2 = (2,3,-5)^T\}$$

Ou encore, puisque l'on est dans un espace polynomiale :

$$\{\lambda_2 = 1;\ v_2 = 2x^2 + 3x - 5\}$$

(c) Pour $\lambda_3 = 0$:

$$\begin{pmatrix} 4-0 & -2 & 0 \\ -8 & 3-0 & -2 \\ 4 & -1 & 2-0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 0 & 0 \\ -8 & 3 & -2 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \overset{\curvearrowright}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\curvearrowright}{\longrightarrow} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Le vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = 1$ est $v_1 = (2,3,-5)^T$. Le sous-espace propre est :

$$\{\lambda_3 = 0;\ v_2 = (1,2,-1)^T\}$$

Ou encore, puisque l'on est dans un espace polynomiale :

$$\{\lambda_3 = 0;\ v_2 = x^2 + 2x - 1\}$$

3. On forme à présent la matrice **P** formée des vecteurs propres ainsi que la matrice diagonale **D** formée des valeurs propres. Le calcul de $\mathbf{PDP}^{-1}$ doit donné Ψ.

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -8 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{14} & \frac{1}{14} \\ 0 & -\frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

4. $\ker \Psi$ est caractérisé par le sous-espace propre correspondant à la valeur propre nulle donc :

$$\ker \Psi = \langle x^2 + 2x - 1 \rangle$$

et une base de $\mathrm{Im}\, \Psi$ correspond au sous-espace propre formé par les valeurs propres non nulles :

$$\mathrm{Im}\, \Psi = \langle 2x^2 + 3x - 5; x^2 - 2x + 1 \rangle$$

5. Les valeurs

$$(-1 + \sqrt{2}) \text{ et } (-1 - \sqrt{2})$$

sont des solutions de $x^2 + 2x - 1 = 0$ qui est le vecteur propre du noyau de la transformation.

De même, 1 est solution des deux polynômes formant la base de $\mathrm{Im}\, \Psi$.

9.6 Exemple 4 - Projection

On est dans $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique. Soit les trois points $O=(0,0,0), B=(2,0,1)$ et $C=(1,-3,2)$. Trouver la matrice de projection orthogonale sur le plan π $(x-y-2z=0)$formé par les trois points, puis donner les valeurs et vecteurs propres de la matrice.

Solution :
Tout vecteur parallèle au vecteur normal du plan π sera transformé en point de ce plan et tout vecteur dans le plan ne subira aucune transformation. Il y aura un vecteur propre qui sera la normale du plan π et la valeur propre se ce sous-espace propre sera nulle. Les deux autres vecteurs propres seront deux vecteurs directeurs du plan qui sera également un sous-espace propre de la transformation, on pourra choisir les vecteurs propres **OA** et **OB** par exemple. La valeur propre double de ce sous-espace sera $\lambda_2=\lambda_3=1$.

On a les deux espaces propres :

$$\left\{\lambda_1=0;\, v_1=(1,-1,-2)^T\right\}$$

$$\left\{\lambda_2=\lambda_3=1;\, v_2=(1,-3,2)^T,(2,0,1)^T\right\}$$

La matrice de la transformation dans l'espace propre sera la matrice diagonale constituée des valeurs propres

$$\mathbf{D}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

et la matrice de passage de la base canonique à la base propre sera la matrice formée par les vecteurs propres

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}1&1&2\\-1&-3&0\\-2&2&1\end{pmatrix}$$

La matrice inverse $\mathbf{P}^{-1}$ est :

$$\mathbf{P}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{6}&-\frac{1}{6}&-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{18}&-\frac{5}{18}&\frac{1}{9}\\\frac{4}{9}&\frac{2}{9}&\frac{1}{9}\end{pmatrix}$$

La matrice de l'endomorphisme dans la base canonique est :

$$\begin{aligned}\mathbf{T}&=\mathbf{PDP}^{-1}\\&=\begin{pmatrix}1&1&2\\-1&-3&0\\-2&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{6}&-\frac{1}{6}&-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{18}&-\frac{5}{18}&\frac{1}{9}\\\frac{4}{9}&\frac{2}{9}&\frac{1}{9}\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}5&1&2\\1&5&-2\\2&-2&2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

9.7 Exemple 5 - Dimension des sous-espaces

Soient $m \neq 0$ et f un endomorphisme dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice, dans la base canonique, est :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3m & -m & -m \\ -m & 3m & -m \\ -m & -m & 3m \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $(1,1,1)^T$ est un vecteur propre dont la valeur propre associée est $\lambda = m$.
2. Calculer le polynôme caractéristique.
3. Calculer les valeurs et vecteurs propres. Donner la nature et la dimension des sous-espaces propres obtenus.
4. Trouver une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.
5. f est elle un automorphisme (endomorphisme bijectif).

Solution :

1. Il suffit de remarquer que :

$$\begin{pmatrix} 3m & -m & -m \\ -m & 3m & -m \\ -m & -m & 3m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ m \\ m \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   On posera $\lambda_1 = m$ et $v_1 = (1,1,1)^T$.

2. Le polynôme caractéristique est donné par :

$$\det \begin{pmatrix} 3m-\lambda & -m & -m \\ -m & 3m-\lambda & -m \\ -m & -m & 3m-\lambda \end{pmatrix} = (m-\lambda)(\lambda-4m)^2$$

3. On vérifie que $\lambda_1 = m$ est une solution du polynôme caractéristique, il existe une seconde valeur propre qui est $\lambda_2 = \lambda_3 = 4m$, c'est une valeur propre double.

   Le calcul des vecteurs propres se fait en substituant les valeurs propres dans la matrice ci-dessus.

   (a) Pour $\lambda_1 = m$:
   On doit résoudre le système homogène :

$$\begin{pmatrix} 2m & -m & -m \\ -m & 2m & -m \\ -m & -m & 2m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overset{\curvearrowright}{\longrightarrow} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \overset{\curvearrowright}{\longrightarrow} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Résultat que l'on avait déjà. La dimension de ce sous-espace est 1, car il y a un seul vecteur dans la base du sous-espace propre qui est $\langle (1,1,1)^T \rangle$.

(b) Pour $\lambda_2 = \lambda_3 = 4m$:
On doit résoudre le système homogène :

$$\begin{pmatrix} -m & -m & -m \\ -m & -m & -m \\ -m & -m & -m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overset{\curvearrowright}{\longrightarrow} \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \overset{\curvearrowright}{\longrightarrow} \quad \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

La dimension de ce sous-espace est 2, car il y a deux vecteurs dans la base du sous-espace propre qui sont $\langle (1,-1,0)^T, (0,1,-1)^T \rangle$

4. La base dans laquelle cette matrice est diagonale est la base formée par les vecteurs propres.
5. Cette transformation est un automorphisme, car toutes les valeurs propres sont différentes de zéro et la valeur propre double n'est pas dégénérée (il y a deux vecteurs propres indépendants).

10 Construction de matrices de transformations linéaire

10.1 Exemple 1

On désire projeté n'importe quel vecteur de $\mathbb{R}^3$ sur le plan $\pi : x + y + 2z = 0$, parallèlement au vecteur $\mathbf{d} = (1,2,1)^T$. On appelera cette transformation linéaire $\mathbf{T}$.

10.1.1 Résolution par géométrie analytique

Je désigne par $(X_1, X_2, X_3)^T$ le vecteur projeté sur le plan π. Appelons $\mathbf{P} = (x_1, x_2, x_3)^T$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$ (voir figure (4)).

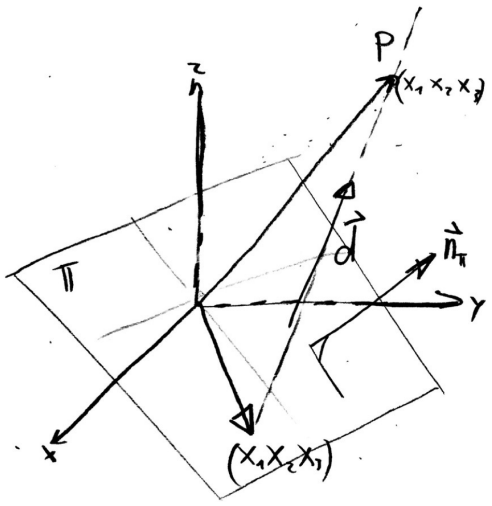

FIGURE 4 – Projection d'un vecteur $\mathbf{P}$ sur un plan π, parallèlement à une direction $\mathbf{d}$ donnée.

Le sommet du vecteur projeté sur le plan π a comme coordonnées (X_1, X_2, X_3). On peut décrire ce point comme étant également l'intersection entre le plan π et la droite de direction $\mathbf{d}$ passant par (x_1, x_2, x_3).

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad m \in \mathbb{R}. \tag{35}$$

Le point (X_1, X_2, X_3) appartenant également au plan, il doit satisfaire l'équation

$$X_1 + X_2 + 2X_3 = 0 \tag{36}$$

On peut substituer 35 dans 36 pour trouver m :

$$(x_1 + m) + (x_2 + 2m) + 2(x_3 + m) = 0 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{-x_1 - x_2 - 2x_3}{5}$$

En substituant à présent m en retour dans 35 on a le système :

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \frac{-x_1 - x_2 - 2x_3}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}(4x_1 - x_2 - 2x_3) \\ \frac{1}{5}(-2x_1 + 3x_2 + 4x_3) \\ \frac{1}{5}(-x_1 - x_2 + 3x_3) \end{pmatrix}$$

dont on peut tirer l'équation matricielle :

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & -4 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

La matrice de l'application linéaire est :

$$\mathbf{T} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & -4 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

10.1.2 Résolution par à l'aide des valeurs et vecteurs propres

On sait que la projection de tout vecteur parallèle au vecteur directeur $(1,2,1)^T$ aura pour image un point sur le plan $\pi : x + y + 2z = 0$. On aura donc une valeur propre nulle $\lambda_1 = 0$ pour tous ces vecteurs. Le vecteur propre associé à la valeur propre λ_1 est le vecteur directeur $\mathbf{v}_1 = (1,2,1)^T$.
Les vecteurs du plan π resteront quant à eux inchangés, il suffit donc de choisir deux vecteurs du plan comme vecteurs propres et les associer à la double valeur propre $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. On peut choisir $\mathbf{v}_2 = (1,-1,0)$ et $\mathbf{v}_3 = (2,0,-1)$.

On a maintenant l'espace propre suivant :

$$\left\{ \lambda_1 = 0 \,; \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \left\{ \lambda_2 = 1 \,; \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \left\{ \lambda_3 = 1 \,; \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

La matrice diagonale correspondante à cette situation est :

$$\mathbf{T}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice des vecteurs de bases $\mathbf{P}$ correspondant à cette matrice diagonale est la matrice formée par les vecteurs propres :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice inverse est :

$$\mathbf{P}' = \mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

Le calcul de $\mathbf{T}$ est donné par $\mathbf{T} = \mathbf{P}\mathbf{T}'\mathbf{P}^{-1}$:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & -4 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

On retombe sur la même matrice. Il reste à vérifier que la matrice est une projection. Toute matrice de projection est telle que :

$$\mathbf{T}^2 = \mathbf{T}$$

En effet

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & -4 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & -4 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & -4 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

ce que l'on peut voir également par le fait que $\mathbf{T}'^2 = \mathbf{T}'$. On remarque en passant que les traces et les déterminants de $\mathbf{T}$ et $\mathbf{T}'$ sont identiques.

10.2 Exemple 2

Soit le vecteur $u = (1,0,-1)^T$, $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x + y - z = 0\}$, $G = \text{Vect}\{u\}$.

1. Montrer que F et G sont supplémentaires.
2. Calculer la matrice de projection $\mathbf{M}_p$ sur F parallèlement à G.
3. Calculer la matrice $\mathbf{M}_s$ de la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

Solution :
G est un espace vectoriel de dimension 1 puisque c'est une droite passant par l'origine (tout espace ou sous-espace vectoriel doit absolument contenir le vecteur $\mathbf{0}$). F est un plan de vecteur normal $(1,1,-1)^T$. Supplémentaire signifie que les sous-espaces vectoriels engendrent $\mathbb{R}^3$. Le plan est engendré par les vecteurs $(1,-1,0)^T$ et $(1,0,1)^T$ qui sont des vecteurs directeurs de F.

1. Pour montrer que F et G sont supplémentaires, il suffit de montrer que leurs vecteurs directeurs forment une famille indépendante. On peut le faire facilement en montrant que le déterminant de la matrice formée par les 3 vecteurs est non nul.

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0$$

2. On va maintenant considérer ces trois vecteurs comme étant la base dans laquelle on va travailler.
   Projeter parallèlement à G signifie que tous les vecteurs colinéaires à $\mathbf{u}$ auront l'origine $\mathbf{0}$ comme image de la projection. La valeur propre associée à $(1,0,-1)^T$ (qui sera le vecteur propre $\mathbf{v}_1$) sera donc $\lambda_1 = 0$.
   Les vecteurs situés dans le plan ne subiront aucun changement par projection, la valeur propre de deux vecteurs propres directeurs du plan sera donc $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. On choisit comme vecteurs propres associés à la valeur propre $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, les vecteurs $\mathbf{v}_2 = (1,-1,0)$ et $\mathbf{v}_3 = (1,0,1)$.
   Grâce à la notation matricielle, la matrice de la projection $\mathbf{M}_p$ dans la base canonique s'obtient à l'aide de la matrice de passage $\mathbf{P}$ (formée des vecteurs propres) et de la matrice diagonale $\mathbf{D}_p$ (formée des valeurs propres) :

$$\mathbf{M}_p = \mathbf{P}\mathbf{D}_p\mathbf{P}^{-1}$$

$$\mathbf{M}_p = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

   Que se passe-t-il si l'on applique deux fois la matrice $\mathbf{M}$ sur un même vecteur ? La deuxième projection est totalement inutile et ne change en aucun cas l'effet de la première. Donc on peut affirmer que :

$$\mathbf{M}_p^2 = \mathbf{M}_p$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

   On appelle cette propriété l'**idempotence** et c'est une caractéristique de tous les *projecteurs*.

3. Une symétrie parallèle à G signifie que tous les vecteurs colinéaires à $\mathbf{u}$ se retrouveront de l'autre côté du plan F. La valeur propre associée à $(1,0,-1)^T$ (qui sera le vecteur propre $\mathbf{v}_1$) sera donc $\lambda_1 = -1$.
   Les vecteurs situés dans le plan ne subiront cette fois encore aucun changement, la valeur propre de deux vecteurs propres directeurs du plan sera donc $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. On choisit comme vecteurs propres associés à la valeur propre $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, les vecteurs $\mathbf{v}_2 = (1,-1,0)$ et $\mathbf{v}_3 = (1,0,1)$.
   Grâce à la notation matricielle, la matrice de la sysmétrie $\mathbf{M}_s$ dans la base canonique s'obtient à l'aide de la matrice de passage $\mathbf{P}$ (formée des vecteurs propres) et de la matrice diagonale $\mathbf{D}_s$ (formée des valeurs propres) :

$$\mathbf{M}_s = \mathbf{P}\mathbf{D}_s\mathbf{P}^{-1}$$

$$\mathbf{M}_s = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Que se passe-t-il si l'on applique deux fois la matrice $\mathbf{M}_s$ sur un même vecteur ? La deuxième sysmétrie le ramène au point de départ. On peut affirmer que :

$$\mathbf{M}_s^2 = \mathbf{I}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   C'est une caractéristique de toutes les symétries. Ceci peut être vérifié avec la matrice $\mathbf{M}_s$ obtenue dans cet exercice..

10.3 Interprétation d'une transformation linéaire

10.3.1 Exemples 1

Interpréter l'effet de la transformation linéaire suivante donnée par la matrice :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcul des valeurs et vecteurs propres :

1. Polynôme caractéristique :
$$\lambda^2 - 9 = 0$$
2. Valeurs propres :
Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique, donc $\lambda_1 = 3$ et $\lambda_2 = -3$.
3. Calcul des vecteurs propres :

   (a) $\lambda_1 = 3$ implique que :
   $$\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   (b) $\lambda_2 = -3$ implique que :
   $$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

   (c) Matrice diagonale :
   Les matrices $\mathbf{D}$ et $\mathbf{P}$ sont respectivement :
   $$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

On voit qu'il y a une symètrie d'axe $y = x$ suivie d'une homothétie de facteur 3.

10.3.2 Exemples 2

Interpréter l'effet de la transformation linéaire suivante donnée par la matrice :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcul des valeurs et vecteurs propres :

1. Polynôme caractéristique :
$$\lambda^2 - 2\lambda = 0$$
2. Valeurs propres :
Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique, donc $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 0$.
3. Calcul des vecteurs propres :

   (a) $\lambda_1 = 2$ implique que :
   $$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   (b) $\lambda_2 = 0$ implique que :
   $$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c) Matrice diagonale :
Les matrices $\mathbf{D}$ et $\mathbf{P}$ sont respectivement :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On voit qu'il y a projection sur l'axe $y = -x$ suivie d'une homothétie de rapport 2.